

HRVATSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VLASTA ŠČURIĆ-ČUDOVAN und HANS SACHS

**KLASSIFIKATIONSTHEORIE DER KEGELSCHNITTBÜSCHEL VOM
TYP IV DER ISOTROPEN EBENE, I**

*Poseban otisak iz:
Rad Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti 470
Knjiga XLVI. Matematičke znanosti
Svezak 12*



Z A G R E B 1995

KLASSIFIKATIONSTHEORIE DER KEGELSCHNITTBÜSCHEL VOM TYP IV DER ISOTROPEN EBENE, I

Vlasta Ščurić-Čudovan und Hans Sachs

Abstract. An isotropic plane I_2 is a real affine plane A_2 with the metric $ds = dx$. This metric can be introduced by an absolute $\{f, F\}$, where f is the line at infinity of $A_2 \subset P_2$ and F is a point on f . In this paper the pencil of conic sections of type IV in I_2 will be classified. The fundamental points of this type are a double point and two different, real points in I_2 . The curve of all centers of conic sections and the curve of all isotropic focal points are investigated in the different subcases, which help to make this classification.

1. EINLEITUNG

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Abhandlung [9], in der das allgemeinste Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene mit synthetischen Methoden behandelt wurde, wobei auch auf die Abhandlung [7] Bezug genommen wird.

Die in [9] und [7] dargestellten Grundbegriffe über die isotrope Ebene I_2 , speziell über die Kegelschnitte der Ebene I_2 , sowie über die Kegelschnittbüschel in der projektiven Ebene P_2 und in der affinen Ebene A_2 werden als bekannt vorausgesetzt und hier nur kurz zusammengefaßt.

Eine reelle affine Ebene $A_2(R)$, welche über eine Absolutfigur $\{f, F\}$ – bestehend aus einer Geraden f als *absoluter Geraden* und einem Punkt $F \in f$ als *absolutem Punkt* – metrisiert wird, heißt eine *isotrope Ebene* $I_2(R)$. Die Geometrie dieser Ebene wurde vor allem von K. Strubecker (vgl. [10], [11]) entwickelt. Eine ausführliche lehrbuchmäßige Darstellung der ebenen isotropen Geometrie wurde von H. Sachs in der Monographie [6] gegeben, wo auch alle i.f. benutzten Begriffe nachgelesen werden können.

Die ersten Untersuchungen über Kegelschnitte in I_2 stammen von N. M. Makarova [4] und K. Strubecker [11].

Wegen $I_2 \subset A_2 \subset P_2$ werden alle affine bzw. projektive Eigenschaften von Kegelschnittbüscheln – i.f. kurz als *KS-Büscheln* bezeichnet –, aber auch anderer geometrischer Objekte benützt werden, ohne daß darauf in jedem Einzelfall gesondert hingewiesen wird. Unter projektiven bzw. affinen Gesichtspunkten wurden *KS-Büschel* in [1], [2], [3], [5] und [12] behandelt.

Ein *KS-Büschel* ist bekanntlich durch zwei *KS-e* vollständig bestimmt. Diese *KS-e* schneiden sich im algebraischen Sinn über dem Körper der komplexen Zahlen C in vier Büschelgrundpunkten A, B, C und D .

Je nach Realität bzw. Vielfachheit dieser Grundpunkte und nach ihrer Lage zur Absolutfigur $\{f, F\}$ der isotropen Ebene, läßt sich eine Klassifikation der KS -Büschel in I_2 vornehmen. Da wir uns stets auf nicht ausgeartete KS -Büschel beschränken, d.h. keine Paare von Geradenbüscheln betrachten, gibt es genau *neun Haupttypen* von KS -Büscheln in I_2 .

In [9] sind diese Büscheltypen definiert und jener Büscheltyp I betrachtet worden, der durch vier verschiedene reelle Grundpunkte bestimmt ist. Die Typen VIII und IX wurden in [7] und [8] untersucht.

In der vorliegenden Arbeit werden die KS -Büschel vom Typ IV betrachtet. Da die Klassifikation zusätzlich mit Hilfe der *Mittelpunktskurve* m^2 2. Ordnung, der *Brennpunktskurve* k^3 3. Ordnung und nach der Lage der *Geradenpaare* des Büschels zueinander und bezüglich der Absolutfigur $\{f, F\}$ der isotropen Ebene vorgenommen wird, erhält man bei dem Büscheltyp IV eine stattliche Anzahl von *Büscheluntertypen*, *Büschelarten* und *Büschelfälle*. Um einen konsequenten Aufbau sicherzustellen, wird beim Typ IV, ebenso wie auch bei der Untersuchung der anderen KS -Büscheltypen eine Bezeichnung durch *Indizes* verwendet. Die Grobklassifikation, die den Untertyp bestimmt, wird durch den ersten Index gekennzeichnet, wobei jede einzelne Ziffer eine rein geometrische Deutung liefert.

Beispielsweise bedeutet der Index 1, daß die Grundpunkte eigentlich und die Geradenpaare des Büschels unabhängig vom absoluten Punkt F sind.

