DIE KISSOIDALE ERZEUGUNG DER VOLLKOMMEN ZIRKULÄREN KURVEN 3. ORDNUNG IN DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Vlasta Szirovicza

Abstract. This paper gives the cisoidal construction of the entirely circular curves of the third order in the hyperbolic plane. Furthermore the relationship is shown between these curves and the projective construction of curves of the third order.

Eine algebraische Kurve der hyperbolischen Ebene heißt eine vollkommen zirkuläre Kurve, wenn die Zahl ihrer absoluten Berührungspunkte ihrer Ordnung gleich ist. So berührt eine vollkommen zirkuläre Kurve 3. Ordnung den absoluten Kegelschnitt in drei Punkten. Die isotropen Tangenten in den absoluten Berührungspunkten heißen isotrope Asymptoten, und die gegenseitigen Schnittpunkte der isotropen Asymptoten sind die vierfachen Brennpunkte der Kurve. Eine vollkommen zirkuläre Kurve 3. Ordnung hat also drei vierfache Brennpunkte. Die drei Hauptpunkte, d. h. die Schnittpunkte der Kurve mit jeder der isotropen Asymptoten liegen auf einer Geraden, welche Hauptgerade genannt wird. Den folgenden Betrachtungen werden wir das *Cayley-Klein*sche Modell der hyperbolischen Ebene zu Grunde legen.

I

Die Entfernung zweier Punkten P und Q der hyperbolischen Ebene wird bekanntlich durch

$$d\,(P,Q) = -\frac{1}{2}\ln\,(PQ, S_2S_1) \tag{1}$$

festgelegt, wobei die Punkte S_1 und S_2 die Schnittpunkte der Geraden PQ mit dem absoluten Kegelschnitt sind.

Es sei irgend ein Punkt O gegeben, den wir als Pol der Erzeugung bezeichnen, und seien k und k_1 zwei beliebige Kurven. Eine Gerade g durch den Punkt O schneide die Kurven k und k_1 in den Punkten P und P_1. Die kissoidale Erzeugung in der euklidischen Ebene führt bekanntlich auf die Subtraktion der Radiusvektoren der gegebenen Kurven. Rotiert die Gerade g um den Punkt O, so wird der Punkt Q eine Kurve beschreiben, die Kissoide genannt wird und mit k_Q bezeichnet wird. Ziehen wir die Relation (1) in Betracht, so kann diese Definition auch in der hyperbolischen Ebene anwenden werden und man hat

$$OQ = OP_1 - OP\,.$$

Weiters folgt

$$OQ = OP_1 - OP = -\frac{1}{2}\ \ln\,(OP_1, S_2S_1) + \frac{1}{2}\ln\,(OP, S_2S_1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\ \ln\ \frac{(OP_1, S_2S_1)}{(OP, S_2S_1)} = -\frac{1}{2}\ln\,(P_1P, S_2S_1)\,. \tag{2}$$

Schneidet die gegebene Kurve den absoluten Kegelschnitt, so wird $P = S_2$ und es gilt

$$OQ = -\frac{1}{2}\ \ln\,(P_1S_2, S_2S_1) = -\frac{1}{2}\ \ln\infty = \infty\,.$$

Dies bedeutet, daß die Punkte auf dem absoluten Kegelschnitt invariant bleiben. Sind sie die absoluten Berührungspunkte, so wird die erzeugte Kissoide in diesen Punkten den absoluten Kegelschnitt berühren. Ist mindestens eine der zwei Punkten P und P_1 ein Idealpunkt, so wird es auch der Punkt Q sein.

Schneiden sich die gegebenen Kurven k und k_1 in $P = P_1$, so folgt aus der Definition

$$OQ = -\frac{1}{2}\ \ln\,(P_1P, S_2S_1) = -\frac{1}{2}\ln\,(PP, S_2S_1) = -\frac{1}{2}\ln 1 = 0\,,$$

d. h. es gilt $O = Q$, und die Bilder der Schnittpunkte fallen daher in den Pol O. Der Pol ist ein vielfacher Punkt der Kissoide und die Gerade OQ ist die Tangente der Kissoide im Pol O.

