

Originelle wissenschaftliche Arbeit

VLASTA SZIROVICZA, ANA SLIEPČEVIĆ

Angenommen 20. 11. 1999.

# Ein Analogon des Czuberschen Satzes in der isotropen Ebene

## Analogon Czuberovog teorema u izotropnoj ravnini

### SAŽETAK

U radu se dokazuje da Czuberov teorem u izotropnoj ravnini vrijedi samo za 2-cirkularne kubike te potpuno cirkularne kubike tipa tridens.

**Ključne riječi:** geometrija, izotropna ravnina, cirkularna kubika, Czuberov teorem

## The Analog of the Czuber's theorem in the isotropic plane

### ABSTRACT

The paper proves that in the isotropic plane Czuber's theorem is valid only for the cubics of the second degree of circularity and for the completely circular cubics of the type tridens.

**Key words:** geometry, isotropic plane, circular cubic, Czuber's theorem

**MSC 1991:** 51N25

**D**ie zirkulären Kurven in der isotropen Ebene sind diejenigen die den absoluten Punkt  $F$  enthalten. Nach dem Zirkularitätsgrad werden **die zirkulären Kurven 3. Ordnung in drei Typen** eingeteilt:

1. *erste Stufe des Zirkularitätsgrades.* Diese Kurve läuft durch den absoluten Punkt und hat diesen Punkt als einfachen Punkt;
2. *zweite Stufe des Zirkularitätsgrades.* Diese Kurve berührt die absolute Gerade im absoluten Punkt, oder hat den absoluten Punkt als Doppelpunkt;
3. *dritte Stufe des Zirkularitätsgrades.* Diese Kurve berührt und schneidet die absolute Gerade im absoluten Punkt und wird vollständig zirkuläre Kurve genannt. Diese Kurven teilen sich in drei Typen ein [5]:
  - a) **divergente Parabel.** Diese besitzt die absolute Gerade  $f$  als Wendetangente im absoluten Punkt  $F$ ,

- b) **kubische Parabel.** Diese besitzt die Spitze 1. Art im absoluten Punkt  $F$ , und die absolute Gerade  $f$  als die Tangente in dieser Spitze,
- c) **Tridens-kurve** (Dreizahn). Diese besitzt einen Knoten im  $F$ , wobei  $f$  die Tangente eines Zweiges im Knoten ist.

In der euklidischen Ebene gilt der **Czuber'sche Satz**:

*Jede zirkuläre Kurve 3. Ordnung kann durch die Projektivität zwischen einem konzentrischen Kreisbüschel und einem Geradenbüschel erzeugt werden. Der Zentrum des Kreisbüschels liegt in dem vierfachen Brennpunkt und der Scheitelpunkt des Geradenbüschels in dem Hauptpunkt der Kubik [3].*

Die Existenz dieses Satzes ist in der hyperbolischen Ebene in [4] bewiesen. Der Ziel dieser Arbeit ist die Existenz des Czuberschen Satzes in der isotropen Ebene nachzuprüfen. Um dies zu erreichen wird ein Analogon zum konzentrischen Kreisbüschel der euklidischen Ebene, bzw. ein Hyperoskulationskreisbüschel benutzt [10].

Ein Büschel der parabolischen isotropen Kreise vom Radius  $\frac{1}{2A}$  in der isotropen Ebene besitzt die Gleichung

$$\mathcal{F} \equiv x^2 - 2Ay + \tau = 0, \quad (1)$$

wobei  $\tau$  der Büschelsparameter ist. Durch zwei Geraden

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv y - \bar{y} = 0, \\ p_2 &\equiv x - \bar{x} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ist ein Geradenbüschel  $\mathcal{V}$  mit einem eigentlichen Grundpunkt  $V(\bar{x}, \bar{y})$  aufgespannt. Dieses besitzt die Darstellung

$$\mathcal{V} \equiv y - \bar{y} + \mu(x - \bar{x}) = 0, \quad (3)$$

bzw.

$$\mathcal{V} \equiv x - \bar{x} + \lambda(y - \bar{y}) = 0, \quad (4)$$

wobei  $\mu$  und  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  die Büschelsparameter sind.