Die feinere Klassifikation der einzelnen Untertypen welche wir als *Büschelarten* bzw. *Büschelfälle* bezeichnen, wird durch den nächsten Index bzw. durch Buchstaben beschrieben.

Die Klassifikation nach Büscheluntertypen erfolgt unter *geometrischen Gesichtspunkten*, wobei als *Fundamentalgruppe* stets die dreiparametrische *isotrope Bewegungsgruppe* \mathcal{B}_3

$$\begin{cases} \bar{x} = c_1 + x \\ \bar{y} = c_2 + c_3x + y \end{cases} \quad (1.1)$$

zugrunde legen ([6], [7]). Diese Gruppe ist bekanntlich eine spezielle projektive Automorphismengruppe der Absolutfigur $\{f, F\}$, wobei nach Einführung von *projektiven* Koordinaten $\{x_0, x_1, x_2\}$ in $I_2 \subset P_2$ die Gerade f durch $x_0 = 0$ und F durch $F(0 : 0 : 1)$ erfaßt wird. Mit $\{x, y\}$ bezeichnen wir hier und im folgenden die zugehörigen *affinen* Koordinaten in I_2 .

In der folgenden Arbeit beweisen wir als Hauptresultat den

SATZ 1. *In der isotropen Ebene $I_2(R)$ existieren bezüglich der isotropen Bewegungsgruppe \mathcal{B}_3 genau 15 verschiedene Büscheluntertypen des Büscheltyps IV, die insgesamt in 41 Büschelarten und Büschelfälle eingeteilt werden können.*

2. DER BÜSCHELTYP IV

Die KS -e dieses Büscheltyps sind durch *einen doppelt zählenden, reellen und zwei einfache reelle Büschelgrundpunkte* bestimmt.

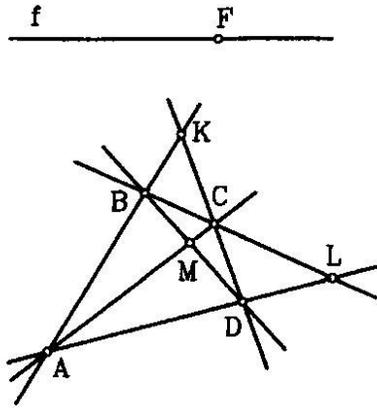


Abb. 1.

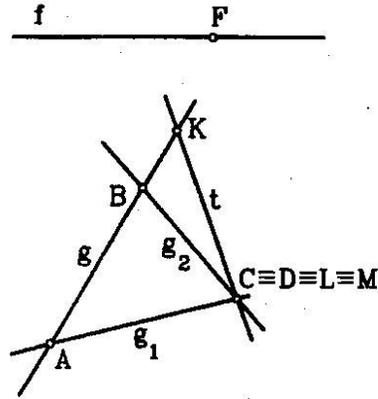


Abb. 2.

Dem gegenüber ist der allgemeinste Büscheltyp, nämlich der Haupttyp I durch vier reelle und verschiedene Büschelgrundpunkte A, B, C und D festgelegt (vgl. Abb. 1). Diese vier Grundpunkte bestimmen bekanntlich eindeutig die drei Hauptpunkte K, L und M dieses Büschels (vgl. [1], [2], [3], [5], [9], [12]).

Bei dem Typ IV (Abb. 2) fallen die reellen Grundpunkte C und D im Punkt C zusammen. In diesem Punkt fallen dann auch zwei Hauptpunkte dieses Büschels, so daß die Verbindungsgerade $t := CK$ eine gemeinsame Tangente t aller KS -e dieses KS -Büschels ist. Die drei sich in den Hauptpunkten schneidenden Geradenpaare, welche die singulären KS -e eines KS -Büschels vom Typ I darstellen, sind bei dem Typ IV zu zwei Geradenpaaren (g_1, g_2) und (g, t) mit $g_1 : AC, g_2 := BC, g := AB, t := CK$ ausgeartet. Diese zwei Geradenpaare bestimmen ein KS -Büschel vom Typ IV vollständig.

Ein KS -Büschel ist bekanntlich ein *Hyperbel-* bzw. ein *Ellipsen-Hyperbel-Büschel*, je nachdem die gemeinsame Tangente t im doppelten Grundpunkt C die beiden einfachen Grundpunkte A und B trennt oder nicht. Solche Büschelfälle werden durch Indizes b) bzw. a) bezeichnet (vgl. [3] S. 391, 398; [9]; [12] S. 249).

Im Fall a) bestimmen die KS -e des Büschels auf der absoluten Geraden f eine *hyperbolische Involution*. Diese enthält sowohl reelle als auch konjugiert-komplexe Punktepaare und zwei reelle Fixpunkte. Infolge dessen enthält das Büschel unendlich viele *reelle Hyperbeln*, unendlich viele *reelle Ellipsen* und *zwei reelle Parabeln*. Die Menge der Ellipsen wird von der Menge der Hyperbeln durch die beiden Parabeln getrennt. Eine spezielle Hyperbel der isotropen Ebene trennt die Hyperbeln von 1. und 2. Art.

