Originäre wissenschaftliche Arbeit
Angenommen am 08.12.2004.

ANA SLIEPČEVIĆ

Die Kreisbüschel in der isotropen Ebene

Pramen kružnica u izotropnoj ravnini

ABSTRACT

Promatraju se izotropne kružnice u modelu izotropne ravnine s apsolutnom figurom (f,F) u konačnosti. U usporedbi s euklidskom ravninom, u kojoj je pramen kružnica moguće zadati samo na pet različitih načina, pokazuje se da je u izotropnoj ravnini to moguće učiniti na devet načina. Konstruira se po jedna kružnica za svaki od zadanih pramenova.

Ključne riječi: geometrija, izotropna ravnina, izotropna kružnica

Pencil of circles in isotropic plane

ABSTRACT

The model of an isotropic plane with absolute figure (f,F) in finiteness is studied. In comparation with Euclidean plane, where pencil of circles can be set only on five different ways, it is shown that in an isotropic plane it can be done on nine ways.
A circle is constructed for every given pencil

Key words: geometry, isotropic plane, isotropic circle

MSC 2000: 51N99, 51M15

Einleitung

Bei der Kurvenuntersuchung in einer projektiv-metrischen Ebene spielen immer die sogenannten zirkuläre Kurven die wichtige Rolle. Die Kreise sind die einfachsten zwischen solchen Kurven. Bekanntlich kann ein Kreis in der euklidischen Ebene auf die folgende Weise eindeutig gegeben sein:

1. durch drei verschiedene reelle Punkte
2. durch einen reellen und ein Paar konjugiert imaginäre Punkte
3. durch einen einfachen und einen zweizuzählenden Punkt
4. durch einen Punkt und Kreismittelpunkt.
5. durch eine Tangente und Kreismittelpunkt.

Ein Kreisbüschel (bzw. eine Kreiseschar) in der gleichen Ebene kann auf die folgende Weise gegeben sein:

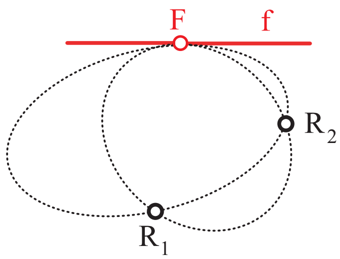
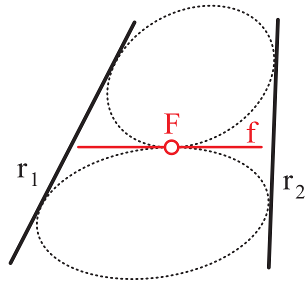
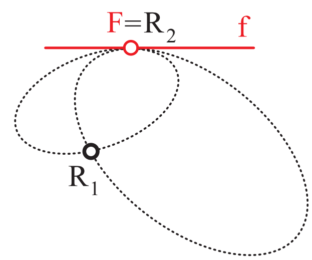
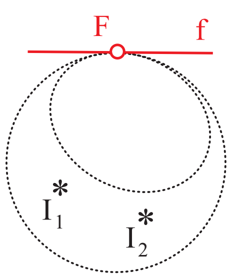
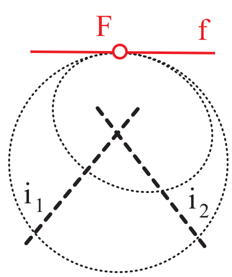
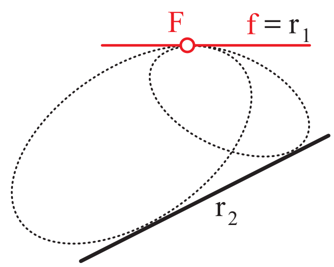
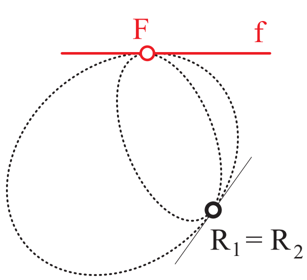
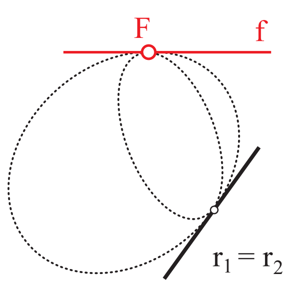
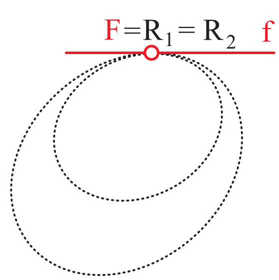
1. durch zwei verschiedene reelle Punkte
2. durch ein konjugiert imaginäres Punktepaar
3. durch einen zweizuzählenden Punkt
4. durch eine zweizuzählende Tangente
5. durch den Mittelpunkt.