Durch eine projektive Zuordnung zwischen einem Kreisbüschel und einem Geradenbüschel entsteht eine zirkuläre Kurve  $k^3$  3. Ordnung [8]. Je nach der Wahl der Geradenbüschelsparameter erhält man zwei Typen dieser Kurven.

**Typ 1:** Die Zuordnung zwischen den Büscheln (1) und (3) wird projektiv wenn z. B.  $\tau = \mu$  gilt. Somit folgt

$$(x^2 - 2Ay)(x - \bar{x}) - y + \bar{y} = 0,$$

bzw.

$$x^3 - 2Axy - \bar{x}x^2 + 2A\bar{x}y - y + \bar{y} = 0 \tag{5}$$

was offensichtlich eine **vollständig zirkuläre Kurve 3. Ordnung** darstellt. Mittels einer isotropen Bewegung kann sie die Form  $xy = x^3 + ax^2 + bx + c$  erreichen. Somit gehört sie der Klasse der Tridens-Kurven (Abb. 1).

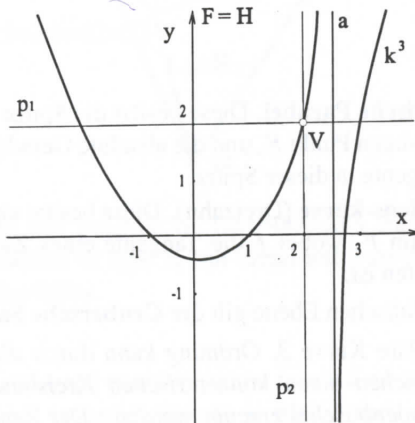


Abb. 1

Der vierfache Brennpunkt stimmt mit dem Zentrum  $F$  des Kreisbüschels überein. Der Hauptpunkt  $H$  der erzeugten Kubik, als der Schnittpunkt der Kubik mit ihren isotropen Asymptote  $a$ , ist im demselben Punkt  $F$  [4].

Spezielle Fälle entstehen dann, wenn der Scheitelpunkt  $V$  des gegebenen Geradenbüschels mit dem absoluten Punkt  $F(0 : 0 : 1)$  zusammenfällt, wodurch  $\mathcal{V}$  ein Büschel der isotropen Geraden dargestellt ist. Um die Gleichung eines solchen Geradenbüschels  $\mathcal{V}$  zu bestimmen, wählen wir die isotrope Geraden

$$p_1 \equiv x - \bar{x} = 0,$$

$$p_2 \equiv x = 0.$$

Dieses besitzt die Darstellung

$$\mathcal{V} \equiv x - \bar{x} + \eta x = 0 \tag{6}$$

mit  $\eta$  als Büschelsparameter.

Setzt man in (6) für den Büschelsparameter  $v = \frac{1}{\eta}$ , erhält man

$$\mathcal{V} \equiv x + v(x - \bar{x}) = 0. \tag{7}$$

Somit entstehen zwei Fälle:

**Fall (1,1):** Aus (1) und (6) für  $\eta = \tau$  folgt

$$x^3 - 2Axy - x + \bar{x} = 0, \tag{8}$$

als die Gleichung eines Tridens (Abb. 2.). Die isotrope Asymptote  $a$  dieser Kurve stimmt mit der  $y$ -Achse überein. Man sieht leicht, daß der isotrope Kreis  $x^2 - 2Ay = 0$  mit der Kubik (8) keinen eigentlichen gemeinsamen Punkt hat. Er wird so als **asymptotischer Kreis** der erzeugten Kurve bezeichnet. Der vierfache Brennpunkt, wie auch der Hauptpunkt der Kurve, fällt in den Punkt  $F=V$ .