Im Fall b) bestimmen die KS -Büschels auf der Geraden f eine *elliptische Involution*, die weder reelle Fixpunkte noch konjugiert-komplexe Punktepaare enthält. Der Fall b) stellt daher ein *Hyperbelnbüschel* dar. Die beiden Parabeln dieses Büschels sind konjugiert-komplex (vgl. [3] S. 388–389).

Die *Mittelpunkte* aller KS -e eines Büschels bilden die *Mittelpunktskurve* m^2 2. Ordnung. Diese Kurve ist bei dem Typ IV durch die beiden Hauptpunkte K, L

$L = M$, durch die drei Mittelpunkte der Strecken \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} und die zwei Parabelmittenpunkte, d.h. ihre Achsenfernpunkte ausreichend bestimmt.

m^2 ist im Fall a) eine Hyperbel und im Fall b) eine Ellipse.

Die Hyperbeln des *KS*-Büschels haben im Fall a) ihre Mittelpunkte auf einem Zweig, während die beiden Parabeln ihre Mittelpunkte in den Fernpunkten der Hyperbel m^2 haben. Auf jenem Zweig, der durch die Mittelpunkte der Hyperbeln des Büschels gebildet wird, liegt der Mittelpunkt der speziellen Hyperbel, der die Mittelpunkte der Hyperbeln 1. und 2. Art trennt. (Vgl. [3] S. 399; [7]; [9]).

Die isotropen Brennpunkte der Büschelkegelschnitte bilden die Brennpunktskurve k_f^3 3. Ordnung. Diese Kurve ist im allgemeinen durch die vier Grundpunkte, die drei Hauptpunkte, die beiden Parabelfern Brennpunkte, den absoluten Punkt F und durch jenen Punkt P , der bezüglich des Büschels dem Punkt F konjugiert zugeordnet ist, ausreichend bestimmt. Bei dem Büscheltyp IV fallen vier dieser Punkte zusammen und erst durch eine analytische Untersuchung der einzelnen Fälle, unter Zuhilfenahme syntetischer Methoden, wird die Kurve k_f^3 ausreichend bestimmt (vgl. [5], [7], [8], [9]).

3. DER BÜSCHELUNTERTYP IV₁

Alle Büschelgrundpunkte dieses Untertyps sind eigentlich und keine Verbindungsgerade dieser Punkte ist eine isotrope Gerade.

Die Büschelfälle IV_{1a}), IV_{1a}*, IV_{1b}), IV_{1b}*

Durch eine isotrope Bewegung kann man erreichen, daß der doppelt zählende Punkt $C = D$ in den Ursprung $U(0,0)$ und die gemeinsame Tangente t in die x -Achse des zugrunde gelegten Koordinatensystems fällt. Die Punkte A und B erhalten dann die Koordinaten $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$. Setzt man $\varphi_1 = a_2 : a_1$, $\varphi_2 = b_2 : b_1$, $d_1 = d(C, A) = a_1$, $d_2 = d(C, B) = b_1$, dann werden die Geraden $g_1 := AC$, $g_2 := BC$, $t := CK$, $g := AB$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1 \dots y - \varphi_1 x &= 0, & g_2 \dots y - \varphi_2 x &= 0, & t \dots y &= 0 \\ g \dots (b_2 - a_2)x + (a_1 - b_1)y + (b_1 a_2 - a_1 b_2) &= 0 & \text{bzw.} & & & \\ g \dots \left(\frac{\varphi_2}{d_1} - \frac{\varphi_1}{d_2} \right) x + \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) y + (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 & & & & \end{aligned}$$

beschreiben. Mit den Abkürzungen

$$\frac{\varphi_2}{d_1} - \frac{\varphi_1}{d_2} = R, \quad \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} = S, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = T$$

wird g durch $Rx + Sy + T = 0$ erfaßt.

Die Gleichung eines *KS*-Büschels vom Typ IV erhält man durch

$$\lambda g_1 g_2 + \mu t g = 0, \tag{3.1}$$

d.h. für den Büscheluntertyp IV₁ durch

$$\lambda [y^2 - (\varphi_1 - \varphi_2)xy + \varphi_1\varphi_2x^2] + \mu [y(Rx + Sy + T)] = 0.$$

Führt man den neuen Büschelparameter $\frac{\mu}{\lambda} = \nu$ ein, so erhält man als Normalform dieses Untertyps IV_1

$$F \equiv y^2 - (\varphi_1 + \varphi_2)xy + \varphi_1\varphi_2x^2 + \nu y(Rx + Sy + T) = 0. \quad (3.2)$$

Da die Größen $\varphi_1, \varphi_2, d_1, d_2$ unabhängige geometrische Größe sind, die den Büscheltyp IV_1 eindeutig festlegen und R, S und T Funktionen von $\varphi_1, \varphi_2, d_1$ und d_2 sind, folgt sofort der

SATZ 2. Ein *KS-Büschel vom Untertyp IV_1* ist durch vier Invarianten $\{\varphi_1, \varphi_2, d_1, d_2\}$ bis auf Bewegungen aus \mathcal{B}_3 eindeutig bestimmt.