In der isotropen Ebene geschieht etwas anders. Es existieren mehrere Möglichkeiten um einen eideutigen Kreis wie auch ein Kreisbüschel aufzugeben.

Die isotrope Kreisbüschel und Kreisescharen

Sei durch die Absolutfigur (F, f) ein endliches Modell der isotropen Ebene gegeben. Jeder Kegelschnitt der in einem solchem Modell die Gerade f im Punkt F berührt, heisst der *isotrope Kreis*. Einen isotropen Kreis kann man auf die folgende Weise aufgeben:

1. durch drei verschiedene reelle Punkte
2. durch einen reellen und zwei konjugiert imaginären Punkten
3. durch einen einfachen und einen zweizuzählenden Punkt
4. durch drei verschiedene reelle Tangenten
5. durch eine reelle und zwei konjugiert imaginären Tangenten
6. durch eine einfache und eine zweizuzählende Tangente.

Typ 1.	Typ 2.	Typ 3.
R_1, R_2	r_1, r_2	$R_1, R_2 = F$
		
I_1, I_2	i_1, i_2	$r_1 = f, r_2$
		
$R_1 = R_2$	$r_1 = r_2$	$R_1 = R_2 = F$
		

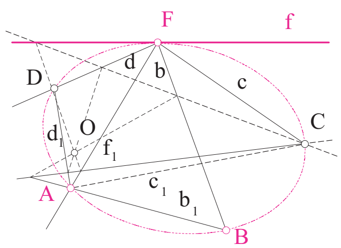
Tabelle

Ein Kreisbüschel bzw. eine Kreiseschar in der isotropen Ebene kann man auf neun verschiedene Weisen wie folgt bestimmen (sieh die Tabelle):

1. durch zwei verschiedene reelle Punkte
2. durch ein konjugiert imaginäres Punktepaar
3. durch einen zweizuzählenden Punkt (*Berührungskreisbüschel*)
4. durch zwei verschiedene reelle Tangenten
5. durch ein konjugiert imaginäres Tangentenpaar
6. durch eine zweizuzählende Tangente (*Berührungskreiseschar*)
7. der Büschel der Kreise, die sich im F oskulieren und noch einen gemeinsamen Punkt durchlaufen (*Oskulationskreisbüschel*)
8. der Büschel der Kreise, die sich im F oskulieren und noch eine gemeinsame Tangente berühren (*Oskulationskreiseschar*)
9. der Büschel der Kreise, die sich im F hyperoskulieren (*Hyperoskulationskreisbüschel)*.

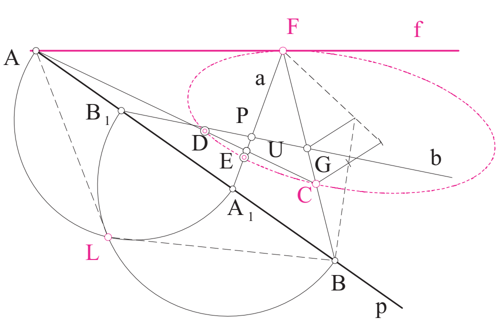
Es wird interessant vorzuzeigen wie man einen isotropen Kreis jedes Büschels bzw. Schar konstruktiv erreichen kann.

1. Sei der Kreisbüschel durch zwei verschiedene reelle Punkte A und B gegeben (Fig. 1). Jeder beliebige Punkt C ($C \notin f$, $\overline{AB}$) bestimmt einen einzigen Kreis dieses Büschels. Den konkreten Kreis k konstruiert man z.B. als das projektive Erzeugnis der Geradenbüschel (F) und (A). Jeder beliebige Punkt D dieses Kreises wurde durch die projektive Vervollständigung der projektiven Geradenbüscheln (F) und (A) mittels der perspektiven Punktereihen (m) und (n) konstruiert.



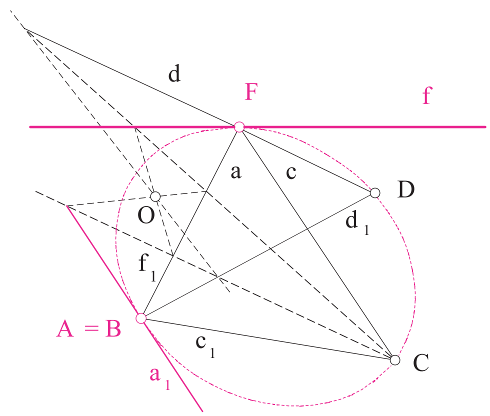
Figur 1.