Damit haben wir gezeigt, daß für die Kissoiden in der hyperbolischen Ebene die gleichen Eigenschaften wie in der euklidischen Ebene gelten. Diese wirken sich aber bekanntlich auf die Ordnung der Kurve aus. Somit gilt auch in der hyperbolischen Ebene die Relation

$$\nu = 2mn - (\beta\, n + \gamma\, m + \alpha), \tag{3}$$

wo m, n die Ordnungen der gegebenen Kurven k und k_1 sind, welche β bzw. γ mal durch den Pol O gehen und α unendlich ferne Schnittpunkte besitzen. Der Pol O ist ein vielfacher Punkt der Kissoide für deßen Vielfachkeit auch hier die Formel

$$\nu = m\,n - \beta\,\gamma - \alpha \qquad \text{gilt.} \tag{4}$$

Soll die Kissoide zirkulär sein, so ist es notwendig, daß mindestens eine der gegebenen Kurven zirkulär ist. In dieser Arbeit schränken wir uns auf die kissoidale Erzeugung der vollkommen zirkulären Kurven 3. Ordnung, also jene, die drei absolute Berührungspunkte haben.

Unter Beachtung von (3) und (4) haben wir den

SATZ 1. *Will man in der*
eine volkommen zirkuläre K
und hinreichend, daß die G
absolute Gerade sind. Als a
Tangente des absoluten Ke
einen der Schnittpunkte des
telpunktes dieses Kreises m
geraden fallen. Dieser Pol is

Es kann sein, daß die g
Kegelschnitts ist, aber daß d
soluten Berührungspunkt —
Kurve 3. Ordnung besitzt. Di

In der hyperbolischen E
kuläre Kurven 3. Ordnung. A
vom Geschlecht Null sind,
zeugung erhalten werden. Es
absoluten Berührungspunkte
(∞^1) von dreiachsig vollkom
In jedem dieser Büschel gib
auch die einzigen unikursalen
es auf dem absoluten Kegels
es in der hyperbolischen Eb
ven 3. Ordnung gibt.

Der Doppelpunkt der Kur
auf welcher die drei Hauptpu

Die Axialsymmetrie in de
torische Kollineation, die als
vollkommen zirkuläre Kurve
Achse ist, ist es notwendig u
den Schnittpunkt einer isotrop
beiden anderen absoluten Be
ist die absolute Polare dieses
vorliegen, schneiden sich ihre
Dieser Punkt ist der absolute

Wenn bei einer nichtzerf
existiert, so wird er bei jede
Daraus folgt, daß er im S
muß, d. h. mit dem Punkt L
des Pols bei der kissoidalen
Doppelpunkt der Kissoide sein

Die Gestalt und die Art d
der gegebenen Elementen ab:
des Pols, wie auch von ihrer L

Die Art des Doppelpunktes
Kreises k mit der Gerade k_1
Knoten bedingen, die imaginär
Berührt die Gerade k_1 den K
Gerade k_1 eine Tangente des ab

SATZ 1. *Will man in der hyperbolischen Ebene durch kissoidale Erzeugung eine volkommen zirkuläre Kurve 3. Ordnung k_c^3 erhalten, so ist es notwendig und hinreichend, daß die Grundkurven der Erzeugung ein Kreis und eine absolute Gerade sind. Als absolute Gerade bezeichnen wir wie üblich eine Tangente des absoluten Kegelschnitts. Der Erzeugungspol muß hierbei in einen der Schnittpunkte des Kreises mit der Verbindungsgeraden des Mittelpunktes dieses Kreises mit dem absoluten Berührungspunkt der Grundgeraden fallen. Dieser Pol ist ein Doppelpunkt der Kissoide.*

Es kann sein, daß die gegebene Gerade keine Tangente des absoluten Kegelschnitts ist, aber daß die erzeugte Kissoide — auch ohne dritten absoluten Berührungspunkt — alle Eigenschaften einer vollkommen zirkulärer Kurve 3. Ordnung besitzt. Dies wollen wir i. f. näher betrachten.

