KLASSIFIKATIONSTHEORIE DER KEGELSCHNITTBÜSCHEL VOM TYP IV DER ISOTROPEN EBENE, II

Vlasta Ščurić-Čudovan, Hans Sachs

Abstract. A real affine plane A_2 is called an *isotropic plane* I_2, if in A_2 a metric is induced by anabsolute $\{f, F\}$, consisting of the line at infinity f of A_2 and a point $F \in f$. According to K. Strubecker on I_2 exists a 3-parameter group B_3 of isotropic motions. In this paper we continue one complete classification of pencils of conics with two real and different fundamental points and one double fundamental point. With respect to the group B_3 we construct normal forms for the 13 remaining main-types and we study some subtypes. Finally we give an interpretation of all geometrical invariants, using the curve of midpoints and the curve of focal points of the pencil.

Einleitung

Diese Abhandlung iste eine direkte Fortsetzung unserer gleichnamigen Abhandlung [10], so daß wir die Numerierung der Formeln, Abschnitte, Sätze usw. in konsequenten Weise fortsetzen. Die i.f. verwendeten Begriffsbildungen aus der isotropen Geometrie können in [6] bzw. [10] nachgelesen werden.

Ein Kegelschnittbüschel –i.f. kurz als *KS*–Büschel bezeichnet- ist vom Typ IV, wenn es durch einen doppelt zählenden, reellen und zwei einfache reelle Büschelgrundpunkte bestimmt ist. Im I Teil dieser Arbeit haben wir die Untertypen IV_1 und IV_2 betrachtet.

Bei dem Untertyp IV_1, sind alle Büschelgrundpunkte eigentlich und keine Verbindungsgerade dieser Punkte ist eine isotrope Gerade. Dieser Typ enthält insgesamt 9 Büschelarten und Büschelfälle, die durch weitere Indizesziffern bzw. Indizesbuchstaben gekennzeichnet würden. Bei dem Untertyp IV_2 ist genau eine der Verbindungsgeraden der eigentlichen Grundpunkte eine isotrope Gerade. Der Untertyp IV_2 enthält insgesamt 7 Büschelarten und Büschelfälle.

In dieser Abhandlung werden die verbleibenden 13 Büscheluntertypen betrachtet und geometrisch gekennzeichnet.

Bei dem Untertyp IV_3 ist ein Geradenpaar, d.h die zwei Verbindungsgeraden der als eigentlich vorausgesetzten Grundpunkte isotrop.

Untertyp IV_4: Keiner der beiden uneigentlichen Grundpunkte fällt mit dem absoluten Punkt F zusammen. Die Verbindungsgerade der beiden eigentlichen Grundpunkte ist nicht isotrop.

Untertyp IV_5: Keiner der beiden uneigentlichen Grundpunkte fällt mit dem absoluten Punkt F zusammen; die Verbindungsgerade der beiden eigentlichen Grundpunkte ist isotrop.

Untertyp IV_6: Genau einer der beiden uneigentlichen einfachen Grundpunkte fällt mit dem absoluten Punkt F zusammen.

Untertyp IV_7: Genau einer der einfachen Grundpunkte ist uneigentlich und vom absoluten Punkt F verschieden.

Untertyp IV_8: Genau einer der einfachen Grundpunkte ist uneigentlich und fällt mit dem absolutem Punkt F zusammen.

Untertyp IV_9: Der doppelt zählende Grundpunkt ist uneigentlich und fällt mit dem absoluten Punkt F zusammen. Die gemeinsame Tangente t aller KS–e ist eine eigentliche isotrope Gerade.

Untertyp IV_{10}: Der doppelt zählende Grundpunkt und einer der einfachen Grundpunkte sind uneigentlich; keiner dieser Punkte stimmt mit dem absoluten Punkt F überen. Die gemeinsame Tangente t ist eine eigentliche Gerade.

Untertyp IV_{11}: Der doppelt zählende Grundpunkt ist uneigentlich, die gemeinsame Tangente t ist eigentlich. Einer der einfachen Grundpunkte fällt mit dem Punkte F zusammen.

Untertyp IV_{12}: Der doppelt zählende Grundpunkt fällt mit dem absoluten Punkt F zusammen, die gemeinsame Tangente t aller KS–e in diesem Punkt ist eigentlich. Einer der einfachen Grundpunkte ist uneigentlich.

Untertyp IV_{13}: Der doppelt zählende Grundpunkt is uneigentlich und vom Punkt F verschieden. Die Tangente t fällt in die absolute Gerade f.

Untertyp IV_{14}: Die Verbindungsgerade der beiden eigentlichen Grundpunkte des Untertyps IV_{13} ist eine isotrope Gerade.

Untertyp IV_{15}: Der doppelt zählende Grundpunkt fällt in den absoluten Punkt F und die gemeinsame Tangente t in die absolute Gerade f.

Die einfachen reellen Grundpunkte werden i. f. mit A und B, der doppelt zählende Grundpunkt $C=D$ mit C bezeichnet. Bei beiden Geradenpaaren (g, t) und (g_1, g_2) werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$$g := AB, \quad t := CK \ (K = t \cap g); \quad g_1 := CA, \quad g_2 := CB$$

Die Gerade t wird die gemeinsame Tangente aller Büschelkegelschnitte sein.

§ 5. DER BÜSCHELUNTERTYP IV_3

Dieser Untertyp liegt vor, wenn die Tangente t im doppelt zählenden eigentlichen Punkt C isotrop ist und die eigentlichen Grundpunkte A und B parallel sind. Durch eine isotrope Schiebung kann man erreichen, daß C in den Koordinatenursprung $U(0,0)$, fällt, und durch eine weitere isotrope Bewegung kann man erzwingen, daß der Grundpunkt B in die x–Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems fällt. Dann gilt $A(a_1,a_2)$, $B(a_1,0)$, $C(0,0)$ mit $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, und die Geraden t und g, g_1 und g_2 besitzen die Gleichungen:

$$t \dots x = 0; \quad g \dots x = a_1; \quad g_1 \dots y = \frac{a_2}{a_1} x; \quad g_2 \dots y = 0.$$

Wird noch der Winkel $\varphi: = \sphericalangle (CA, CB) = a_2 : a_1$ eingeführt, dann lautet die Normalform dieses Büscheluntertyps

$$\mathcal{F} \equiv y^2 - \varphi xy + vx (x - a_1) = 0 \tag{5.1}$$

wobei die Koeffizienten φ und a_1 geometrische Größen sind und v den Büschelparameter bezeichnet. Wegen

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 2y - \varphi x, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = -\varphi y + v(2x - a_1) \text{ und } \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0$$

zerfällt die *Mittelpunktskurve* m^2 in die beiden Geraden

$$(2y - \varphi x)(2x - a_1) = 0. \tag{5.2}$$

Die Gerade $y = 0{,}5\ \varphi x$ halbiert den isotropen Winkel der Geraden g_2 und g_1 und stellt die Menge der Mittelpunkte aller *KS*–e samt den Geradenpaaren (g_1, g_2), (g, t) dar, während die Gerade $2x = a_1$ durch die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ bestimmt ist und somit die Mittelpunkte dieses Geradenpaares darstellt.

Die *Brennpunktskurve* k_r^3, die mittels $\mathcal{F}=0$ und $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}=0$ bestimmt wird, artet in die drei Geraden

$$(2y - \varphi x)(x - a_1)x = 0 \tag{5.3}$$

aus. Die Gerade $y = 0{,}5\ \varphi x$ stellt außer der Menge der KS–Mittelpunkte auch die Menge der isotropen KS–Brennpunkte dar, während die Geraden $x = 0$ und $x - a_1 = 0$ von den Brennpunkten des Geradenpaares (t, g) gebildet werden.

Dieses KS–Büschel gehört nur dem Fall *a)* (vgl. [9], 45, [10]). Es enthält für $v < 0.25\varphi^2$ durchwegs Hyperbeln 1. Art, während sich für $v > 0.25\varphi^2$ Ellipsen einstellen. $v = 0.25\varphi^2$ liefert die einzige reguläre Büschelparabel. Wir vermerken den

SATZ 25. *Ein KS–Büschel der isotropen Ebene vom Untertyp IV_3 ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten $\{\varphi, a_1\}$ vollständig bestimmt. Die Mittelpunkte und die isotropen Brennpunkte aller KS–e dieses Büschels liegen auf jener Geraden durch den Doppelgrundpunkt des Büschels, die den Winkel der beiden Büschelgeraden durch diesen Doppelgrundpunkt halbieren.*

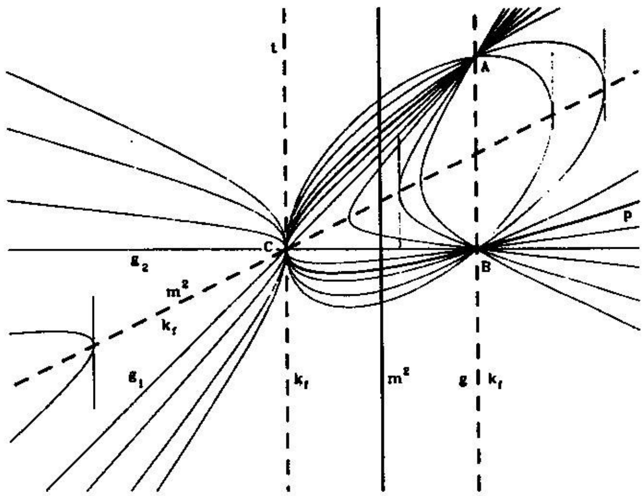

Abb. 14.

§ 6. DER BÜSCHELUNTERTYP IV_4

Zwei reelle Grundpunkte eines mit dem Index 4 bezeichnetes Untertyps sind *uneigentlich* und verschieden vom Punkt F, und *keine* eigentliche Verbindungsgerade der Grundpunkte ist *isotrop*.