2. Ein Kreisbüschel wird durch ein konjugiert imaginäres Punktepaar gegeben. Es wird als das Doppelpunktepaar der elliptischen Involution an der Gerade p dargestellt. Diese Involution wird in der Fig. 2. mittels des Laguerrepunktes L gegeben ([1], [2]). Sei C ($C \notin f$, p) ein beliebiger Punkt, der einen konkreten Kreis des Büschels bestimmt. Ein weiterer Punkt E dieses Kreises wurde mittels Polarität konstruiert. Sind nämlich an einer Geraden zwei Punkte polar zugeordnet in bezug auf einen Kegelschnitt, bilden sie einen harmonischen Quadrupel mit den Schnittpunkten dieser Geraden und diesem Kegelschnitt. Der Punkt G wird mittels $(FCBG) = -1$ konstruiert, ebenso die Polare $b = B_1G$ des Punktes B. Die Polare a des Punktes A schneidet die Gerade b im Punkt P, der stellt den Pol der Geraden p dar. Mittels des Punktes P konstruiert man den vierten harmonischen Punkt E an der Geraden a, der ein weiterer Realpunkt des gegebenes Kegelschnittes wird. Der Punkt D wurde auf die gleiche Weise bestimmt. Jeden weiteren Kreispunkt konstruiert man gleich wie beim Fall 1.



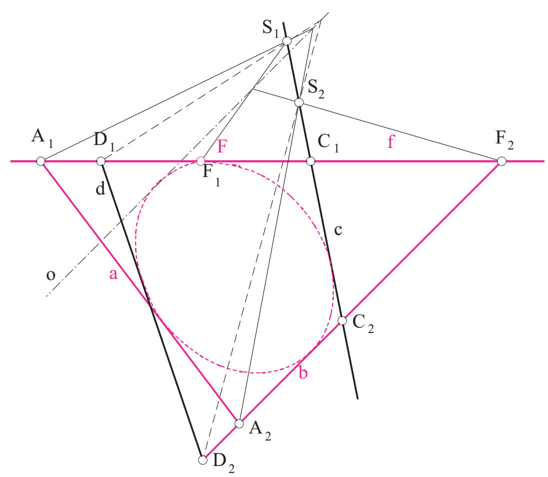
Figur 2.

3. Fallen die Punkte A und B zusammen, wird das Kreisbüschel durch die Tangente a_1 und ihren Berührungspunkt $A = B$ bestimmt (Fig. 3). Jeder beliebige Punkt C ($C \notin f, a_1$) bestimmt einen einzigen Kreis aus dem Kreisbüschel, der wird ebenso wie beim Fall 1. konstruiert.



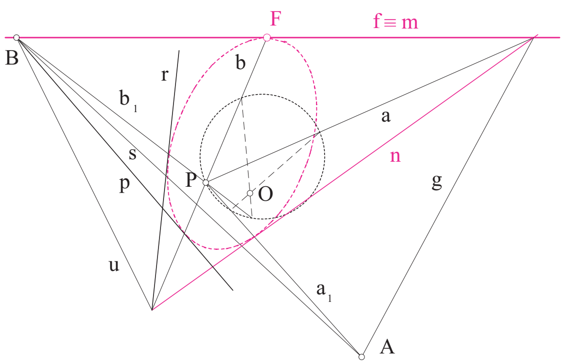
Figur 3.

4. Die Kreiseschar ist durch zwei verschiedene reelle Tangenten a und b gegeben (Fig. 4). Eine weitere beliebige Tangente c bestimmt einen einzigen Kreis aus der Schar. Die Konstruktion eines konkreten Kreises läuft dual mit dem Fall 1.



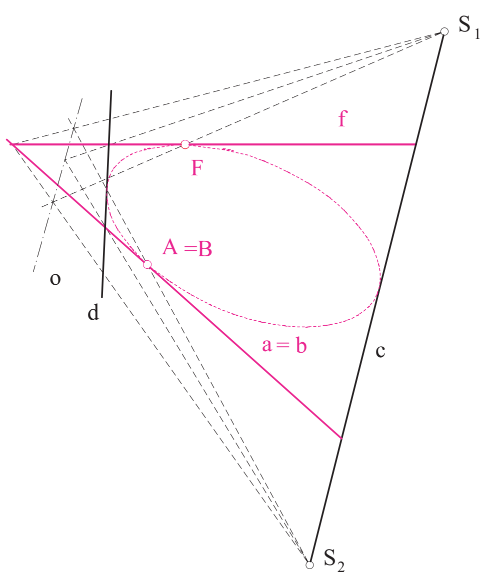
Figur 4.

5. Mit einem Paar der konjugiert imaginären Kreistangenten wird in der Fig. 5. eine Kreiseschar gegeben. Die imaginären Kreistangenten wurden als die Doppelgeraden des elliptischen involutorischen Geradenbüschels (P) dargestellt. Dieses Geradenbüschel wurde durch zwei involutorische Geradenpaare (a,a_1), (b,b_1) bestimmt. Eine beliebige Tangente n bestimmt einen einzigen Kreis aus der Schar. Durch die mit dem Fall 2. duale konstruktive Verfahrungsweise bestimmt man die Tangente r dieses Kreises.