Zur geometrischen Beschreibung des Büschels leistet die *Mittelpunktskurve m^2* – bestehend aus den Mittelpunkten der *KS-e* des Büschels (3.2) – wertvolle Dienste. Mittels $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ bestimmt man die Gleichung von m^2 zu

$$\left(\frac{1}{\varphi_2 d_1} - \frac{1}{\varphi_1 d_2}\right) y^2 + 2Sxy + Rx^2 + T \left[x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \right) y \right] = 0. \quad (3.3)$$

Um festzustellen, was für eine Kurve m^2 ist, bestimmen wir ihre Fernpunkte. Man findet

$$\left(\frac{1}{\varphi_2 d_1} - \frac{1}{\varphi_1 d_2}\right) y^2 + 2Sxy + Rx^2 = 0, \quad \text{d.h.}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{1,2} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 (d_2 - d_1) \pm (\varphi_1 - \varphi_2) \sqrt{a_2 b_2}}{d_2 \varphi_1 - d_1 \varphi_2}.$$

Daraus folgt unmittelbar, bei der Voraussetzung $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$, daß

$$a_2 b_2 > 0 \text{ genau für } \text{sgn } a_2 = \text{sgn } b_2,$$

$$a_2 b_2 < 0 \text{ genau für } \text{sgn } a_2 \neq \text{sgn } b_2 \text{ gilt.}$$

Somit stellen sich die folgenden bekannten Tatsachen ein:

Die *Mittelpunktskurve m^2* hat genau dann reelle Fernpunkte und ist demnach eine *Hyperbel*, wenn die Grundpunkte A und B auf der *gleichen Seite* der Tangente t liegen. Ein solches Büschel wollen wir als *Büschelfall IV_{1a}* bezeichnen.

Die *Mittelpunktskurve m^2* hat genau dann konjugiert-komplexe Fernpunkte und ist demnach eine *Ellipse*, wenn die Grundpunkte A und B auf *verschiedenen Seiten* der Tangente t liegen. Ein solches Büschel bezeichnen wir als *Büschelfall IV_{1b}* .

Die isotrope *Brennpunktskurve k_f^3* 3. Ordnung besteht aus allen jenen Punkten der *KS-e* des Büschels, deren Tangenten isotrop sind. Aus $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ findet man als Gleichung von k_f^3

$$Rx(\varphi_1\varphi_2x^2 - y^2) + Sy[2\varphi_1\varphi_2x^2 - (\varphi_1 + \varphi_2)xy] + T(\varphi_1\varphi_2x^2 - y^2) = 0. \quad (3.4)$$

Die Fernpunkte dieser Kurve sind der absolute Punkt $F(0 : 0 : 1)$ und die beiden Fernpunkte von m^2 , welche gleichzeitig die *Mittel-* und *Brennpunkte* der beiden Parabeln des Büschels sind. Im *Fall a)* sind diese Punkte und die Parabeln *reell*, im *Fall b)* sind diese Punkte und diese beiden Parabeln *konjugiert-komplex*.

Der Doppelgrundpunkt $C = U(0, 0)$ ist ein singulärer Punkt der Kurve k_f^3 , da $\frac{\partial k_f}{\partial x}(C) = 0$, $\frac{\partial k_f}{\partial y}(C) = 0$ gilt. Berechnet man weiters $\frac{\partial^2 k_f}{\partial x^2}(C) = 2T\varphi_1\varphi_2$, $\frac{\partial^2 k_f}{\partial y^2}(C) = -2T$, $\frac{\partial^2 k_f}{\partial x\partial y}(C) = 0$ und $D = -4\varphi_1\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \neq 0$, so folgt, daß $D < 0$ genau für $\text{sgn } \varphi_1 = \text{sgn } \varphi_2$ gilt.

Die Kurve k_f^3 hat dann im Punkt $C = U(0, 0)$ einen *Knoten* mit den beiden reellen Tangenten $y = \pm\sqrt{\varphi_1\varphi_2}x$.

Es gilt $D > 0$ genau für $\text{sgn } \varphi_1 \neq \text{sgn } \varphi_2$.

Die Kurve k_f^3 hat dann im Punkt $C = U(0, 0)$ einen *isolierten Punkt*. Ein *KS-Büschel* bei dem die Brennpunktskurve k_f^3 einen *isolierten Punkt* besitzt, wird i.f. mit * bezeichnet. Damit erhalten wir den

SATZ 3. Die Brennpunktskurve k_f^3 des Untertyp IV_1 hat im Doppelpunkt C genau dann einen *Knoten*, wenn $\text{sgn } \varphi_1 = \text{sgn } \varphi_2$ gilt. Dabei ist $\varphi_1 = \sphericalangle(CA, t)$ und $\varphi_2 = \sphericalangle(CB, t)$. Die reellen Tangenten von k_f^3 im Punkt C liegen symmetrisch zur Büscheltangente t im Punkt C . Die Kurve k_f^3 hat im Grundpunkt C genau für $\text{sgn } \varphi_1 \neq \text{sgn } \varphi_2$ einen *isolierten Punkt*.