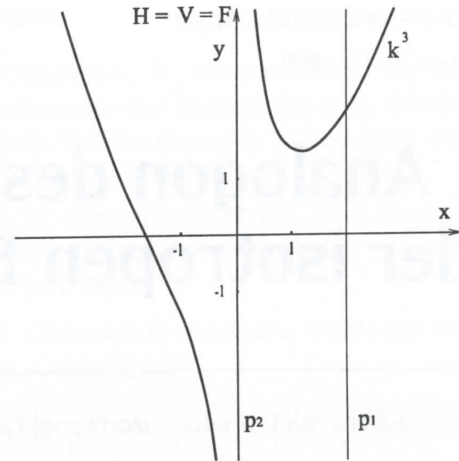


Abb. 2

**Fall (1,2):** Die Zuordnung zwischen (1) und (7) für  $v = \tau$  gibt

$$x^3 - 2Axy - x - \bar{x}x^2 + 2A\bar{x}y = 0, \tag{9}$$

was wieder die Gleichung eines Tridens mit ähnlichen Eigenschaften, wie im Fall (1,1), darstellt (Abb. 3.).

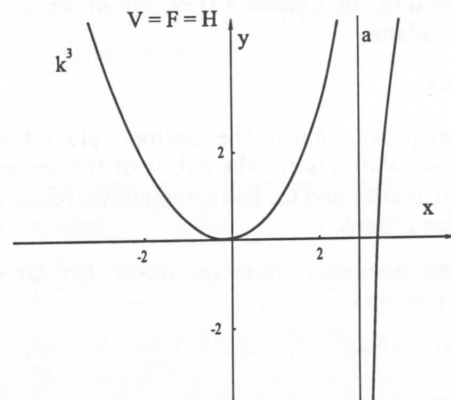


Abb. 3

Die **konstruktive Erzeugung** für die beiden Fälle führt man auf einem Modell, wo die uneigentliche Gerade  $f$  mit dem absoluten Punkt  $F \in f$  als eigentliche betrachtet werden, auf die folgende Weise durch (dabei sind die parabolische Kreise diejenige Kegelschnitte die zueinander hyperoskulieren im Punkt  $F$ ):

Die Tangenten aller isotropen Kreise des Hyperoskulationsbüschels  $\mathcal{F}$  mit den Berührungspunkten auf einer isotropen Geraden  $i$  bilden ein Geradenbüschel  $\mathcal{J}$  mit dem Scheitel  $I \in f$ . Alle Kreise des Büschels  $\mathcal{F}$  sind nämlich durch eine perspektive Kollineation verbunden, wobei  $f$  die Achse und  $F$  das Zentrum dieser Kollineation sind. Mittels der Projektivität zwischen den zwei Geradenbüscheln  $\mathcal{J}$  und  $\mathcal{V}$  ( $V = F$ ) wurde eine projektive Zuordnung zwischen den Geradenbüschel  $\mathcal{V}$  und den Kreisbüschel  $\mathcal{F}$  dargestellt, so daß dem Kreis  $k_1$  die Gerade  $p_1 = f$ , dem Kreis  $k_2$  die Gerade  $p_2 = i$  und dem entarteten Kreis  $k_3$  die isotrope Gerade  $p_3$  zugeordnet ist. Die konstruktive Lösung ist in Abb. 4. ersichtlich.