DIE BÜSCHELART $IV_{4,1}$

Unterarten $IV_{4,1,1}$, $IV_{4,1,2^*}$, $IV_{4,1,2^*s}$

Sei (C, t) ein *eigentliches, nicht isotropes* Linienelement, die *uneigentlichen* einfachen Grundpunkte seien A und B. Durch eine *isotrope Bewegung* kann man den Punkt C in den Ursprung $U(0, 0)$ und die Tangente t in die x–Achse des zugrunde gelegten Koordinatensystems legen. Die Punkte A und B erhälten dann die projektiven Koordinaten $A(0{:}a_1{:}a_2)$, $B(0{:}b_1{:}b_2)$. Die Gleichungen der Geraden g_1, g_2, g, und t lauten in *projektiven* Koordinaten

$$g_1 \ldots a_1x_2 - a_2x_1 = 0; \quad g_2 \ldots b_1x_2 - b_2x_1 = 0;$$

$$t \ldots x_2 = 0; \; g \ldots x_0 = 0, \text{ mit } a_1 \neq 0,\; a_2 \neq 0,\; b_1 \neq 0,\; b_2 \neq 0.$$

Als *Normalform* eines Büschels der Büschelart $IV_{4,1}$ erhält man somit in *projektiven Koordinaten*

$$\mathcal{F} \equiv a_2b_2x_1^2 - a_1b_2x_1x_2 - a_2b_1x_1x_2 + a_1b_1x_2^2 + \eta x_2x_0 = 0 \tag{5.4}$$

mit η als Büschelparameter bzw. in *affinen Koordinaten* mit dem neuen Büschelparameter

$$\frac{\eta}{a_1 b_1} =: \nu \text{ und } \varphi_1 = a_2 : a_1; \ \varphi_2 = b_2 : b_1; \ \varphi_1 + \varphi_2 \neq 0$$

$$\mathscr{F} \equiv \varphi_1\varphi_2 x^2 - (\varphi_1 + \varphi_2)\, xy + y^2 + \nu y = 0. \tag{5.5}$$

Die *KS*–e dieses Büschels sind jene *homothetischen Hyperbeln*, deren Asymptoten die Richtung A bzw. B haben.

Die *Mittelpunktskurve* m^2

$$x_0[(\varphi_1 + \varphi_2)\, x_2 - 2\varphi_1\varphi_2 x_1] = 0 \tag{5.6}$$

zerfällt in die absolute Gerade $g = f$ und in die Gerade

$$y = \frac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}\, x.$$

Die *isotrope Brennpunktskurve* k_f^3

$$x_0\,(x_2 \pm \sqrt{\varphi_1\varphi_2}\, x_1) = 0 \tag{5.7}$$

zerfällt in die absolute Gerade $g = f$ $(x_0 = 0)$, die die Brennpunkte von $(g, t) = 0$ trägt und in die beiden Geraden

$$y \pm \sqrt{\varphi_1\varphi_2}\, x = 0.$$

Für $sgn\varphi_1 = sgn\varphi_2$ sind diese Geraden reell und die Hyperbeln des Büschels sind vom 1. *Art.* Ein solches Büschel werde als Büschelunterart $\mathrm{IV}_{4,1,1}$ bezeichnet.

Gilt hingegen $sgn\ \varphi_1 \neq sgn\ \varphi_2$, dann sind diese Geraden konjugiert–komplex; sie schneiden sich im reellen Punkt C. Die Hyperbeln dieses Büschels sind von 2. Art und das Büschel werde mit $\mathrm{IV}_{4,1,2}$ bezeichnet.

SATZ 26. *Ein KS–Büschel der Art* $\mathrm{IV}_{4,1}$ *ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, *unter der Bedingung* $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 0$ *eindeutig bestimmt. Es wird von durchwegs h o m o t h e t i s c h e n Hyperbeln 1. bzw. 2. Art gebildet. Die Mittelpunktskurve dieser Hyperbeln zerfällt in eine den Punkt C enthältende Gerade und in die absolute Gerade* $f = g := AB$.

Sind die Vorzeichen der Winkel $\sphericalangle(AC, t)$ *und* $\sphericalangle(BC, t)$ *gleich, dann zerfällt die Brennpunkskurve in die Ferngerade und in zwei reelle eigentliche, symmetrisch zur Tangente t gelegene und den Punkt C enthältende Geraden. Die Hyperbeln dieses Büschels* $IV_{4,1,1}$ *sind stets von 1. Art.*

Sind die Vorzeichen obiger Winkel verschieden, dann zerfällt die Kurve k_f^3 in die Ferngerade und in ein Paar konjgiert-komplexer sich im reellen Punkt C schneidender Geraden. Die Hyperbeln dieses Büschels der Unterart $IV_{4,1,2^*}$ sind stets von 2. Art. Der reelle Punkt C ist ein Brennpunkt der singulären Hyperbel (g_1, g_2).

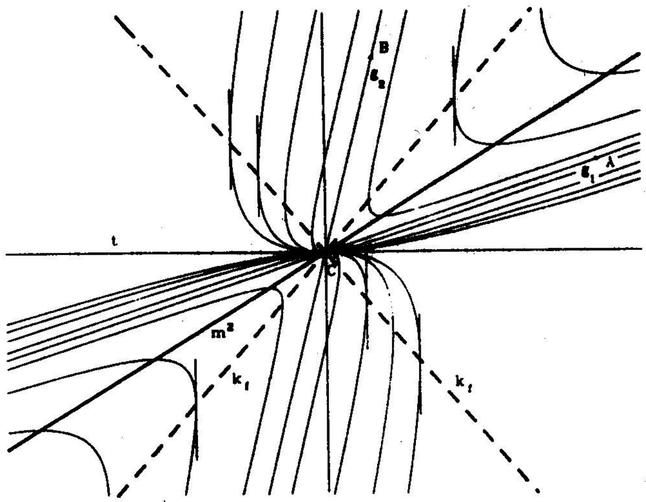

Abb. 15 stellt das Büschel $\mathrm{IV}_{4,1,1}$ dar.

Für $\varphi_1 = -\varphi_2 := \varphi$ liegt eine weitere Unterart $\mathrm{IV}_{4,1,2^*}$, mit der *Normalform*

$$\mathcal{F} \equiv -\varphi^2 x^2 + y^2 + v\,y = 0 \tag{5.8}$$

vor. Dieses Büschel ist bis auf *isotrope Bewegungen* durch eine einzige Invariante φ eindeutig bestimmt. Das Büschel besteht aus *homothetischen* Hyperbeln 2. Art, deren Mittelpunkte auf der isotropen Geraden durch C liegen. Die Richtungen zu den Ferngrundpunkten schließen mit t engegengesetzt gleiche Winkel ein, welche durch die Invariante φ gemessen werden.

DIE BÜSCHELART $\mathrm{IV}_{4,2}$

Es sei (C, t) ein *Linienelement* mit *uneigentlichem* Punkt $C \neq F$ und der Tangente $t \neq f$. Die Grundpunkte A und B seien *eigentlich*. Durch eine *isotrope Bewegung* kann man erreichen, daß die Tangente t in die x-Achse des Koordinatensystems fällt. Der *uneigentliche* Punkt C besitzt dann die Koordinaten $C(0{:}1{:}0)$. Durch eine Schiebung kann man noch erreichen, daß die Gerade $g := AB$ den Koordinatenursprung enthält. Die Punkte A und B werden dann durch $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ erfaßt, wobei $a_2 : a_1 = b_2 : b_1 =: \varphi$ gilt. Die Geraden g_1, g_2, g, und t haben somit die Darstellungen

$$g_1 \dots y - a_2 = 0 \; ; g_2 \dots y - b_2 = 0 \; ; g \dots y - \varphi x = 0 \; ; t \dots y = 0,$$

mit $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$

und als Normalform des Büschels erhält man

$$\mathscr{F} \equiv y^2 - (a_2 + b_2)y + a_2b_2 + v(y^2 - \varphi xy) = 0. \tag{5.9}$$

In diesem *Hyperbel-Parabel-Büschel* entarten die Parabeln zu dem zweifachen Geradenpaar (g_1, g_2). Die Gerade t ist die gemeinsame Asymptote aller Hyperbeln (vgl. [3, 393]).

Die Mittelpunktskurve m^2

$$y[2y - (a_2 + b_2)] = 0 \tag{5.10}$$

entartet in die Tangente $t(y = 0)$, auf der die Mittelpunkte aller *KS*–e des Büschels liegen und in die Mittellinie

$$y = 0.5(a_2 + b_2)$$

des Geradenpaares (g_1,g_2).

Die *Brennpunktskurve* k_f^3

$$\varphi xy^2 - (a_2+b_2)y^2 + a_2b_2(2y - \varphi x) = 0 \tag{5.11}$$

besitzt zwei parallele Asymptoten mit der Richtung $C(0:1:0)$; sie enthält den absoluten Punkt F und besitzt in C einen Doppelpunkt.

Die spezielle Hyperbel

$$h_s \dots \varphi xy - (a_2+b_2)y + a_2b_2 = 0$$

gewinnt man für $v = -1$. Sie trennt die Hyperbeln 1. Art von den Hyperbeln 2. Art, besitzt den Mittelpunkt $M_{h_s}(a_1+b_1,0)$ und hat die Asymptoten $y = 0$, $x = a_1 + b_1$.