SATZ 4. Ein allgemeines *KS-Büschel* des Untertyp IV_1 liefert folgende vier Büschelfälle:

- $IV_{1a})$ $\text{sgn } a_2 = \text{sgn } b_2$ und $\text{sgn } \varphi_1 = \text{sgn } \varphi_2$ (Abb. 3)
 IV_{1a^*} $\text{sgn } a_2 = \text{sgn } b_2$ und $\text{sgn } \varphi_1 \neq \text{sgn } \varphi_2$ (Abb. 4)

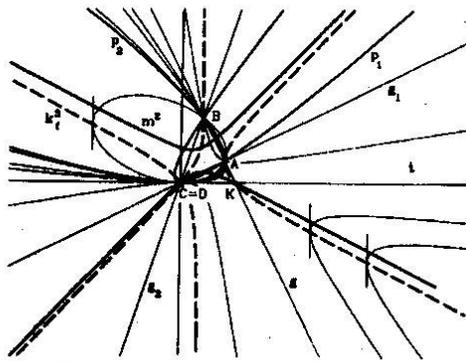


Abb. 3.

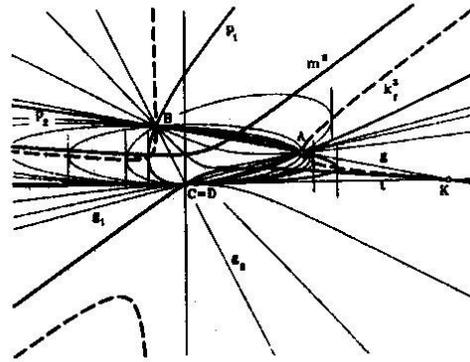


Abb. 4.

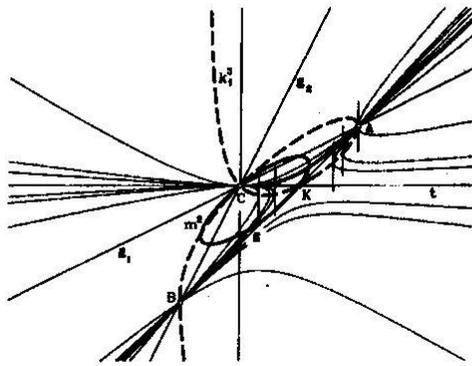


Abb. 5.

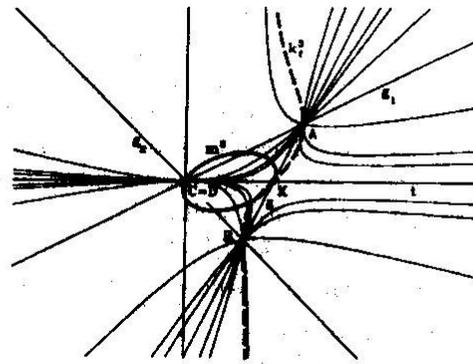


Abb. 6.

IV_{1b}) $\text{sgn } a_2 \neq \text{sgn } b_2$ und $\text{sgn } \varphi_1 = \text{sgn } \varphi_2$ (Abb. 5)

IV_{1b}• $\text{sgn } a_2 \neq \text{sgn } b_2$ und $\text{sgn } \varphi_1 \neq \text{sgn } \varphi_2$ (Abb. 6)

Als numerisches Beispiel sei IV_{1a}• dargestellt, wobei die Grundpunkte $A(4, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 0)$ gewählt wurden und die isotropen Winkel erhalten die Werte $\varphi_1 = 0,25$ $\varphi_2 = -2$. Die Normalform dieses KS-Büschels lautet

$$F \equiv 4y^2 + 7xy - 2x^2 + \nu(-xy - 5y^2 + 9y) = 0.$$

Die *Mittelpunktskurve*

$$m^2 \dots 4x^2 - 62y^2 + 40xy - 36x + 63y = 0$$

hat die Fernpunkte $\left(\frac{y}{x}\right)_{1,2} = \frac{10 \pm 9\sqrt{2}}{31}$ und ist daher eine *Hyperbel*.

Die *isotrope Brennpunktskurve*

$$k_f^3 \dots 2x^3 + 20x^2y - 31xy^2 - 18x^2 - 36y^2 = 0$$

hat im Punkt $C(0, 0)$ einen *isolierten Punkt*, da $D(C) = 40,5 > 0$ ist. Die Büschelparabel p_1 bzw. p_2 wird für $\nu_1 = 27 - 18\sqrt{2} = 1,544155877$ bzw. $\nu_2 = 27 + 18\sqrt{2} = 52,455844123$ und die spezielle Hyperbel für $\nu = 0,8$ erhalten. Dadurch ist es möglich die ν -Werte für die Ellipsen und Hyperbeln 1. bzw. 2. Art zu bestimmen. Die Hyperbeln 1. Art haben bekanntlich reelle isotrope Brennpunkte, die Hyperbeln 2. Art besitzen keine reellen Brennpunkte. Man findet

Ellipsen für $1,544 \dots < \nu < 52,45 \dots$

Hyperbeln 1. Art für $-\infty < \nu < 0,8$ bzw. $52,45 \dots < \nu < +\infty$ und

Hyperbeln 2. Art für $0,8 < \nu < 1,544 \dots$

Die Geradenpaare (g_1, g_2) , (g, t) treten als singuläre Hyperbeln 1. Art auf. Das Geradenpaar (g_1, g_2) hat seinen Brennpunkt im isolierten Punkt C von k_f^3 , das Geradenpaar (g, t) im Schnittpunkt K dieser Geraden, wobei die Punkte C und K die Hauptpunkte dieses KS-Büschels sind.