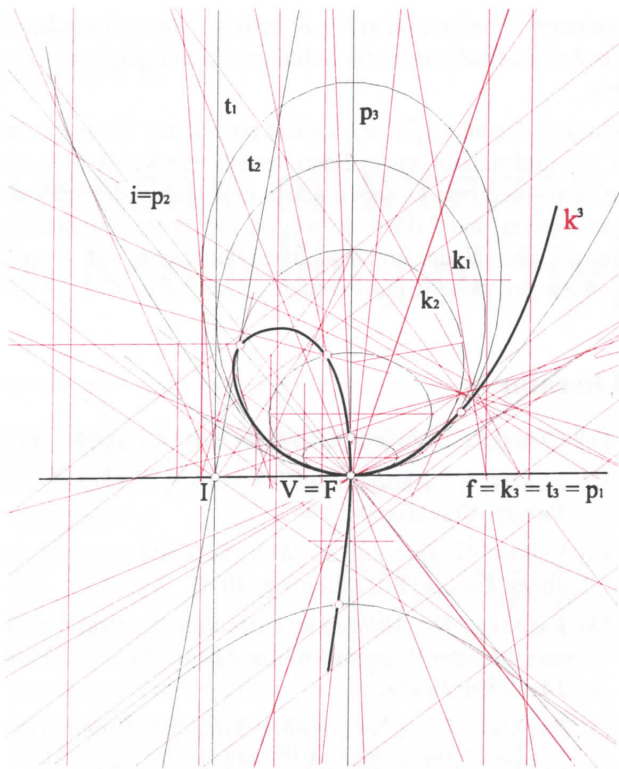


Abb. 4

**Typ 2:** Man nimmt für das Geradenbüschel  $\mathcal{V}$  die Gleichung (4). Die projektive Zuordnung zwischen dem Kreisbüschel (1) und dem Geradenbüschel (4) für  $\tau = \lambda$  gibt die Gleichung

$$(x^2 - 2Ay)(y - \bar{y}) - x + \bar{x} = 0,$$

bzw.

$$x^2y - \bar{y}x^2 - 2Ay^2 + 2A\bar{y}y - x + \bar{x} = 0, \tag{10}$$

was offensichtlich eine Kurve 3. Ordnung mit dem Zirkularitätsgrad 2 bedeutet. Diese Kurve berührt die absolute Gerade im Punkt  $F$  und schneidet sie in noch einem uneigentlichen Punkt  $M$  der, wegen (2), die Koordinaten  $(0 : 1 : 0)$  besitzt (Abb. 5.).

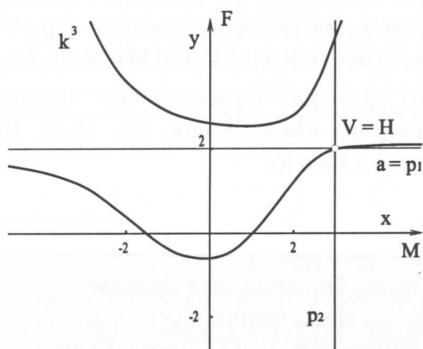


Abb. 5

Im allgemeinen wird die Kubik (10) vom Geschlecht 1. Man soll bemerken daß ihr Hauptpunkt in den Punkt  $V$  fällt.

Bei diesem Typ kann auch der Scheitelpunkt  $V$  ein uneigentliches Punkt sein. Einfachheit wegen kann der mit dem Punkt  $M$  übereinstimmen. Das Geradenbüschel wird dann durch zwei Geraden

$$g_1 \equiv y - \bar{y} = 0,$$

$$g_2 \equiv y = 0,$$

aufgespannt, sodaß zwei Fälle möglich sind. Seine Gleichung lautet

$$\mathcal{M} \equiv y - \bar{y} + \delta y = 0, \tag{11}$$

bzw.

$$\mathcal{M} \equiv y + \alpha(y - \bar{y}) = 0 \tag{12}$$

wobei  $\delta$  und  $\alpha = \frac{1}{\delta}$  die Büschelsparameter sind.

**Fall (2,1):** Die projektive Zuordnung zwischen den Büscheln (1) und (11) erzeugt die Kubik mit der Gleichung  $x^2y - 2Ay^2 - y + \bar{y} = 0$

$$\tag{13}$$

die vom Zirkularitätsgrad 2 ist (Abb. 6.).