SATZ 27. *Ein KS-Büschel der Art* $\mathrm{IV}_{4,2}$ *ist bis auf isotrope Bewegungen durch genau drei Invarianten* $\{a_2, b_2, \varphi\}$ *eindeutig bestimmt. Die KS–e dieses Hyperbel-Parabel-Büschels sind Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art, die von einer speziellen Hyperbel getrennt werden. Das Büschel enthält als ausgeartete Parabeln das doppelte Geradenpaar* (g_1, g_2). *Alle Hyperbeln haben eine gemeinsame Asymptote t, auf der ihre Mittelpunkte liegen, während die Mittelpunkte von* (g_1, g_2) *auf ihrer Symetrale liegen. Die Brennpunktskurve* k_f^3 3. *Ordnung ist irreduzibel. Sie schneidet die absolute Gerade f im absoluten Punkt F und berührt sie im Punkt C.*

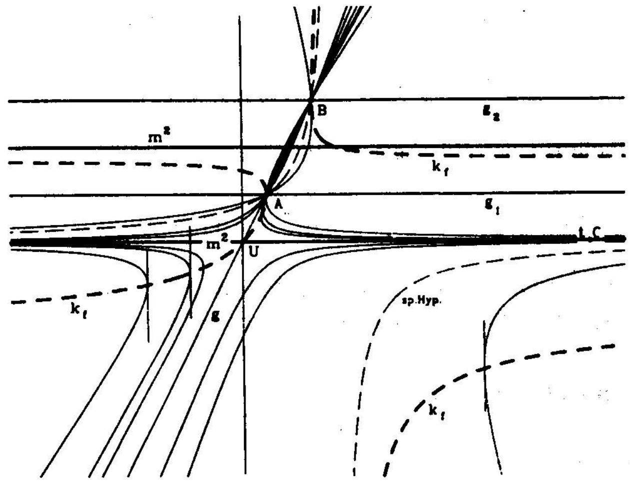

Abb. 16.

DIE BÜSCHELUNTERART$_{4,2k}$.

Liegen bei der Büschelart $IV_{4,2}$ die *eigentlichen* Punkte A und B symmetrisch bezüglich des Schnittpunktes P der Geraden g und t, dann haben wir die Unterart $IV_{4,2k}$ erhalten. Nach einer *isotropen* Bewegung gilt, $a_2{:}a_1 = b_2{:}b_1 = \varphi$ wie bei Art $IV_{4,2}$, aber weiters noch $b_1 = -a_1$ und $b_2 = -a_2$. Der Schnittpunkt P liegt dann im Ursprung $U(0, 0)$ des Koordinatensystems.

Die *Normalform* dieses *KS*–Büschels lautet daher

$$\mathscr{F} \equiv y^2 - a_2^2 + \nu(y^2 - \varphi xy) = 0. \tag{5.12}$$

Die *Mittelpunktskurve* besteht aus der Mittellinie $y^2 = 0$ des zweifachen Geradenpaares (g_1, g_2).

Alle Hyperbeln dieses Büschels haben den *gemeinsamen* Mittelpunkt im Punkt $P = U\ (0, 0)$ und eine gemeinsame Asymptote t mit der Gleichung $y = 0$.

Die *Brennpunktskurve*

$$k_f^3 \ldots \varphi xy^2 + a_2^2(\varphi x - 2y) = 0 \tag{5.13}$$

ist irreduzibel mit einem Fernpunkt im absoluten Punkt F und einem *isolierten* Fernpunkt in C (0;1:0).

Die spezielle Hyperbel des Büschels gewinnt man für $\nu = -1$. Ihre Gleichung lautet $xy - a_1a_2 = 0$.

SATZ 28. *Es seien bei der Büschelart* $IV_{4,2}$ *die eigentlichen Grundpunkte A und B symmetrisch zum Schnittpunkt P der Geraden $g := AB$ mit der gemeinsamen Tangente* *t. Dann wird hierdurch ein Büschel* $IV_{4,2k}$ von *konzentrischen Hyperbeln mit gemeinsamer Asymptote t erzeugt. Der gemeinsame Mittelpunkt aller Hyperbeln liegt im Punkt P. Die Hyperbeln sind von* 1. *und* 2. *Art und werden durch eine spezielle Hyperbel getrennt. Das Geradenpaar (g, t) gehört den singulären Hyperbeln an; das zweifach zu zählende Geradenpaar* (g_1,g_2) *mit* $g_1 := AC$, $g_2 := BC$ *stellt die ausgearteten Büschelparabeln dar. Die Mittelpunkskurve* m^2 *besteht aus der Doppelgeraden t, die als Mittellinie des Geradenpaares* (g_1, g_2) *fungiert. Die irreduzible Brennpunktskurve* k_f^3 *besitzt im singulären uneigentlichen Punkt* $C \in f$ *einen isolierten Punkt, der ein Brennpunkt von* (g_1,g_2) ist (vgl. [3, 403]).

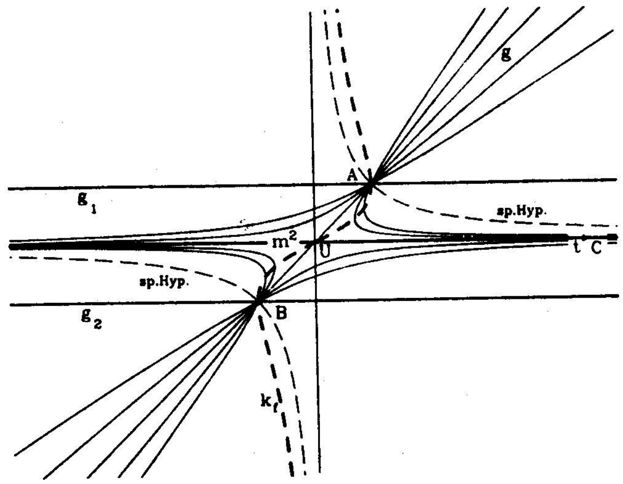

Abb. 17.

§ 7. DER BÜSCHELUNTERTYP IV_5

Bei dem Untertyp IV_5 sind genau zwei Büschelgrundpunkte *uneigentlich* und verschieden vom Punkt F, während genau eine *eigentliche* Verbindungsgerade der Grundpunkte *isotrop* ist.

DIE BÜSCHELART $IV_{5,1}$

Es sei (C, t) ein *eigentliches isotropes* Linienelement, die Punkte A und B seien *uneigentlich*. Durch eine *isotrope* Bewegung wird der Punkt C in den Ursprung $U(0, 0)$ und die Tangente t in die y-Achse des Koordinatensystems gelegt. Weiters ist es möglich den *uneigentlichen* Punkt A als Fernpunkt der x-Achse zu wählen, so daß er die *projektiven* Koordinaten $A(0{:}1{:}0)$ annimt, während der *uneigentliche* Punkt B durch $B(0{:}b_1{:}b_2)$ mit $b_2 \neq 0$ beschrieben wird.

Die Gleichungen der Verbindungsgeraden der Büschelgrundpunkte in *projektiven* Koordinaten lauten dann:

$g_1 \ldots x_2 = 0;\ g_2 \ldots b_1 x_2 - b_2 x_1 = 0;\ t \ldots x_1 = 0;\ g \ldots x_0 = 0;\ \varphi = b_2 : b_1$.

Als *Normalform* des Büschels in *projektiven* Koordinaten ergibt sich

$$\mathcal{F} \equiv x_2(b_1 x_2 - b_2 x_1 \varphi + \nu x_0 x_1 = 0 \tag{7.1}$$

In *affinen* Koordinaten stellt sich

$$\mathcal{F} \equiv b_1 y^2 - b_2 xy + \nu x = 0 \text{ bzw.}$$

$$\mathcal{F} \equiv y^2 - \varphi xy + \mu x = 0 \quad \text{mit } \mu = \frac{\nu}{b_1} \text{ ein.} \tag{7.2}$$

Alle *KS*-e dieses Büschels erzeugen auf der Ferngeraden f eine *identische Involution* und $\mathcal{F}$ stellt ein *homothetisches Hyperbelbüschel* dar. Alle diese Hyperbeln sind von 1. Art, da t ihre gemeinsame isotrope Tangente ist.

Die *Mittelpunktskurve* m^2

$$(2x_2 - \varphi x_1)x_0 = 0 \tag{7.3}$$

zerfällt in die Gerade $y - 0.5\varphi x = 0$, als Menge der Mittelpunkte aller *KS*-e und in die absolute Gerade $f = g$ $(x_0 = 0)$, die dem Geradenpaar (g, t) angehört.

Die *Brennpunktskurve* f_f^3

$$x_0 x_1(2x_2 - \varphi x_1) = 0 \tag{7.4}$$

zerfällt in die *gemeinsame isotrope Tangente* $t \ldots x_1 = 0$, in die Ferngerade $f = g$, die als Brennpunktsmenge dem Geradenpaar (t, g) angehören, sowie in die Gerade $y - 0.5\varphi x = 0$ als Menge der Brennpunkte aller übrigen *KS*-e.

SATZ 27. *Ein KS–Büschel der isotropen Ebene der Art $IV_{5,1}$ ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante $\{\varphi\}$ eindeutig bestimmt. Diese Invariante ist gleich dem Winkel $\measuredangle$ (g_1, g_2), $g_1 := AC$, $g_2 := BC$. Das Büschel wird von jenen homothetischen Hyperbeln 1. Art erzeugt, die ihre Mittelpunkte und Brennpukte auf einer Geraden r durch den Punkt C besitzen, wobei für den isotropen Winkel $\measuredangle$ $(r, g) = 0.5$ φ gilt.*

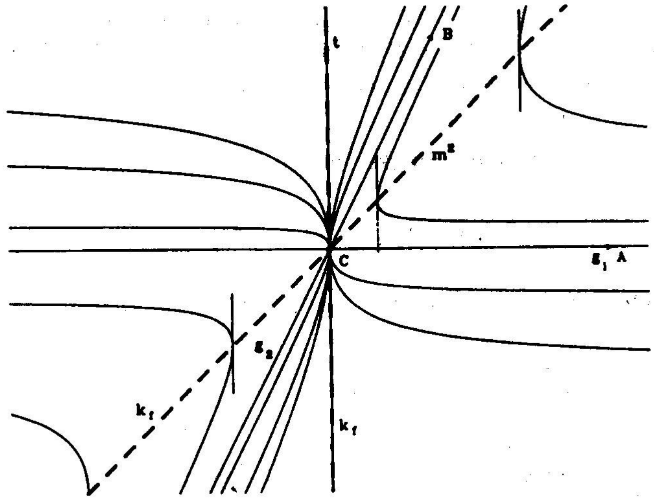

Abb. 18.