Die Büschelfälle IV_{1c} und IV_{1c^*}

Wir untersuchen, wann genau eine der beiden reellen Parabeln der Büschelfälle IV_{1a}) bzw. IV_{1a^*} in das parallele Geradenpaare (g, t) ausartet.

Da die Gerade t durch eine isotrope Bewegung in die x -Achse des Koordinatensystems gelegt werden kann, mögen die Punkte A und B die Koordinaten $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ besitzen. Durch eine Schiebung kann der Doppelgrundpunkt C in den Ursprung $U(0, 0)$ des Koordinatensystems gelegt werden. Die Neigungswinkel der Geraden g_1 und g_2 sind dann $\varphi_1 = \frac{a_2}{d_1}$, $\varphi_2 = \frac{a_2}{d_2}$ mit $a_1 = d_1$, $b_1 = d_2$ bzw. $a_2 = \varphi_1 d_1 = \varphi_2 d_2$.

Damit haben wir den

SATZ 5. Eine reelle Parabel des Büschelfalls IV_{1a}) bzw. IV_{1a^*} entartet in das parallele Geradenpaare (g, t) genau dann, wenn sich die Winkel $\sphericalangle(CA, t)$ und $\sphericalangle(CB, t)$ so verhalten, wie die isotropen Abstände der Punkte B und A vom Punkt C .

Ein solches Büschel werde mit dem Index c bezeichnet.

Als Normalform eines KS -Büschelfalls IV_{1c} erhält man

$$F \equiv y^2 - (\varphi_1 + \varphi_2)xy + \varphi_1\varphi_2x^2 + \nu(y^2 - \varphi_1d_1y) = 0. \quad (3.5)$$

Die Mittelpunktskurve m^2 zerfällt hier in die Gerade m_1

$$(\varphi_1 + \varphi_2)y - 2\varphi_1\varphi_2x = 0 \quad (3.6)$$

als Menge der Mittelpunkte aller regulären KS -e samt dem Geradenpaar (g_1, g_2) , und in die Gerade m_2

$$2y - \varphi_1d_1 = 0, \quad (3.7)$$

welche die Mittellinie des Geradenpaares (g, t) darstellt.

Als Brennpunktskurve k_f^3 gewinnt man

$$\varphi_1d_1y^2 - (\varphi_1 + \varphi_2)xy^2 + 2\varphi_1\varphi_2x^2y - \varphi_1^2\varphi_2x^2 = 0. \quad (3.8)$$

Im singulären Punkt $C(0, 0)$ der Kurve k_f^3 hat die Größe D den Wert $D = -(\varphi_1\varphi_2) \cdot 4\varphi_1^2$.

Es gilt $D < 0$ genau dann, wenn $\text{sgn } \varphi_1 = \text{sgn } \varphi_2$ ist; die Kurve k_f^3 hat dann in C einen Knoten. Dieser Büschelfall wird mit IV_{1c} bezeichnet.

Es gilt $D > 0$ genau dann, wenn $\text{sgn } \varphi_1 \neq \text{sgn } \varphi_2$ ist; die Kurve k_f^3 hat dann in C einen isolierten Punkt und wir wollen diesen Büschelfall mit IV_{1c^*} bezeichnen.

Damit haben wir

SATZ 6. Es sei (C, t) ein nichtisotropes Linienelement und die Gerade $g := AB$ eine zu t parallele Gerade. Dann zerfällt die Mittelpunktskurve m^2 in die Verbindungsgerade m_1 des Punktes C mit dem Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} und in die Mittellinie m_2 des Geradenpaares (g, t) . Alle KS -e durch A und B die die Gerade t im Punkt C berühren und deren Mittelpunkte länges der Geraden m_2 liegen, bilden ein KS -Büschel des Falls IV_{1c} bzw. IV_{1c^*} .

SATZ 7. Die Brennpunktskurve eines KS-Büschels des Falls IV_{1c} bzw. IV_{1c^*} der isotropen Ebene ist eine rationale Kurve 3. Ordnung, die im Punkt C einen Knoten bzw. einen isolierten Punkt hat, je nachdem die Vorzeichen der Winkel $\angle(CA, t)$, $\angle(CB, t)$ untereinander gleich (Fall IV_{1c}) oder entgegengesetzt (Fall IV_{1c^*}) sind.

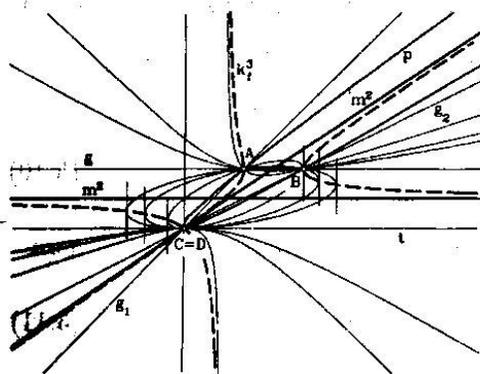


Abb. 7.