In der hyperbolischen Ebene gibt es bekanntlich ∞^6 vollkommen zirkuläre Kurven 3. Ordnung. Aus dieser Menge betrachten wir nur jene, die vom Geschlecht Null sind, denn nur diese können durch kissoidale Erzeugung erhalten werden. Es seien die Punkte T_1, T_2 und T_3 die drei festen absoluten Berührungspunkte der Kurve 3. Ordnung. Dadurch ist ein Büschel (∞^1) von dreiachsig vollkommen zirkulären Kurven 3. Ordnung bestimmt. In jedem dieser Büschel gibt es nur eine unikursale Kurve und das sind auch die einzigen unikursalen Kurven in der hyperbolischen Ebene [1]. Da es auf dem absoluten Kegelschnitt ∞^3 Punktetripel gibt, folgern wir, daß es in der hyperbolischen Ebene ∞^3 unikursale, vollkommen zirkuläre Kurven 3. Ordnung gibt.

Der Doppelpunkt der Kurve fällt in den absoluten Pol der Hauptgeraden, auf welcher die drei Hauptpunkte der Kurve liegen.

Die Axialsymmetrie in der hyperbolischen Ebene ist eine zentralinvolutorische Kollineation, die als Achse eine eigentliche Gerade hat. Damit eine vollkommen zirkuläre Kurve 3. Ordnung axialsymmetrisch bezüglich einer Achse ist, ist es notwendig und hinreichend, daß einer der Hauptpunkte in den Schnittpunkt einer isotropen Asymptote mit der Verbindungsgeraden der beiden anderen absoluten Berührungspunkte fällt [1]. Die Symmetrieachse ist die absolute Polare dieses Hauptpunktes. Da drei kollineare Hauptpunkte vorliegen, schneiden sich ihre absoluten Polaren notwendig in einem Punkt. Dieser Punkt ist der absolute Pol L der Hauptgeraden l.

Wenn bei einer nichtzerfallenden Kurve 3. Ordnung ein Doppelpunkt existiert, so wird er bei jeder Grundbewegung auf sich selbst abgebildet. Daraus folgt, daß er im Schnittpunkt der drei Symmetrieachsen liegen muß, d. h. mit dem Punkt L übereinstimmt. Dadurch ist bereits die Wahl des Pols bei der kissoidalen Erzeugung eingeschränkt (Satz 1), da er ein Doppelpunkt der Kissoide sein muß.

Die Gestalt und die Art der Kissoide hängt von der gegenseitigen Lage der gegebenen Elementen ab: von der Lage des Kreises, der Geraden und des Pols, wie auch von ihrer Lage in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt.

Die Art des Doppelpunktes im Pol O hängt von den Schnittpunkten des Kreises k mit der Gerade k_1 ab. Die reellen Schnittpunkte werden einen Knoten bedingen, die imaginären Schnittpunkte einen isolierte Doppelpunkt. Berührt die Gerade k_1 den Kreis k, so entsteht eine Spitze 1. Art. Da die Gerade k_1 eine Tangente des absoluten Kegelschnitts ist, so müßte der Kreis außer den beiden absoluten Berührungspunkten noch weitere absolute Punkte besitzen, was aber bei einer solchen Wahl der Grundkurven unmöglich ist (Abb. 1 und Abb. 2).

Besteht die Grundgerade k_1 aus lauter ideellen Punkten, außer dem absoluten Berührungspunkt, so besteht die erzeugte Kissoide — ohne Rücksicht auf den gewählten Kreis — aus lauter ideellen Punkten, ausgenommen der drei absoluten Berührungspunkte. Den einzigen eigentlichen Punkt der Kissoide bekommen wir in dem Fall, wo der Kreis k aus eigentlichen Punkten besteht und der Pol auf ihm liegt. Dieser eigentliche **Punkt als Pol** O liefert in diesem Fall einen isolierten Punkt der Kissoide (Abb. 2).