DIE BÜSCHELUNTERART $IV_{5,1s}$

In der Art $IV_{5,1}$ seien nun die Geraden $g_1{:=}AC$ und $g_2{:=}BC$ symmetrisch zur Geraden t... $(x = 0)$. Die Punkte A und B erhalten dann die *projektiven* Koordinaten $A(0{:}a_1{:}a_2)$, $B(0{:}b_1{:}b_2)$, so daß $(a_2 : a_1) = -(b_2 : b_1) =: \varphi$ gilt. Die *Normalform* des *KS*–Büschels dieser Unterart $IV_{5,1s}$ lautet

$$\mathscr{F} \equiv y^2 - \varphi^2 x^2 + vx = 0. \tag{7.5}$$

SATZ 28. *Werden in der Büschelart* $IV_{5,1}$ *die Geraden* $g_1{:=}AC$ *und* $g_2{:=}BC$ *symmetrisch zur gemeinsamen isotropen Tangente t gewählt, dann bilden die Büschelkegelschnitte, die stets Hyperbeln 1. Art sind, ein homothetisches Hyperbelbüschel der Unterart* $IV_{5,1s}$. *Die zweite Symmetrieachse* $y = 0$ *des Geradenpaares* (g_1, g_2) *trägt die Mittelpunkte und die isotropen Brennpunkte dieser Hyperbeln; sie ist außerdem eine gemeinsame reelle Symmetrieachse aller Hyperbeln des Büschels.*

DIE BÜSCHELART $IV_{5,2}$

Unterarten $IV_{5,2e}$, $IV_{5,2konz}$

Es sei C ein *uneigentlicher* Punkt und die gemeinsame Tangente t aller Büschelkegelschnitte durch C sei von der absoluten Geraden f verschieden. Die *eigentlichen* Punkte A und B seien parallel, d.h. die Gerade $g := AB$ ist eine *isotrope* Gerade. Durch eine *isotrope* Bewegung kann die Tangente t parallel zur x–Achse des Koordinatensystems gewählt werden, so daß der Punkt C die projektiven Koordinaten $C(0{:}1{:}0)$ erhält. Durch eine *isotrope* Schiebung kann man noch erreichen, daß

t durch $y = 0$ beschrieben wird und durch eine *nichtisotrope* Schiebung kann erreicht werden, daß die Gerade $g := AB$ in die y–Achse des Koordinatensystems fällt. Dann erhälten die Punkte A und B die Koordinaten $A(0, a_2)$, $B(0, b_2)$ mit $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.

Die Geraden durch diese Punkte haben die Gleichungen

$$g_1 \ldots y - a_2 = 0;\ g_2 \ldots y - b_2 = 0;\ t \ldots y = 0;\ g \ldots x = 0$$

und die Normalform dieses Büschels wird durch

$$\mathscr{F} \equiv y^2 - (a_2+b_2)y + a_2b_2 + vxy = 0 \tag{7.6}$$

festgelegt.

Die regulären *KS*-e dieses Büschels sind Hyperbeln mit einer gemeinsamen Asymptote t durch C, längs welcher die *Mittelpunkte* dieser Hyperbeln liegen. Die *Mittelpunktskurve* m^2 zerfällt in

$$y[2y - (a_2+b_2)] = 0. \tag{7.7}$$

Die Gerade $y = 0.5(a_2+b_2)$ ist die Mittellinie des Geradenpaares (g_1, g_2), das als doppelt zählendes Geradenpaar and die Stelle der beiden Büschelparabeln tritt.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 zerfällt in

$$x(y-\sqrt{a_2b_2})(y+\sqrt{a_2b_2}) = 0, \tag{7.8}$$

d.h. in die Gerade $x = 0$ des Geradenpaares (g, t), das als spezielle singuläre Hyperbel bertachtet werden kann und in das Geradenpaar

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{a_2b_2}.$$

Gilt $sgn\, a_2 = sgn\, b_2$, dann sind diese beiden Geraden reell und die Büschelkegelschnitte sind durchwegs Hyperbeln 1. Art; dieses Büschel werde mit $\mathrm{IV}_{5,2}$ bezeichnet.

Gilt $sgn\, a_2 \neq sgn\, b_2$, dann sind diese beiden Geraden konjugiertkomplex und die Büschelkegelschnitte können nur Hyperbeln 2. Art sein; ein solches Büschel werde mit $\mathrm{IV}_{5,2^*}$ bezeichnet. Obige Geraden schneiden sich dann im reellen Punkt C, der ein isolierter Punkt von k_f^3 ist und als Brennpunkt von (g_1, g_2) aufgefaßt werden kann.

SATZ 29. *Ein KS–Büschel der Art* $\mathrm{IV}_{5,2}$ *ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{a_2, b_2\}$ *eindeutig bestimmt. Diese Invarianten sind die isotropen Abstände der eigentlichen parallelen Büschelgrundpunkte A und B von der gemeinsamen Tangente und*

Asymptote t aller regulären Büschelkegelschnitte. Diese sind im Fall sgn a_2 = sgn b_2 *Hyperbeln* 1. *Art, die die Mittelpunkte längs der Geraden t besitzen und ein Hyperbelbüschel* $\mathrm{IV}_{5,2}$ *bilden. Die isotropen Brennpunkte liegen auf zwei reellen Geraden durch den uneigentlichen Punkt C.*

Im Fall sgn $a_2 \neq$ *sgn* b_2 *sind die Büschelkegelschnitte Hyperbeln 2. Art, deren Brennpunkte auf zwei konjugiertkomplexen Geraden liegen, die sich im uneigentlichen reellen Grundpunkt C schneiden. Dieser Punkt ist ein isolierter Punkt von* k_f^3. *Ein solches Büschel werde mit* $\mathrm{IV}_{5,2^*}$ *bezeichnet.*

SATZ 30. *Werden die parallelen Punkte A und B des Büschels* $\mathrm{IV}_{5,2^*}$ *symmetrisch zu t gewählt, dann liegt ein* k o n z e n t r i s c h e s *Büschel* $\mathrm{IV}_{5,2\mathrm{konz}}$ *von Hyperbeln 2. Art vor; dieses Büschel besitzt eine einzige Invariante* $\{a_2\}$.

§ 8. DER BÜSCHELUNTERTYP IV_6

Sei (C, t) ein *eigentliches, nicht isotropes* Linienelement und für die *uneigentlichen* Grundpunkte A und B gelte $A = F$. Dann ist $g := AC$ eine *isotrope* Gerade. Durch eine *isotrope* Bewegung ist es möglich den Punkt C in den Ursprung $U(0, 0)$ und die Tangente t in die x-Achse des Koordinatensystems zu legen. Die Punkte A und B erhälten dann die *projektiven* Koordinaten $A(0{:}0{:}1)$, $B(0{:}b_1{:}b_2)$ mit $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$. Wir setzen $\varphi = b_2{:}b_1$.

Die Verbindungsgeraden dieser Punkte lauten

$$g_1 \ldots x_1 = 0;\; g_2 \ldots x_2 - \varphi x_1 = 0;\; t \ldots x_2 = 0;\; g \ldots x_0 = 0$$

und die *Normalform* dieses Büschels hat in *projektiven* Koordinaten die Gestalt

$$\mathscr{F} \equiv x_1(x_2 - \varphi x_1) + v x_2 x_0 = 0. \tag{8.1}$$

In *affinen* Koordinaten erhält man

$$\mathscr{F} \equiv x(y - \varphi x) + vy = 0. \tag{8.2}$$

Da alle *KS*-e dieses Büschels auf der Ferngeraden eine *identische Involution* erzeugen, bilden sie ein *homothetisches Hyperbelbüschel* aus *speziellen Hyperbeln.*

Die *Mittelpunktskurve* m^2 zerfällt in die Gerade

$$y - 2\varphi x = 0 \tag{8.3}$$

als Träger der Mittelpunkte aller regulären Hyperbeln, und in die Gerade $g(x_0 = 0)$, die dem Geradenpaar (g, t) angehört.

Die *Brennpunkte* der speziellen Hyperbeln liegen im Punkt $A = F$, so daß die *Brennpunktskurve* in die Geraden

$$(x_1)^2 x_0 = 0 \tag{8.4}$$

zerfällt. Man kann beide dieser Geraden als eigene Brennpunktsmenge auffassen.

SATZ 31. *Ein KS-Büschel der isotropen Ebene des Untertyps* IV_6 *ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante* $\{\varphi\}$ *eindeutig bestimmt.* φ *stimmt mit dem isotropen Winkel* $\sphericalangle(BC, t)$ *überein. Das Büschel wird von h o m o t h e t i s c h e n s p e z i e l l e n H y p e r b e l n gebildet, die alle ihren isotropen Brennpunkt im Punkt* $A = F$ *besitzen. Die Mittelpunkte dieser Hyperbeln liegen auf einer den Punkt C enthältenden Geraden m, wobei für den Winkel* $\sphericalangle(m, t) = 2\varphi$ *gilt* (vgl. [9] Fall I_6).

§ 9. DER BÜSCHELUNTERTYP IV_7

Genau *einer* der *einfachen* Grundpunkte ist *uneigentlich* und verschieden vom absoluten Punkt F; er werde mit A bezeichnet. Weiters sei (C, t) ein *eigentliches, nicht isotropes* Linienelement und B ein *eigentlicher* Grundpunkt. Durch eine *isotrope* Bewegung kann man erreichen, daß C in den *Ursprung* $U(0, 0)$ und die Tangente t in die x-Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems fällt. Der Punkt A erhält dann die *projektiven* Koordinaten $A(0{:}1{:}\varphi_1)$ mit $\varphi_1 \neq 0$ und der Punkt B die *affinen* Koordinaten $B(b_1, b_2)$ mit $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.