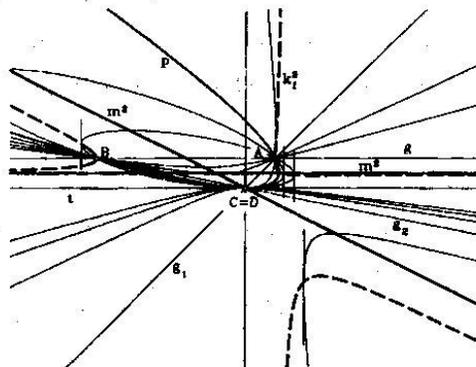


Abb. 8.

Die Abb. 8 stellt ein KS-Büschel des Falls IV_{1c^*} dar.

Es ist durch die Punkte $A(1, 1)$, $B(-5, 1)$, $C(0, 0)$ und die Tangente $t \dots y = 0$ bestimmt. Seine Normalform lautet:

$$F \equiv 5y^2 - 4xy - x^2 + \nu \cdot y(y - 1) = 0 \quad \text{und man findet}$$

$$m_1 \dots 2y + x = 0, \quad m_2 \dots 2y - 1 = 0,$$

$$k_f^3 \dots 5y^2 - 4xy^2 - 2x^2y + x^2 = 0.$$

Die Brennpunktskurve k_f^3 besitzt hier die Fernpunkte $F(0 : 0 : 1)$, $K(0 : 1 : 0)$ und $P(0 : -2 : 1)$. Nebst dem absoluten Punkt stellt sich somit der Fernbrennpunkt P der Parabel $p_1 \dots 4y^2 + 4xy + x^2 - 9y = 0$ ein, die man für $\nu = -9$ erhält. Der Fernpunkt K des parallelen Geradenpaares $\{g \dots y = 1, t \dots y = 0\}$ gehört zu $\nu = \infty$. Die spezielle Hyperbel erhält man für $\nu = -5$.

Die Büschelart $IV_{1,1}$

Die Büschelfälle $IV_{1,1a}$ und $IV_{1,1a^*}$

Berührt eine der beiden Parabeln des Falls IV_{1a} bzw. IV_{1a^*} die absolute Gerade f genau im Punkt F , dann ist diese Parabel ein *isotroper, parabolischer Kreis* und wir haben einen Unterfall $IV_{1,1a}$ bzw. $IV_{1,1a^*}$ dieses Büschels erhalten. Um die Gleichung dieses isotropen Kreises bzw. die Normalform dieses Unterfalls

zu bestimmen, suchen wir ausgehend von (3.2), jenen Büschelkegelschnitt k , der F enthält. Man findet die Bedingung $y^2(1 + \nu S) = 0$ und somit $\nu = -\frac{1}{S}$, womit sich für k die Gleichung

$$\varphi_1\varphi_2x^2 - (\varphi_1 + \varphi_2)xy - \frac{1}{S}y(Rx + T) = 0 \quad (3.9)$$

einstellt. Damit (3.9) ein parabolischer Kreis wird, muß k im Punkt F die absolute Gerade berühren. Dies liefert die Bedingung $\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{R}{S} = 0$, bzw. $\varphi_1 : \varphi_2 = d_1 : d_2$ und damit die Gleichung des isotropen parabolischen Kreises p_k zu

$$y = \frac{S}{T}\varphi_1\varphi_2x^2. \quad (3.10)$$

Als Normalform eines KS-Büschels des Falls $IV_{1,1a}$ erhält man

$$F \equiv y^2 + \frac{R}{S}xy + \varphi_1\varphi_2x^2 + \nu y(Rx + Sy + T) = 0. \quad (3.11)$$

Die Mittelpunktskurve m^2

$$2R\varphi_1\varphi_2x^2 + 4S\varphi_1\varphi_2xy + 2T\varphi_1\varphi_2x + \frac{TR}{S}y = 0 \quad (3.12)$$

hat ihre Fernpunkte in den Punkten $M_1 = F(0 : 0 : 1)$ und $M_2(0 : 2S : -R)$. Somit ist m^2 eine spezielle Hyperbel.

SATZ 8. Ein KS-Büschel IV_{1a} enthält genau dann einen isotropen parabolischen Kreis, wenn sich die Winkel $\sphericalangle(CA, t)$ und $\sphericalangle(CB, t)$ so verhalten, wie die isotropen Abstände der Punkte A und B vom Punkt C . In diesem Fall ist die Mittelpunktskurve eine spezielle Hyperbel.

Die Gleichung der isotropen Brennpunktskurve k_f^3 lautet

$$(Rx^3 + 2Sx^2y + Tx^2)\varphi_1\varphi_2 - Ty^2 = 0. \quad (3.13)$$

Die Fernpunkte dieser Kurve sind der absolute Punkt $F(0 : 0 : 1)$, in dem k_f^3 die absolute Gerade f berührt und der Punkt $M(0 : 2S : -R)$, der gleichzeitig Fernpunkt der Kurve m^2 ist.