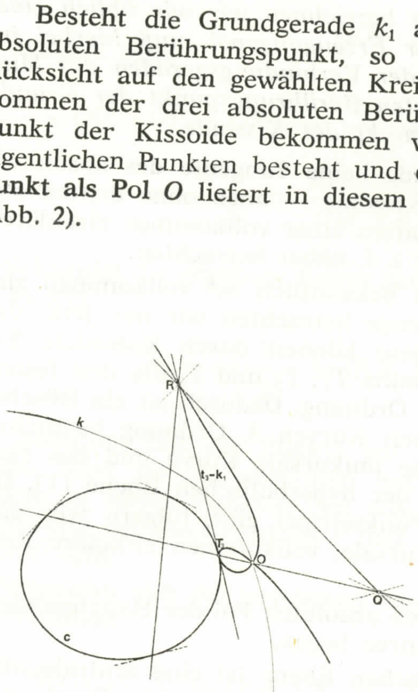

Abb. 1

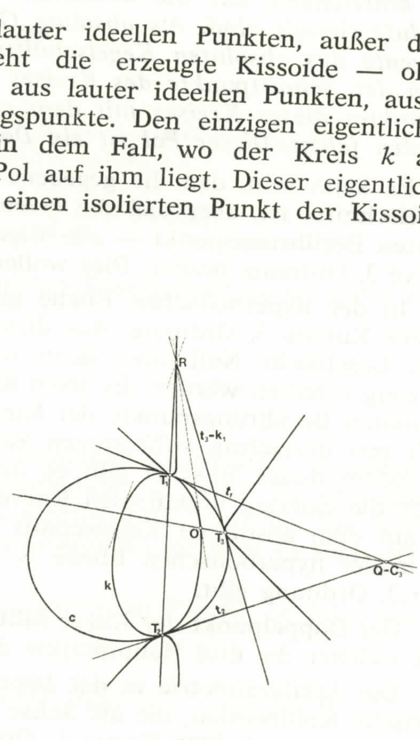

Abb. 2

Als Pol können wir auch einen der absoluten Berührungspunkte des Grundkreises wählen, da der absolute Kegelschnitt ja reell ist. In diesem Fall bekommen wir eine Kurve, die in einem absoluten Berührungspunkt ein isolierten Doppelpunkt hat, während anderen beiden reelle absolute Berührungspunkte sind. Für den Grundkreis können wir keinen Zykel wählen, da seine absoluten Berührungspunkte imaginär sind.

Ein spezieller Fall tritt ein, wenn der Grundkreis k in zwei isotrope Geraden zerfällt. Bezeichen wir diese Geraden mit t_1 und t_2, und ihren Schnittpunkt mit Q (dieser Punkt war vorher der Mittelpunkt des erwähnten Kreises). Sei der Punkt R der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der absoluten Berührungspunkte T_1, T_2 des Kreises k mit der isotropen Asymptote t_3 (Abb. 3 und Abb. 4). Es sei weiter $k_1 = RQ$ $(k_1 \neq t_3)$. Den Erzeugungspol O legen wir in den Punkt T_3. In diesem Pol hat die Kissoide einen Doppelpunkt, und zwar eine Spitze 1. Art, weil sich die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis auf den Pol abbilden und diese Schnittpunkte hier zusammengefallen sind. Die Gerade OQ ist die Tangente der Kurve in der Spitze. Sie ist die Achse der vorher genannten Symmetrie, wobei der absolute Pol in den Punkt R fällt.

Es ist aus der euklidischen Ebene bekannt, daß bei der Menge jener Kurven, welche Ofiuriden genannt werden, die Grundgerade k_1 bei der kissoidalen Erzeugung den Grundkreis berührt. Die Verbindungsgerade des Pols mit diesem Berührungspunkt steht auf diese Geraden senkrecht. Ein spezieller Fall dieser Kurven ist die Kissoide des *Diokles*. Die Orthogonalität in der hyperbolischen Ebene definiert man bekanntlich als absolute Polarität. Da die Gerade k_1 durch den absoluten Pol R der Gerade OQ geht, folgt daß die Eigenschaft erfüllt ist. So sind diese Kurven mit Spitze das Analogon zur Kissoide des *Diokles*.