Die durch diese Punkte gelegten Geraden besitzen die Gleichungen

$$g_1 \ldots y - \varphi_1 x = 0; \; g_2 \ldots y - \varphi_2 x = 0 \text{ mit } \varphi_2 = b_2 : b_1;$$
$$t \ldots y = 0; \; g \ldots y - b_2 - \varphi_1(x - b_1) = 0.$$

Als Normalform dieses Büschels IV_7 erhält man in *affinen* Koordinaten

$$\mathscr{F} \equiv y^2 - (\varphi_1 + \varphi_2)xy + \varphi_1\varphi_1 x^2 + v[y^2 - \varphi_1 xy + (b_1\varphi_1 - b_2)y] = 0 \tag{9.1}$$

Man gewinnt als *Mittelpunktskurve* m^2

$$2\varphi_2(2\varphi_1 xy - y^2 - \varphi_1^2 x^2) + 2\varphi_1 b_2(\varphi_1 - \varphi_2)x + (\varphi_1 + \varphi_2)(b_2 - \varphi_1 b_1)y = 0 \tag{9.2}$$

mit den Fernpunkten $\left(\dfrac{y}{x}\right)_{1,2} = \varphi_1$.

m^2 ist daher eine *Parabel*, die die Ferngerade im Punkt A berührt und deren Durchmesser die Richtung φ_1 besitzt.

Als *Brennpunktskurve* findet man die Kubik

$$\varphi_2\,(2\varphi_1 xy - \varphi_1^2 x^2 - y^2)x + \varphi_1\varphi_2\,(b_1\varphi_1 - b_2)x^2 + (b_2 - b_1\varphi_1)y^2 = 0; \tag{9.3}$$

diese berührt die Gerade f im Punkt A und schneidet sie im Punkt F.

Die Kurve k_f^3 hat im Punkt C einen singulären Punkt, der wegen

$$D(C) = k_{xx}(C) \bullet k_{yy}(C) - k_{xy}^2(C) = -4\varphi_1\varphi_2 b_2^2 + 4\varphi_1^2 b_2^2$$

für

$sgn\ \varphi_1 = sgn\ \varphi_2$	ein Knoten und für
$sgn\ \varphi_1 \neq sgn\ \varphi_2$	ein isolierter Punkt ist.

Die beiden zugehörigen Büschel werden mit IV_7 bzw. IV_7. bezeichnet.

SATZ 32. *Ein KS–Büschel der isotropen Ebene vom Untertyp* IV_7 *ist bis auf isotrope Bewegungen durch drei Invarianten* $\{\varphi_1, b_1, b_2\}$ *eindeutig bestimmt. Dieses* *H y p e r b e l – P a r a r e l – B ü s c h e l* *wird von Hyperbeln 1. und 2. Art, einer speziellen Hyperbel, einer doppelt zählenden Parabel mit dem Brenn– und Mittelpunkt in* A *und von zwei singulären Hyperbeln* $g_1 g_2 = 0$ *bzw.* $gt = 0$ *gebildet. Je eine Asymptote aller Hyperbeln und der Durchmesser der Büschelparabel haben die Richtung* φ_1. *Die doppelt zählende Parabal ist durch*

den Parameterwert $v = \frac{\varphi_1}{\varphi_1} - 1$, *die spezielle Hyperbel durch* $v = -1$ *gegeben.*

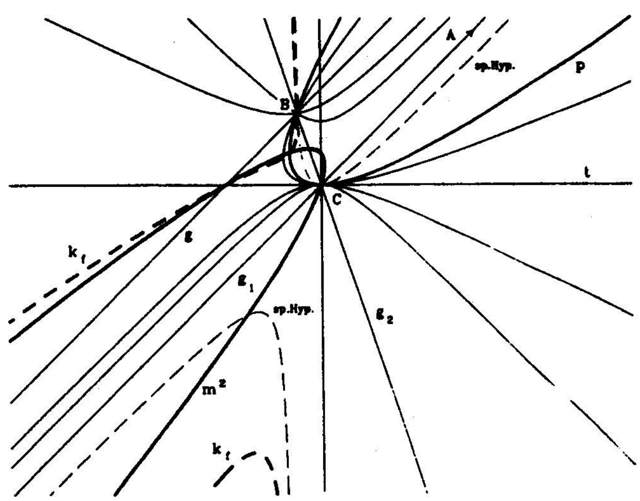

Abb. 19. für den Fall IV_7.

Die Mittelpunktskurve m^2 *ist eine Parabel mit der Durchmesserrichtung* φ_1. *Die Brennpunktskurve* k_f^3 *ist eine rationale Kurve* 3. *Ordnung, die die Gerade* f *im Punkt* A *berührt und im Brennpunkt* F *der speziellen Hyperbel schneidet. Die Kurve* k_f^3 *hat im Doppelpunkt* C *einen Knoten genau dann, wenn* $sgn\ \varphi_1 = sgn\ \varphi_2$ *gilt (Fall* IV_7*); sie hat in* C *einen isolierten Punkt genau dann, wenn* $sgn\ \varphi_1 \neq sgn\ \varphi_2$ *gilt (Fall* IV_7.*).*

(Vgl. [2, 451, 488.]; [3, 392, 395, 399–401]; [7, der Typ A4]; [9, Der Fall I_7].

§ 10. DER BÜSCHELUNTERTYP IV_8

Genau ein *einfacher* Büschelgrundpunkt, der mit A bezeichnet werde, sei *uneigentlich* und es gelte $A = F\ (0:0:1)$; der andere *einfache* Grundpunkt B und das Linienelement (C, t) seien *eigentlich, t nichtisotrop*. Wie in IV_7 können wir C in den Ursprung $U(0,0)$ und die Tangente t in die x-Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems legen. Der Punkt B hat dann die Koordinaten $B\ (b_1, b_2)$ *mit* $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Die durch die Grundpunkte gelegten Geraden besitzen die Gleichungen

$$g_1 \ldots x = 0; \quad g_2 \ldots y - \varphi_2 x = 0; \quad t \ldots y = 0; \quad g \ldots x - b_1 = 0$$

mit $\varphi_2 = b_2 : b_1$.

Als *Normalform* eines Büschels vom Untertyp IV_8 stellt sich

$$\mathscr{F} \equiv xy - \varphi_2 x^2 + v(xy - b_1 y) = 0 \tag{10.1}$$

ein.

Die doppelt zählende Parabel des Untertyps IV_7 wird im Untertyp IV_8 zu einem doppelt zu zählenden *parabolischen Kreis*, während die anderen *KS-e spezielle Hyperbeln* bzw. die *speziellen singulären Hyperbeln* $g_1 g_2 = 0$; $g\, t = 0$ sind.

Die *Mittelpunktskurve* m^2

$$2\varphi_2 x^2 - 2b_2 x + b_1 y = 0 \tag{10.2}$$

ist ein *parabolischer Kreis* vom Radius $-\dfrac{2\varphi_2}{b_1}$.

Da alle Büschelkegelschnitte ihre Brennpunkte im absoluten Punkt F haben, zerfällt die isotrope *Brennpunktskurve* k_f^3 in die Brennpunktsmenge

$$x^2(x - b_1) = 0. \tag{10.3}$$

SATZ 33. *Ein KS–Büschel der isotropen Ebene vom Untertyp* IV_8 *ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{b_1 \neq 0, b_2 \neq 0\}$ *eindeutig bestimmt. Diese Invarianten sind gleich den Abständen des Punktes B von den Geraden* g_1 *und t. Das Büschel wird von s p e z i e l l e n n i c h t h o m o t h e t i s c h e n H y p e r b e l n und einem zweifach zu zählenden parabolischen Kreis gebildet. Je eine Asymptote dieser Hyperbeln ist isotrop, während die zweite die Richtung* $\varphi_2 = (v + 1)$ *besitzt, wobei* v *der Büschelparameter und* φ_2 *der Winkel* $\sphericalangle(BC, t)$ *ist.*

Die Mittelpunktskurve ist ein isotroper parabolischer Kreis, während die Brennpunkte aller KS-e im Punkt $A = F$ liegen. Die Brennpunktskurve k_f^3 zerfällt in die zweifach zu zählende isotrope Gerade g_1 und in die isotrope Gerade g, die als Brennpunktsmenge der speziellen Hyperbeln $g_1g_2 = 0$ bzw. $g\ t = 0$ aufgefasst werden kann.

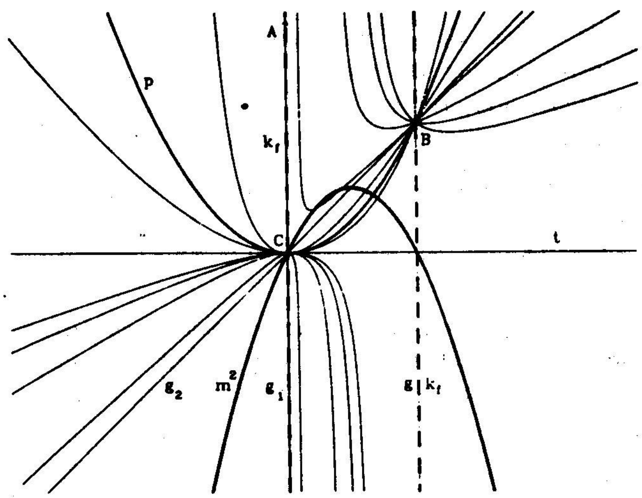

Abb. 20.

Es ist interessant einen Vergleich mit der äquiformen Geometrie in [3, 475–476] zu ziehen. Die dort angegebenen Sätze kann man kurz so zusammenfassen:

"Der Mittelpunktskegelschnitt eines nicht homothetischen gleichseitigen Hyperbelbüschels mit reellen Grundpunkten ist der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks ABC. Dabei sind die Punkte A, B, C die Büschelgrundpunkte, während der vierte Grundpunkt D – weil das Büschel nur orthogonale Geradenpaare enthält – der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist."