Figur 5.

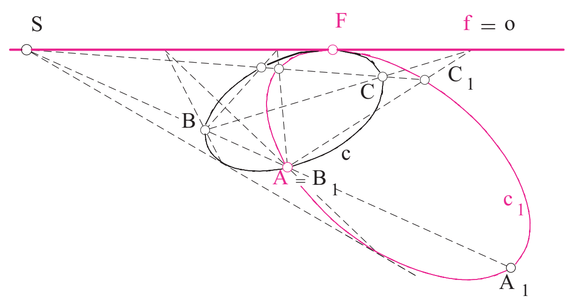
6. Durch eine zweizuzählende Tangente $a=b$ und ihren Berührungspunkt $A=B$ wird eine Kreiseschar in der Fig 6. gegeben. Mit einer beliebigen Tangente c ist ein einziger Kreis der Schar bestimmt. Eine weitere Tangente d des gegebenen Kreises konstruiert man mittels der Vervollständigung der projektiven Punktereihen (f) und (a). Diese Konstruktion ist im ganzen dual mit der Konstruktion beim Fall 3.



Figur 6.

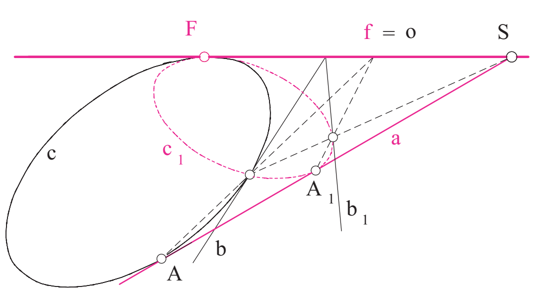
7. Um ein Oskulationskreisbüschel zu erreichen sollte man, beispielsweise, die drei nicht kollinearen Punkte A, B und C eines beliebigen Kreises c nehmen und mittels dieses Kreises einen neuen Kreis c_1 konstruieren, so dass dieser den Kreis c im F oskuliert und noch in einem weiteren Punkt A schneidet (Fig. 7.). Dieser Kreis c_1 wird mittels einer Elation des Kreises c konstruiert. Als die Elationsachse nimmt man die Gerade f und das Elationszentrum ist im Punkt $AB \cap f = S$. Mittels der Elation e $(S, o=f, B, B_1=A)$, wobei dem Punkt B der Punkt $B_1=A$ zugeordnet ist, wird die Konstruktion des Kreises c_1 durchgeführt.

Läuft der Punkt B den Kreis c durch, ändert sich das Punktepaar $(B, B_1=A)$ und läuft dabei das Elationszentrum $S \in f$ der Gerade f durch. Jede solche Elation bestimmt einen neuen Kreis des Oskulationskreisbüschels.



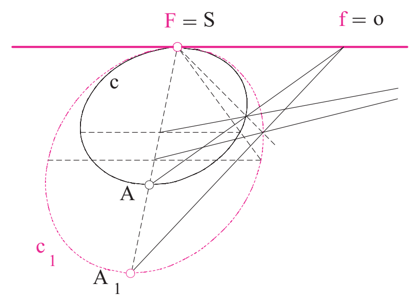
Figur 7.

8. Die Oskulationskreiseschar kann z. B. so gegeben sein, dass die Kreise, ausser dem Oskulationspunkt F, noch eine gemeinsamme Tangente a besitzen. Der Kreis c in der Fig. 8. berührt die Gerade a im Punkt A und als noch eine Tangente die Gerade b besitzt. Mittels einer Elation e $(S=f\cap a, o=f, b, b_1)$, wobei man als b_1 immer eine neue Tangente auswählt, konstruiert man jeden neuen Kreis der Kreiseschar.



Figur 8.

9. In der Fig. 9. wurde ein Hyperoskulationskreisbüschel mit dem Berührungspunkt F dargestellt. Alle Kreise dieses Büschels wurden durch die Elation e $(S = F, o = f, A, A_1)$ eines gegebenen Kreises c konstruiert, wobei dem Punkt $A \in c$ jedesmal ein anderer Punkt A_1 zugeordnet ist. (Ganz analog konnte man eine Hyperosculationskreiseschar betrachten.)



Figur 9.

Literatur

[1] NIČE, V., *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[2] SZIROVICZA, V., *Die imaginären Elemente bestimmter Kegelschnitte*, KoG 6 (2002), 55-57

[3] SACHS, H., *Ebene isotrope Geometrie*, Braunnschweig-Wiesbaden, 1987.

Ana Sliepčević
Fakultät für Bauwesen
Kačićeva 26, 10000 Zagreb
e-mail: anas@grad.hr