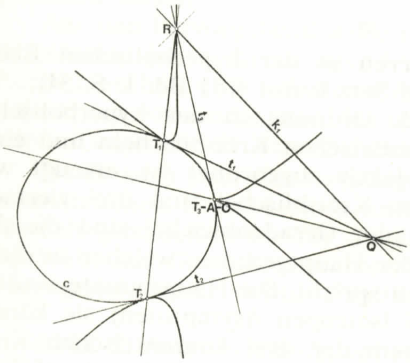

Abb. 3

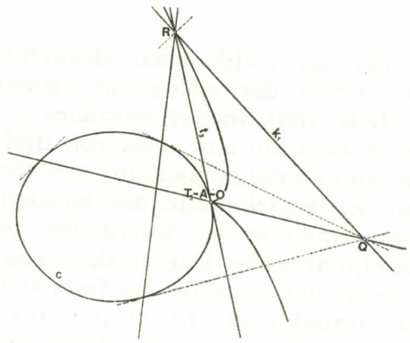

Abb. 4

Eine Kurve 3. Ordnung der euklidischen Ebene, welche drei unendlich ferne reelle Inflexionspunkte hat, ist bezüglich der drei Achsen symmetrisch. Ist diese Kurve zirkulär, so sind zwei dieser Punkte konjugiert-imaginär und die Kurve ist unter Namen *MacLaurin*sche Trisektrix bekannt. Dies ist die einzige unikursale zirkuläre Kurve 3. Ordnung.

Da für die dreiachsig symmetrischen vollkommen zirkulären Kurven 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene gilt, daß die Hauptpunkte Wendepunkte sind, folgt sofort, daß man alle durch kissoidale Erzeugung gewonnenen Kurven als Trisektrizen der hyperbolischen Ebene bezeichnen kann. Die Wendetangenten schneiden sich in einem Punkt.

Es ist bekannt, daß die vollkommen zirkuläre Kurve 3. Ordnung der hyperbolischen Ebene drei vierfache Brennpunkte hat, die sich als Schnittpunkte der isotropen Asymptoten einstellen. Enthält die Hauptgerade einen vierfachen Brennpunkt, so fallen in diesen Punkt auch die zwei Hauptpunkte der Kurve, weil diese die Schnittpunkte der Hauptgeraden mit der isotropen Asymptote sind. In diesem Fall geht die Kurve 3. Ordnung durch den Brennpunkt hindurch, d. h. sie ist als Strophoidale der hyperbolischen Ebene anzusprechen. Da diese Kurven von Geschlecht 1 sind, können sie nicht durch kissoidale Erzeugung gewonnen werden. Die einzige Kurve 3. Ordnung von Geschlecht O der euklidischen Ebene die ihren vierfachen Brennpunkt enthält ist die Strophoide. Betrachten wir nochmals die hyperbolische Situation:

Angenommen es würde vierfacher Brennpunkt, z. B. C_3 auf der Hauptgerade liegen (sieh Abb. 2). Seine absolute Polare geht dann durch die absoluten Berührungspunkten T_1 und T_2 und der Punkt L, welcher der absolute Pol der Hauptgerade ist, müßte dann auf ihr liegen. Die Strophoide würde also mit Hilfe des Kreises, der die absoluten Berührungspunkte T_1 und T_2 sowie den Punkt L enthält, erzeugt werden. Da diese drei Punkte kollinear sind, ist es klar, daß keine Strophoide in der hyperbolischen Ebene existiert. Diese Behauptung folgt auch schon aus der projektiven Erzeugung [1].

II

Für die vollkommen zirkulären Kurven in der hyperbolischen Ebene gilt ein Satz, der analog zum *Czuber*schen Satz lautet ([5] Bd. I. S. 34):

Jede vollkommen zirkuläre Kurve 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene kann mittels eines von drei konzentrischen Kreisbüscheln und eines von drei Geradenbüscheln, das ihm projektiv zugeordnet ist, erzeugt werden. Die Mittelpunkte der konzentrischen Kreisbüschel sind drei vierfache Brennpunkte dieser Kurve. Die Zentren der Geradenbüschel sind die drei Hauptpunkte der Kurve; sie liegen auf der Hauptgeraden, welcher in dieser Projektivität ein isotropes Geradenpaar entspricht. Die Hauptpunkte sind die Schnittpunkte der Kurve mit ihren drei isotropen Asymptoten; sie können reell oder konjugiert-imaginär sein. Einem der drei konzentrischen Kreisbüschels ist dasjenige Garadenbüschel zugeordnet, dessen Scheitel auf jener isotropen Asymptote liegt, die nicht den Mittelpunkt des betreffenden konzentrischen Kreisbüschel enthält.