In [11] würde bewiesen, daß die spezielle Hyperbell der Ebene I_2 das *isotrope* Analogon zur gleichseitigen Hyperbel der euklidischen Ebene E_2 ist, und in [14, 551] würde das *isotrope* Analogon zum *euklidischen Feuerbachschen Kreis eines Dreiecks* $P_1P_2P_3$ angegeben.

Damit folgt:

SATZ 34. *Die Mittelpunktskurve m^2 eines KS-Büschels des Untertyps* IV_8 *– bestehend aus nicht homothetischen speziellen Hyperbeln und einem zweifach zählenden parabolischen Kreis – ist ein* isotroper Feuerbachscher Kreis.

§ 11. DER BÜSCHELUNTERTYP IV_9

Es sei C ein *uneigentlicher Punkt* und zwar $C = F$. Die gemeinsame *eigentliche* Tangente t aller *KS-e* ist somit eine *isotrope* Gerade. Die *eigentlichen* Grundpunkte A und B bestimmen eine Gerade g: $= AB$, die *keine isotrope Gerade* sein kann.

Durch eine *isotrope* Bewegung kann man erreichen, daß t in die y-Achse und g in die x-Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems fällt. Der Schnittpunkt dieser Geraden $t \ldots x = 0$ und $g \ldots y = 0$ ist der Ursprung $U(0,0)$ des Koordinatensystems. Keiner der beiden Punkte A und B kann in den Punkt U Fällen, da sonst eine Ausartung des Büschels vorliegen würde. Damit erhälten diese Punkte die Koordinaten $A(a_1,0)$, $B(b_1,0)$ mit $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ und die Geraden g_1,g_2 besitzen die Gleichungen $g_1 \ldots x - a_1 = 0$; $g_2 \ldots x - b_1 = 0$.

Als *Normalform* eines Büschels vom Untertyp IV_9 erhält man daher

$$\mathscr{F} \equiv (x - a_1)(x - b_1) + vxy = 0. \tag{11.1}$$

Das Büschel wird von *speziellen, nicht homothetischen Hyperbeln* mit einer *gemeinsamen Asymptote* t erzeugt. Für $v = 0$ stellt sich das Geradenpaar (g_1,g_2) ein, das als ein doppelt zu zählender parabolischer Kreis aufgefaßt werden kann.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 *zerfällt in die beiden Geraden*

$$t \ldots x = 0 \text{ und } s \ldots x = 0.5\,(a_1+b_1). \tag{11.2}$$

Während die Gerade t die Mittelpunkte aller Hyperbeln des Büschels trägt, kann s als Mittellinie des parallelen Geradenpaares (g_1,g_2) aufgefasst werden.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 zerfällt in die Geraden t, g_1, g_2 als Brennpunktsmengen von $g\ t = 0$ und $g_1g_2 = 0$, während alle speziellen Hyperbeln ihren Brennpunkt in $C = F$ besitzen.

SATZ 35. *Ein KS-Büschel vom Untertyp* IV_9 *der isotropen Ebene ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{a_1, b_1\}$ *eindeutig bestimmt. Diese Invarianten sind gleich den isotropen Abständen der eigentlichen Grundpunkte A und B von der gemeinsamen Tangente t im Doppelgrundpunkt C. Die KS-e dieses Hyperbel-Parabel-Büschels sind spezielle nicht homothetische Hyperbeln mit einer gemeinsamen isotropen Asymptote t, auf der die Mittelpunkte dieser Hyperbeln liegen, während die zweiten Asymptoten die Richtung* $\frac{1}{v}$ *besitzen, wenn v den Büschelparameter bezeichnet. Die doppelt zu zählende Parabel entartet zum reduziblen parabolischen Kreis* $g_1g_2 = 0$ (vgl. [3, 475]).

DIE BÜSCHELART IV_{9konz}

Liegen die Punkte A und B des Untertyps IV_9 *symmetrisch* zur Geraden t, dann gilt $a_1 = -b_1$ und man erhält als *Normalform* eines Büschels IV_{9konz} in *affinen* Koordinaten

$$\mathcal{F} \equiv x^2 - a_1^2 + vxy = 0. \tag{11.3}$$

Die *Mittelpunkte* aller speziellen nicht homothetischen Hyperbeln dieses Hyperbel-Parabel-Büschels fällen mit dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ zusammen, während als Mittelpunktsmenge des reduziblen doppelt zu zählenden parabolischen *Kreises* $g_1g_2 = 0$ die Gerade $x^2 = 0$ aufgefaßt werden kann.

Alle regulären *KS-e* haben ihren *gemeinsamen Brennpunkt in* $C = F$. *Die Brennpunktskurve* k_f^3 zerfällt in die isotropen Geraden $x = 0; x - a_1 = 0; x + a_1 = 0$, die die Brennpunkte der singulären *KS-e* $g_1g_2 = 0$; $gt = 0$ tragen.

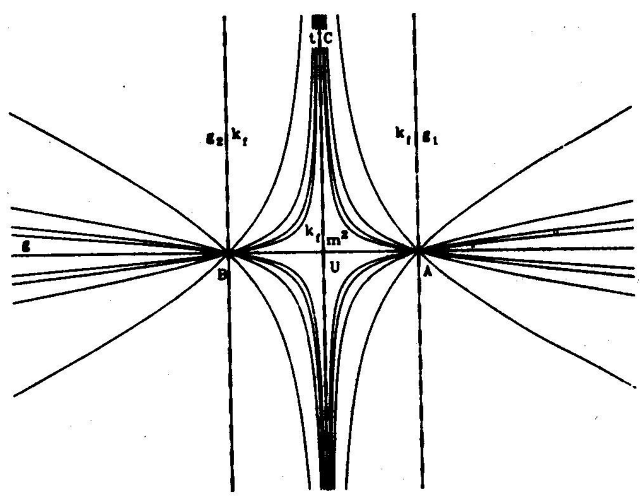

Abb. 21.

SATZ 36. *Ein KS-Büschel* IV_{9konz} *der isotropen Ebene ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante* $\{a_1\}$ *eindeutig bestimmt. Das Büschel wird von speziellen nicht homothetischen konzentrischen Hyperbeln mit einer gemeinsamen isotropen Asymptote erzeugt; die zweite Asymptote besitzt die Richtung* $-\dfrac{1}{v}$, *wobei* v *der Büschelparameter ist. Der gemeinsame Mittelpunkt aller diesen Hyperbeln ist der Mittelpunkt der Strecke* $\overline{AB}$

(Vgl. die Fälle $IV_{4,2k^*}$ und $IV_{5,2\,konz}$ dieser Abhandlung.)

DER BÜSCHELUNTERTYP IV_{10}

Es seien $A \in f$, $C \in f$, aber $A \neq F$, $C \neq F$ und die Tangente t durch C sei von der absoluten Geraden f verschieden. Der weitere Grundpunkt B sei *eigentlich*. Durch eine isotrope Bewegung kann man erreichen, daß t parallel zur x-Achse des Koordinatensystems wird und C die projektiven Koordinaten C(0:1:0) erhält. Durch eine *isotrope* Schiebung kann man erzwingen, daß t durch $x_2 = 0$ beschrieben wird, und durch eine *nicht isotrope* Schiebung kann man B die *projektiven* Koordinaten $B(1{:}0{:}b_2)$ mit $b_2 \neq 0$ zuweisen. Der Grundpunkt A wird durch $A(0{:}a_1{:}a_2)$ mit $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ festgelegt.

Die Geraden g_1, g_2, t, g besitzen dann die Darstellung

$$g_1 \ldots x_0 = 0; \quad g_2 \ldots x_2 - b_2x_0 = 0; \quad t \ldots x_2 = 0;$$

$$g \ldots (x_2-b_2x_0)a_1 - (a_2-b_2)x_1 = 0$$

und das Büschel läßt sich in *projektiven* Koordinaten durch die *Normalform*

$$\mathcal{F} \equiv (x_2-b_2x_0)x_0 + vx_2[(x_2-b_2x_0)a_1-(a_2-b_2)x_1] = 0 \tag{11.4}$$

bzw. in *affinen* Koordinaten durch

$$\mathcal{F} \equiv y-b_2+vy[(y-b_2)a_1-(a_2-b_2)x] = 0 \tag{11.5}$$

darstellen.

Die regulären *KS*-e dieses Büschels sind durchwegs Hyperbeln 1. und 2. Art durch die uneigentlichen Punkte A und C. Die Hyperbeln dieser beiden Arten werden durch das Geradenpaar (g_1, g_2) getrennt. Dieses Geradenpaar kann als ein reduzibler isotroper Kreis 2. Stufe aufgefaßt werden.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 zerfällt in die Gerade $t \ldots x_2 = 0$ auf der die Mittelpunkte aller Hyperbeln einschlißlich der singulären Hyperbel $gt = 0$ liegen, und in die Gerade $g_1 \ldots x_0 = 0$, die dem reduziblen Kreis $g_1g_2 = 0$ angehört.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 zerfällt in eine Parabel

$$a_1y^2 - 2a_1b_2y + (a_2 - b_2)b_2x + a_1b_2^2 = 0 \tag{11.6}$$

und in die Gerade $g_1 = f \ldots (x_0{=}0)$ als Brennpunktsmenge von $g_1g_2 = 0$.