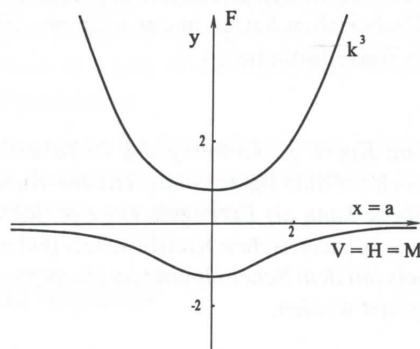


Abb. 6

**Fall (2,2):** Ist das Kreisbüschel (1) in der projektiven Zusammenhang mit den Geradenbüschel (12), entsteht wieder eine Kubik vom Zirkularitätsgrad 2 (Abb. 7.). Die Gleichung dieser Kubik besitzt die Form

$$x^2y - \bar{y}x^2 - 2Ay^2 + 2A\bar{y}y - y = 0. \tag{14}$$

In beiden Fällen sind die erzeugte Kurven vom Geschlecht 1. Sie besitzen denselben isotropen Schmiegunskreis mit der Gleichung  $x^2 - 2y - 1 = 0$ , der die Kubik im absoluten Punkt  $F$  berührt und mit ihr keinen weiteren gemeinsamen Punkt hat. Der uneigentliche Punkt  $V \equiv M$  ist der Wendepunkt wie auch der Hauptpunkt der Kubik [2].

Aus dargestellten Betrachtungen kann man schließen:

Durch die projektive Zuordnung zwischen einen Büschel konzentrischen isotropen Kreise und einen Geradenbüschel entsteht immer eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung vom Zirkularitätsgrad zwei oder drei, was nur von der gegebenen Projektivität und der Lage des Scheitelpunktes des Geradenbüschels abhängig ist. In den Punkt  $F$  fällt immer der vierfache Brennpunkt der Kubik. Im Fall die Kubik vom Zirkularitätsgrad zwei ist, fällt der Hauptpunkt immer in den Scheitelpunkt des Geradenbüschels. Für

die vollständig zirkuläre Kubik gilt dieses im allgemeinen nicht. Es gilt nur dann, wenn der Scheitelpunkt des Geradenbüschels mit dem absoluten Punkt  $F$  übereinstimmt.

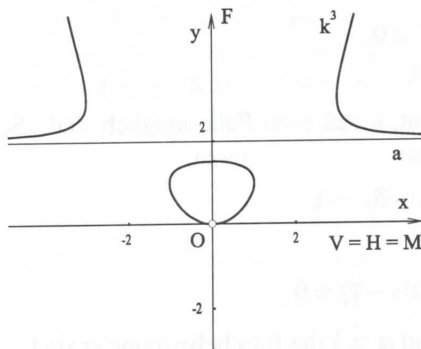


Abb. 7

*Bemerkung.* Die kubische Parabel wie auch die divergente Parabel wurden hier nicht betrachtet, da keine solche Kurve mittels Hyperoskulationskreisbüschels erzeugt werden kann [9].

Auf Grund der obigen Betrachtungen kann man einen Analogon des Czuberschen Satzes in der isotropen Ebene auf die folgende Weise formulieren.

#### Satz.

Jede zirkuläre Kurve 3. Ordnung des Zirkularitätsgrades zwei, wie auch vollständig zirkuläre Tridens-Kubik in der isotropen Ebene kann als Erzeugnis einer projektiven Zuordnung eines konzentrischen Kreisbüschels und eines Geradenbüschels mit dem Scheitelpunkt im Hauptpunkt dieser Kurve betrachtet werden.

*Beweis.* Sei eine zirkuläre Kurve 3. Ordnung des Zirkularitätsgrades zwei in der isotropen Ebene gegeben. Man nimmt den Scheitelpunkt  $V$  eines Geradenbüschels  $\mathcal{V}$  in ihrem Hauptpunkt  $H$ . Eine beliebige Gerade  $p_1$  durch den Punkt  $V$  schneidet die Kubik in noch zwei Punkten  $A$  und  $B$ . Dieses Punktepaar bestimmt ein Kreisbüschel  $\mathcal{K}$ . Jeder Kreis  $k_i$  aus  $\mathcal{K}$  schneidet die Kubik in zwei weiteren Punkten  $C_i$  und  $D_i$ . Im  $\mathcal{K}$  gibt es nur ein Kreis  $k_1$  bei dem die Schnittpunkte  $C_1$  und  $D_1$  mit dem Punkt  $F$  zusammenfallen. Dieser Kreis hat  $F$  als den viermalmal zählenden Schnittpunkt mit der Kubik.