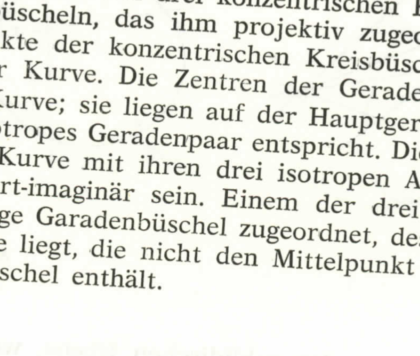

Abb. 5

In Abb, 5 sind die Hauptpunkte D_i $(i = 1, 2, 3)$, die absoluten Berührungspunkte T_i und die vierfachen Brennpunkte C_i der erzeugten Kurve eingezeichnet. Der Punkt L ist der absolute Pol der Hauptgeraden l.

Ordnen wir projektiv dem Kreisbüschel mit dem Mittelpunkt C_3 das Geradenbüschel mit dem Scheitel im Hauptpunkt D_3 zu. Da die absoluten Berührungspunkte eines Hyperzykelsbüschels reelle Punkte sind, enthält die erzeugte Kurve drei reelle absolute Berührungspunkte und der absoluter Pol L der Hauptgeraden l liegt innerhalb des absoluten Kegelschnitts. Seien nun Punkte T_1 und T_2 imaginäre Punkte, während der Punkt L ein idealer Punkt sein möge. Nehmen wir einen Horizykelsbüschel, so fallen die zwei absolute Berührungspunkte zusammen. Bei geeignet gewählten Geradenbüscheln können auch alle drei Berührungspunkte zusammenfallen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Verbindung zwischen kissoidaler und projektiver Erzeugung der vollkommen zirkulären Kurven 3. Ordnung von Geschlecht Null herzustellen, da sich nur solche durch die erste Erzeugung gewinnen lassen.

Aus den hervorgehenden Betrachtungen ist ersichtlich, daß man für den Grundkreis jenen Kreis aus dem Büschel (C_3) auswählen muß, der den Punkt L enthält und daß dieser Punkt der Pol für die Erzeugung ist. Die Gerade k_1 ist notwendig jene Gerade aus dem Geradebüschel (D_3), welche absolute Tangente mit dem Berührungspunkt T_3 ist.

Da es nach dem *Czuber*schen Satz drei Möglichkeiten für die Wahl des konzentrischen Kreisbüschels und des ihm projektiv zugeordneten Geradenbüschels gibt, haben wir für die kissoidale Erzeugung drei Möglichkeiten für die Wahl des Grundkreises, der ja immer durch den absoluten Pol der Hauptgerade geht. Hiermit folgt der

SATZ 2. *Jede dreiachsig, vollkommen zirkuläre Kurve 3. Ordnung erzeugt mittels der Projektivität zwischen einem der drei konzentrischen Kreisbüschel (C_i) und dem zugeordneten Geradenbüschels mit dem Scheitel im Hauptpunkt (D_i) ist mit jener Kurve identisch, die sich durch entsprechende kissoidale Erzeugung ergibt. Bei dieser Erzeugung sind die Grundkurven jener Kreis aus dem Kreisbüschel (C_i), der den absoluten Pol L der Hauptgerade l enthält, und eine Gerade aus dem Geradenbüschel (D_i), welche Tangente des absoluten Kegelschnitts im dritten absoluten Berührungspunkt ist. Der Pol der kissoidalen Erzeugung ist der Punkt L.*