SATZ 37. *Ein KS-Büschel der isotropen Ebene vom Untertyp IV_{10} ist bis auf isotrope Bewegungen durch drei Invarianten $\{a_1, a_2, b_2\}$ eindeutig bestimmt. Es wird von homothetischen Hyperbeln 1. und 2. Art erzeugt, deren Mittelpunkte auf ihrer gemeinsamen Asymptote t liegen. Die Brennpunkte dieser Hyperbeln liegen auf einer Parabel, deren Durchmesserrichtung parallel zu t ist und deren isotroper Brennpunkt der Grundpunkt B ist.*

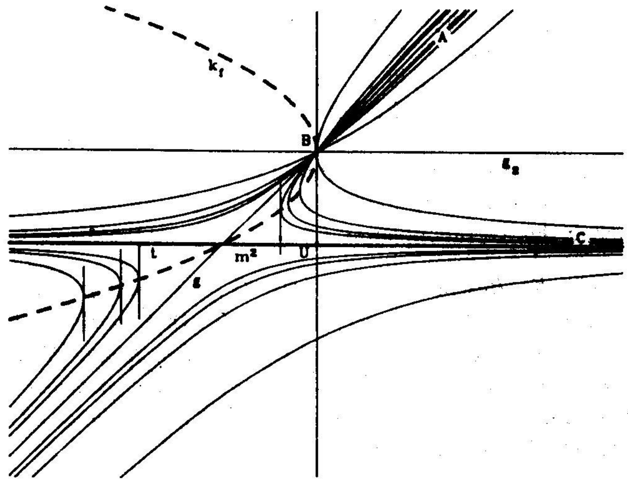

Abb. 22.

(Vgl. [3, 395–396.])

DER BÜSCHELUNTERTYP IV_{11}

Sei C ein *uneigentlicher* Punkt und die Tangente t durch C sei von der absoluten Geraden verschieden. Für den Grundpunkt A gelte $A = F$. Der Grundpunkt B ist *eigentlich* und die Gerade g: $= AB$ ist *isotrop*.

Durch geeignete *isotrope* Bewegungen kann man, wie im Fall IV_{10} erreichen, daß t durch $x_2 = 0$ beschrieben wird und C die *projektiven* Koordinaten C (0:1:0) erhält, während die Punkte A und B durch die *projektiven* Koordinaten A (0:0:1) und B $(1{:}0{:}b_2)$ mit $b_2 \neq 0$ erfaßt werden.

Die Verbindungsgeraden dieser Punkte werden durch

$$g_1 \ldots x_0 = 0; \quad g_2 \ldots x_2 - b_2x_0 = 0; \quad t \ldots x_2 = 0; \quad g \ldots x_1 = 0$$

festgelegt und die *Normalform* des Büschels IV_{11} lautet in *projektiven* Koordinaten

$$\mathscr{F} \equiv x_0(x_2 - b_2x_0) + v x_1 x_2 = 0 \qquad (11.7)$$

bzw. in *affinen* Koordinaten

$$\mathscr{F} \equiv y - b_2 + vxy = 0. \qquad (11.8)$$

Das Büschel enthält als reguläre *KS*–e durchwegs *spezielle homothetische Hyperbeln* mit der gemeinsamen nicht isotropen Asymptote t. Das Geradepaar (g, t) ist eine singuläre Hyperbel, während das Geradenpaar (g_1, g_2) als reduzibler isotroper Kreis 2. Stufe aufgefaßt werden kann.

Die *Mittelpunkskurve* m^2 zerfällt in die Gerade $t \ldots x_2 = 0$, die die Mittelpunkte aller Hyperbeln trägt und in die Ferngerade $x_0 = 0$, die dem Geradenpaar (g_1, g_2) angehört.

Die *Brennpunktskurve* enthält den Punkt $A = F$ als den gemeinsamen Brennpunkt aller *KS*–e und zerfällt in die Geraden $g \ldots x_1 = 0$ bzw. $x_0 = 0$ als Brennpunktsmenge des Geradenpaares (g, t) bzw. (g_1, g_2).

SATZ 38. *Ein KS–Büschel vom Untertyp* IV_{11} *der isotropen Ebene ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante* $\{b_2\}$ *eindeutig bestimmt. Diese Invariante ist gleich dem isotropen Abstand des eigentlichen Büschelgrundpunktes B von der nichtisotropen Büscheltangente t. Das Büschel besteht aus speziellen, homothetischen Hyperbeln, deren Mittelpunkte auf der nichtisotropen gemeinsamen Asymptote liegen, während die anderen Asymptoten stets isotrop sind.*

DER BÜSCHELUNTERTYP IV_{12}

Nun sei (C, t) ein *Linienelement* mit dem *uneigentlichen* Grundpunkt $C = F$ und der Tangente $t \neq f$. Weiters sei der Grundpunkt A ein *uneigentlicher* und der Punkt B ein *eigentlicher* Punkt. Man kann dann durch eine *isotrope* Bewegung erreichen, daß t in die y-Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems fällt und daß die Grundpunkte A und B die Koordinaten A (0:1:0), B $(1:b_1:0)$ mit $b_1 \neq 0$ erhälten. Die Gleichungen der Verbindungsgeraden der Büschelgrundpunkte lauten in *projektiven* Koordinaten

$$g_1 \ldots x_0 = 0; \quad g_2 \ldots x_1 - b_1 = 0; \quad g \ldots x_2 = 0; \quad t \ldots x_1 = 0.$$

Als *Normalform* eines Büschels vom Untertyp IV_{12} gewinnt man in *projektiven* Koordinaten

$$\mathcal{F} \equiv x_0(x_1 - b_1) + \nu x_1 x_2 = 0 \tag{11.9}$$

bzw. in *affinen* Koordinaten

$$\mathcal{F} \equiv x - b_1 + \nu xy = 0 \tag{11.10}$$

Das Büschel besteht aus *speziellen, homothetischen Hyperbeln* mit der gemeinsamen *isotropen Asymptote t*.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 zerfällt in die Gerade $x_1 = 0$ als Mittelpunktsmenge der Hyperbeln, und in die Ferngerade $x_0 = 0$, die als Menge der Mittelpunkte des reduziblen Kreises $g_1 g_2 = 0$ augefaßt werden kann.

Der gemeinsame *Brennpunkt* aller *KS*–e liegt im Punkt $C = F$ (0:0:1), während die *Brennpunktskurve* k_f^3

$$x_0 x_1 (x_1 - b_1) = 0 \tag{11.11}$$

aus der Brennpunktsmenge der singulären Kegelschnitte $g_1g_2 = 0$ und $gt = 0$ besteht.

SATZ 39. *Ein KS–Büschel vom Untertyp* IV_{12} *ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante* $\{b_1\}$ *eindeutig bestimmt. Diese Invariante ist gleich dem Abstand des eigentlichen Büschelgrundpunktes B von der isotropen Büscheltangente t. Das Büschel besteht aus jenen speziellen, homothetischen Hyperbeln durch B, deren Mittelpunkte auf der gemeinsamen isotropen Asymptote t liegen und deren nichisotrope Asymptoten die Richtung A haben.*

(Vgl. [7, 370.–372.]).

§ 12. DER BÜSCHELUNTERTYP IV_{13}

Nun sei (C,t) ein *uneigentliches Linienelement*, bestehend aus der absoluten Geraden $t = f$ und einem Punkt $C \in f$, $C \neq F$; die einfachen Grundpunkte A und B seien *eigentlich* und $g := AB$ sei *keine isotrope Gerade*.

Durch eine *isotrope* Bewegung kann man erreichen, daß C die *projektiven* Koordinaten C (0:1:0) erhält. Da A und B *eigentlich* sind, kann man durch Anwendung einer Schiebung, – die an der Situation auf der Ferngeraden nichts ändert – erreichen, daß diese Punkte die *projektiven Koordinaten* A (1:0:0), B $(1{:}b_1{:}b_2)$ erhälten. Hierbei gilt $b_1 \neq 0$, sonst würden A und B auf einer isotropen Geraden liegen. Es ist auch $b_2 \neq 0$, sonst wären A, B und C kollinear.

Mit den üblichen Methoden erhält man als *Normalform* eines Büschels des Untertyps IV_{13} in *projektiven* Koordinaten

$$\mathcal{F} \equiv x_2(x_2 - b_2x_0) + \nu(b_1x_2 - b_2x_1)x_0 = 0 \tag{12.1}$$

bzw. in *affinen* Koordinaten

$$\mathcal{F} \equiv y(y - b_2) + \nu(b_1y - b_2x) = 0 \tag{12.2}$$

Die regulären *KS*–e dieses Büschels sind durchwegs *Parabeln*, deren Durchmesser die Richtung C haben. Im Punkt C liegt der *gemeinsame Mittelpunkt* und der uneigentliche *Brennpunkt* dieser Parabeln. Dem Büschel gehört für $\nu = 0$ das Geradenpaar (g_1, g_2) mit den Gleichungen $g_1 \dots y = 0$; $g_2 \dots y - b_2 = 0$, und für $\nu = \infty$ das Geradenpaar (g, t).

Die *Mittelpunktskurve* m^2

$$x_0(b_2x_0 - 2x_2) = 0 \tag{12.3}$$

zerfällt in zwei den Punkt C enthaltende Geraden. Die Gerade $2y - b_2 = 0$ gehort als Mittellinie zum Geradenpaar (g_1, g_2), während die Ferngerade $t = f \dots (x_0 = 0)$ zum Geradenpaar (g, t) gehört.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 zerfällt in eine Hyperbel

$$b_1x_2^2 - 2b_1x_1x_2 + b_2^2x_1 = 0 \tag{12.4}$$

mit den Fernpunkten C (0:1:0) und T (0:b_1:2b_2), und in die Gerade $x_0 = 0$, die die Brennpunkte des Paares (g, t) trägt.

SATZ 40. *Ein KS-Büschel der isotropen Ebene vom Untertyp* IV_{13} *ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{b_1, b_2\}$ *eindeutig bestimmt. Das Büschel besteht aus Parabeln gleicher Durchmesserrichtung C. Die Brennpunkte dieser Parabeln liegen auf einer Hyperbel, deren eine Asymptote die Richtung der Parabeldurchmesser hat* (vgl. [2, 458.–460.]; [3, 396., 403.]; [7, 362.–364.]).