Für jede beliebige Gerade  $p_j \in \mathcal{V}$  existiert ein solcher Kreis  $k_j \in \mathcal{K}$ , der  $F$  als viermalmal zählenden Schnittpunkt mit Kubik hat. Alle solche Kreise  $k_j$  hyperoskulieren zueinander im  $F$  und bilden deswegen ein Hyperoskulationskreisbüschel  $\mathcal{F}$ , der in projektiven Zuordnung mit  $\mathcal{V}$  steht und die gegebene Kubik erzeugt.

Sei jetzt eine vollständig zirkuläre Tridens-Kubik gegeben. Eine beliebige Gerade  $p_1 \in \mathcal{V}$ ,  $V = H = F$ , schneidet die Kubik, außer im Doppelpunkt  $F$ , in noch einem Punkt  $Q$ . Mit diesem Punkt ist ein Kreisbüschel  $\mathcal{K}$  der kongruenten isotropen Kreise eindeutig bestimmt [10]. Jeder Kreis  $k_i$  aus  $\mathcal{K}$  schneidet die Kubik in zwei weiteren Punkten  $C_i$  und  $D_i$ . In  $\mathcal{K}$  existiert nur ein Kreis  $k_1$  der mit der Kubik keinen

weiteren Schnittpunkt außer  $F$  besitzt. Dieser Kreis hat  $F$  als den fünfmal zählenden Schnittpunkt mit gegebener Kubik.

Für jede Gerade  $p_j \in \mathcal{V}$  existiert ein solcher Kreis  $k_j$ , der  $F$  als fünfmal zählenden Schnittpunkt mit Kubik hat. Alle solche Kreise  $k_j$  haben außer  $F$  keinen anderen Punkt gemeinsam und bilden deswegen ein Hyperoskulationskreisbüschel  $\mathcal{F}$  der in projektiven Zuordnung mit  $\mathcal{V}$  steht und die gegebene Kubik erzeugt.

#### Literatur

- [1] CESAREC, R.: *Analitička geometrija I*, Zagreb, 1957.
- [2] FLADT, K.: *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven*, Frankfurt/M, 1962.
- [3] LORIA, G.: *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven*, Bd. I, Leipzig, 1910.
- [4] PALMAN, D.: *Vollkommen zirkuläre Kurven 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene*, Glasnik MFA 14 (1959), 19–74.
- [5] PALMAN, D.: *Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene*, Rad JAZU 444 (1989), 222–251.
- [6] SACHS, H.: *Ebene isotrope Geometrie*, Braunschweig — Wiesbaden, 1987.
- [7] SACHS, H.: *Vollständig zirkuläre Kurven n-ter Ordnung der isotropen Ebene*, Studia Sci. Math. Hungarica 24 (1989), 377–383.
- [8] SAVELOV, A. A.: *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- [9] SLIEPČEVIĆ, A.; SZIROVICZA, V.: *Die projektive Erzeugung der vollständig zirkulären Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene*, (im Druck).
- [10] SZIROVICZA, V.; SLIEPČEVIĆ, A.: *Eine Erzeugung der vollständig zirkulären Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene*, (im Druck).
- [11] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V.: *Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, I Teil*, Rad JAZU 450 (1990), 41–51.
- [12] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V.; SACHS H.: *Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene, II*, Rad HAZU 472 (1997), 27–53.
- [13] TÖLKE, J.: *Zur Geometrie der Tridens-Kurven der isotropen Ebene*, Studia Sci. Math. Hungarica 33 (1997), 433–440.

Vlasta Szivovicza, Ana Sliepčević  
 Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu  
 Kačićeva 26, 10 000 Zagreb, Croatia  
 e-mail: szvlasta@juraj.gradnz.grad.hr  
 e-mail: anasli@juraj.gradnz.grad.hr