Die Trisektrizen können auch mit Hilfe einer anderen Projektivität erzeugt werden. Sie sind das Erzeugnis der Projektivität des Büschels 2. Ordnung, welches die Tangenten des absoluten Kegelschnitts bilden und des Geradenbüschels mit dem Scheitel in einem Punkt A [1]. In diesem Punkt liegt der Doppelpunkt der erzeugten Kurve. Dadurch wird die Untersuchung speziellen Fälle der unikursalen vollkommen zirkulären Kurven 3. Ordnung ermöglicht, bei welchen der Doppelpunkt auf dem absoluten Kegelschnitt liegt. Der Punkt A muß hierbei mit einem der drei absoluten Berührungspunkte übereinstimmen, denn andernfalls fällt die in Rede stehende Kurve, da diese nicht mehr als sechs Punkte mit dem absoluten Kegelschnitt gemeinsam haben darf. Aus diesem Grund darf der Punkt A auch weder auf der isotropen Asymptote noch auf der Verbindungsgeraden zweier absoluter Berührungspunkte liegen.

Intereßant ist der Fall jener Kurve, die in einem absoluten Berührungspunkt eine Spitze 1. Art hat. Wird in diesen Punkt der Punkt A gelegt, so ist der Zusammenhang mit der kissoidale Erzeugung evident. In dem Büschel

2. Ordnung zeichen wir als Grundgeraden jene zwei Geraden aus, die isotrope Asymptoten mit den absoluten Berührungspunkten T_1 und T_2 sind (vergleiche Abb. 3 und Abb. 4). Für die Grundgerade k_1 nehmen wir die Verbindungsgerade des Schnittpunktes Q der isotropen Asymptoten und des absoluten Pols R der Gerade AQ.

Wir können somit folgern, daß diese Beziehung für alle Kurven, die durch kissoidale Erzeugung entstehen, existiert. Es ist sinnlos, jene Kurven 3. Ordnung, die als Fußpunktkurven oder durch quadratische Inversion erzeugbar sind, im Zusammenhang mit der kissoidalen Erzeugung zu untersuchen. Es wurde nämlich bewiesen [4], dass man durch diese Erzeugungsweise keine vollkommen zirkulären Kurven 3. Ordnung gewinnen kann.

LITERATUR:

[1] *D. Palman*, Vollkommen zirkuläre Kurven 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene, Glasnik Mat.-fiz.astr. **14** (1959), 19—74.

[2] *V. Niče*, Cisoidalne plohe ravnine i kugle, njihove pratilice i neke njihove generalizacije, Rad JAZU **302** (1955), 27—46.

[3] *H. Wieleitner*, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908.

[4] *V. Szirovicza*, Vollkommen zirkuläre Fußpunktkurven der hyperbolischen Ebene, Rad JAZU **408** (1983), 17—25.

[5] *G. Loria*, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Leipzig 1910.

Angenommen in Abteilung
18. 9. 1986.

Pantovčak 69a
41000 Zagreb
Yugoslavia

Cisoidalno izvođenje potpuno cirkularnih krivulja u hiperboličkoj ravnini

Vlasta Szirovicza

Sadržaj

U prvom dijelu rada prikazano je cisoidalno izvođenje krivulja na *Cayley-Klein*ovu modelu hiperboličke ravnine. Da bi izvedena cisoida bila potpuno cikularna krivulja 3. reda, nužno je da temeljne krivulje izvođenja budu kružnica i pravac koji je tangenta apsolute, te da pol izvođenja leži na kružnici u jednom od njenih sjecišta s pravcem koji spaja središte te kružnice i apsolutno dirališe tog pravca. Pol je dvostruka točka cisoide.

U drugom dijelu rada ispitana je veza cisoidalnog i projektivnog izvođenja krivulja 3. reda. Svaka potpuno cirkularna troosnosimetrična krivu-

lja 3. reda proizvedena projektivitetom jednog od triju pramenova koncentričnih kružnica (C_i) i pridruženog mu pramena pravaca s vrhom u glavnoj točki (D_i) identična je krivulji dobivenoj cisoidalnim izvođenjem, čije su temeljne krivulje kružnica iz pramena (C_i), koja sadrži apsolutni pol L glavnog pravca l, te pravac iz pramena (D_i), koji je tangenta apsolute u trećem apsolutnom diralištu. Pol cisoidalnog izvođenja je u točki L.

Primljeno u II. razredu
18. 9. 1986.