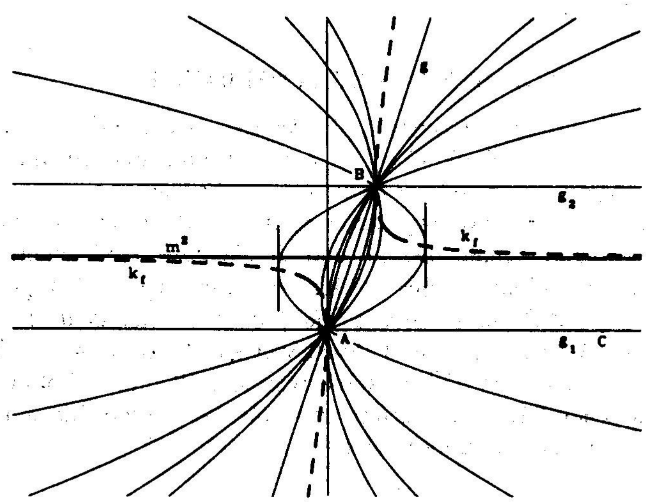

Abb 23.

DER BÜSCHELUNTERTYP IV_{14}

Sei (C, t) ein *uneigentliches Linienelement*, bestehend aus der absoluten Geraden $t = f$ und einem Punkt $C \in f$, $C \neq F$. Die Verbindungsgerade $g := A\,B$ der *eigentlichen* Grundpunkte A und B sei eine *isotrope* Gerade. Man kann dan durch eine *isotrope* Bewegung erreichen, daß C die *projektiven* Koordinaten C (0:1:0) erhält, die Gerade g durch $x_1 = 0$ beschrieben wird und die Punkte A und B durch die *projektiven* Koordinaten A (1:0:a_2) und B (1:0:$-a_2$) mit $a_2 \neq 0$ erfaßt werden. Als *Normalform* dieses *KS*–Büschels gewinnt man in *projektiven* Koordinaten

$$\mathscr{F} \equiv x_2^2 - a_2^2 x_0^2 + \mathrm{v} x_1 x_2 = 0 \tag{12.5}$$

bzw. in *affinen* Koordinaten

$$\mathscr{F} \equiv y^2 - a_2^2 + \mathrm{v}x = 0. \tag{12.6}$$

Die regulären *KS*-e dieses Büschels sind *Parabeln* mit dem *gemeinsamen Mittel-* und *Brennpunkt* in C. Je ein Durchmesser jeder dieser Parabeln liegt auf jener

Geraden s, die die *Mittellinie* des parallelen Geradenpaares (g_1, g_2) ist. Dieses Geradenpaar stellt eine singuläre Büschelparabel dar und das Geradenpaar (g, t) legt einen reduziblen parabolischen Kreis 2. Stufe fest (vgl. [9]).

Die *Mittelpunktskurve* m^2

$$x_2 x_0 = 0 \tag{12.7}$$

zerfällt in die Gerade $s .. x_2 = 0$ als Mittellinie von $g_1 g_2 = 0$ und in die Gerade $g = f \ldots x_0 = 0$, die zu $gt = 0$ gehört.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3

$$x_2 x_f x_0 = 0 \tag{12.8}$$

zerfällt in die Brennpunktsmenge $x_2 = 0$ der regulären Parabeln und die Geraden $g \ldots x_1 = 0$ und $t \ldots x_0 = 0$.

SATZ 41. *Ein KS-Büschel der isotropen Ebene vom Untertyp* IV_{14} *ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante* $\{a_2\}$ *eindeutig bestimmt; diese mißt die halbe isotrope Spanne der parallelen Grundpunkte A und B. Das Büschel besteht aus Parabeln, die durch eine isotrope Spiegelung an einer nichtisotropen Geraden s auf sich abgebildet werden. Auf der Geraden s liegen die isotropen Brennpunkte dieser Parabeln.*

DER BÜSCHELUNTERTYP IV_{15}

Nun sei (C, t) das absolute *Linienelement* (F, t). Dann ist die Verbindungsgerade $g := AB$ der *eigentlichen Grundpunkte A* und *B nicht isotrop*. Durch eine *isotrope* Bewegung kann man erreichen, daß A und B die *projektiven* Koordinaten $A\ (1{:}a_1{:}0)$ und $B\ (1{:}-a_1{:}0)$ mit $a_1 \neq 0$ erhalten.

Die Gleichungen der Geraden g_1, g_2, t und g lauten in *projektiven* Koordinaten

$$g_1 \ldots x_1 - a_1 x_0 = 0; \quad g_2 \ldots x_1 + a_1 x_0 = 0; \quad t \ldots x_0 = 0; \quad g \ldots x_2 = 0$$

und als *Normalform* des *KS*-Büschels IV_{15} ergibt sich

$$\mathscr{F} \equiv x_1^2 - a_1^2 x_0^2 + v x_2 x_0 = 0 \tag{12.9}$$

bzw. in *affinen* Koordinaten

$$\mathscr{F} \equiv x^2 - a_1^2 + vy = 0. \tag{12.10}$$

Das Büschel enthält als reguläre Kurven durchwegs *isotrope parabolische Kreise* mit einem gemeinsamen *isotropen Durchmesser* und dem gemeinsamen Mittel – und Brennpunkt $C = F$.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 zerfällt in die Gerade $x_1 = 0$, die die Mittellinie des reduziblen isotropen Kreises $g_1 g_2 = 0$ ist, und in die Ferngerade $x_0 = 0$, die zum Geradenpaar (g, t) als Mittenort gehört.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3

$$x_0\,(x_1 - a_1)\,(x_1 + a_1) = 0 \tag{12.11}$$

besteht aus drei *isotrope* Geraden; sie enthält den gemeinsamen Brennpunkt C und die Brennpunkte von $g_1 g_2 = 0$ bzw. $gt = 0$.

SATZ 42. *Ein KS-Büschel der isotropen Ebene vom Typ* IV_{15} *besteht aus allen parabolischen Kreisen durch zwei eigentliche Punkte. Dieses Büschel ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante* $\{a_1\}$ *bestimmt, die den halben Abstand der beiden eigentlichen Büschelgrundpunkte mißt.*

(Vgl. [3, 393, 479–481.], wo ein analoges Kreisbüschel der euklidischen Ebene E_2 betrachtet würde; vgl. auch [7] Typ A 10).

LITERATUR:

[1] *H. Brauner,* Geometrie projektiver Räume I, Bibliographisches Institut Mannheim, 1976.
[2] *R. Cesarec,* Analitička geometrija u ravnini, Školska knjiga, Zagreb, 1957.
[3] *L. Heffter* und *C. Koehler,* Lehrbuch der analytischen Geometrie I, Teubner – Verlag, Leipzig – Berlin, 1905.
[4] *Н. М. Макарова,* Кривые второго порядка в плоской параболической геометрии »Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии«, Ученые записки МГПИ им. Ленина (1963). 222-251.
[5] *V. Niče,* Uvod u sintetičku geometriju, Školska knjiga, Zagreb, 1956.
[6] *H. Sachs,* Ebene isotrope Geometrie, Vieweg – Verlag, Braunschweig – Wiesbaden, 1987.
[7] *H. Sachs,* Oskulierende und hyperoskulierende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene I, Sitzber. d. österr. Akad. Wiss. Wien **196** (1987) 337–375.
[8] *H. Sachs,* Oskulierende und hyperoskulierende KegelschnittBüschel der isotropen Ebene II, Sitzber. d. österr. Akad. Wiss. Wien (In Vorbereitung).
[9] V. Ščurić-Čudovan, Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, I Teil, Rad JAZU **450** (1990), 41–51.
[10] *V. Ščurić-Čudovan,* H. Sachs, Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene, I, Rad HAZU **470** (1995), 119–137.
[11] *V. Ščurić-Čudovan,* Eine Kennzeichnung der speziellen Hyperbel der isotropen Ebene, Sitzber. d. österr Akad. Wiss. Wien **201** (1992), 111–115.
[12] *K. Strubecker,* Äquiforme Geometrie der isotropen Ebene, Archiv d. Math. **3** (1952), 145–153.
[13] *K. Strubecker,* Geometrie in einer isotropen Ebene, Math-Naturwiss. Unterricht **15** (1962), 297–306, 343–351, 385–394.
[14] *K. Strubecker,* Zwei Anwendungen der isotropen Dreiecksgeometrie auf ebene Ausgleichsprobleme, Sitzber. d. österr. Akad. Wiss. Wien **192** (1983), 497–559.
[15] *V. Szirovicza,* Die Berührkegelschnittbüschel der isotropen Ebene mit konjugiert-komplexen Grundpunkten, Rad HAZU **470** (1995), 13–34.

Angenommen in II. Abteilung
1.3.1994.

Vlasta Ščurić-Čudovan
Geodetski fakultet, Kačićeva 26
10000 Zagreb, Hrvatska

Hans Sachs
Montanuniversität Leoben
Institut Für Mathematik und Angewandte Geometrie
A-8700 Leoben, Austria

Teorija klasifikacije pramena konika tipa IV u izotropnoj ravnini, II dio

Vlasta Ščurić-Čudovan i Hans Sachs

Sadržaj

Rad je direktni nastavak našeg rada istoimenog naslova, I dio. U izotropnoj ravnini I_2 metriziranoj apsolutnom figurom $\{F, f\}$, pri čemu je f beskonačno daleki pravac, a F točka tog pravca, klasificiran je takav pramen konika (tipa IV), koji je određen jednom dvostrukom i dvije realne jednostruke točke. U prvom su dijelu obrađena dva podtipa IV_1 i IV_2 s ukupno 20 vrsta i slučajeva. U drugom se dijelu klasificiraju podtipovi IV_3 – IV_{15}. Dodatna se klasifikacija provodi pomoću krivulje središta m^2 2. reda, kao i krivulje izotropnih žarišta k_f^3 3. reda konika tog pramena.

Prihvaćeno u II razredu

1.3.1994.