Die Größe D im singulären Punkt $C = U(0, 0)$ der Kurve k_f^3 hat die Form $D(C) = (-\varphi_1\varphi_2) \cdot 4T^2$. Demnach gilt $D < 0$ genau dann, wenn $\text{sgn } \varphi_1 = \text{sgn } \varphi_2$ ist; die Kurve k_f^3 hat dann im Punkt C einen Knoten. Ein solches Büschel wird mit $IV_{1,1a}$ bezeichnet.

Es gilt $D > 0$ genau dann, wenn $\text{sgn } \varphi_1 \neq \text{sgn } \varphi_2$ ist; die Kurve k_f^3 hat dann im Punkt C einen isolierten Punkt. Ein solches Büschel werden wir mit $IV_{1,1a^*}$ bezeichnen.

SATZ 9. Die isotrope Brennpunktkurve k_f^3 eines Büschels der Art $IV_{1,1a}$ ist eine rationale Kurve dritter Ordnung, die im Punkt C einen Knoten bzw. einen isolierten Punkt hat, je nachdem die Vorzeichen der Winkel $\angle(CA, t)$, $\angle(CB, t)$ untereinander gleich (Fall $IV_{1,1a}$) oder entgegengesetzt (Fall $IV_{1,1a^*}$) sind. Sie berührt die absolute Gerade f im absoluten Punkt F und besitzt die nichtisotrope Asymptote der Mittelpunktshyperbel m^2 als eigene Asymptote.

Die Gleichung dieser gemeinsamen Asymptote lautet

$$y = -\frac{R}{2S}x + \frac{R^2T - 4S^2T\varphi_1\varphi_2}{8S^3\varphi_1\varphi_2}. \quad (3.14)$$

Aus der Bedingung $\varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{R}{S}$ und der Gleichung $\varphi_1 - \varphi_2 = T$ erhält man durch Elimination $\varphi_1 = 0,5 \left(T - \frac{R}{S} \right)$, $\varphi_2 = -0,5 \left(T + \frac{R}{S} \right)$. Somit wird $\varphi_1\varphi_2 = 0,25 \left(\frac{R^2}{S^2} - T^2 \right)$ und die Normalform (3.11) läßt sich in Abhängigkeit der 3 Größen R , S und T beschreiben. Da diese geometrische Größen sind, folgt somit der

SATZ 10. Ein KS -Büschel der isotropen Ebene der Art $IV_{1,1a}$ ist bis auf isotrope Bewegungen durch 3 Invarianten $\{\varphi_1, \varphi_2, d_1\}$ eindeutig bestimmt.

Ein Beispiel für den Fall $IV_{1,1a^*}$ stellt die Abb. 9 dar. Es wurde $A(1, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(0, 0)$ gewählt. Man findet

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1, & \varphi_2 &= -2, & \varphi_2 : d_2 &= \varphi_1 : d_1 = 1, \\ F &\equiv y^2 + xy - 2x^2 + \nu(y^2 + xy - 2y) = 0, \\ m^2 &\dots 2(x + 2y - 2)x + y = 0, \\ k_f^3 &\dots (x + 2y - 2)x^2 - y^2 = 0, & D(C) &= 72 > 0, \end{aligned}$$

den parabolischen Kreis $p_1 \dots y = x^2$ für $\nu = -1$ und die Parabel $p_2 \dots y^2 + 2xy + x^2 - 4,5y = 0$ für $\nu = -9$.

Der Büschelfall $IV_{1,1c}$

Berührt die reguläre Parabel des Büschels IV_{1c} die absolute Gerade im absoluten Punkt F , dann ist diese Parabel ein *parabolischer Kreis*. Ein KS -Büschel des Falls IV_{1c} enthält den absoluten Punkt $F(0 : 0 : 1)$ für genau $\nu = -1$. Damit dieser KS noch einen weiteren Schnittpunkt mit f in F besitzt, muß gelten $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ und die Gleichung des parabolischen Büschelkreises lautet dann

$$x^2 - d_1y = 0. \quad (3.15)$$

Als *Normalform* dieses Büschels, das wir mit $IV_{1,c}$ bezeichnen wollen, gewinnt man

$$F \equiv y^2 - \varphi_1^2 x^2 - \nu (y^2 - \varphi_1 d_1 y) = 0. \quad (3.16)$$

Wegen $a_2 = b_2$ (vgl. $IV_{1,c}$) und $\varphi_1 = -\varphi_2$ erkennt man, daß alle *KS*-e des Falls $IV_{1,c}$ zur Geraden $x = 0$ symmetrisch liegen.

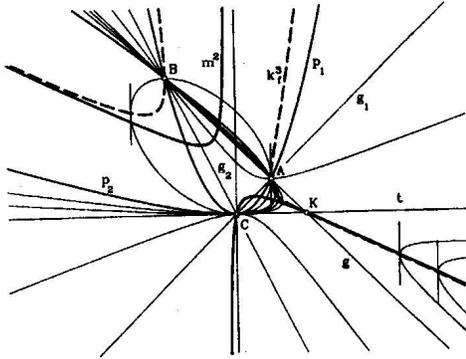


Abb. 9.

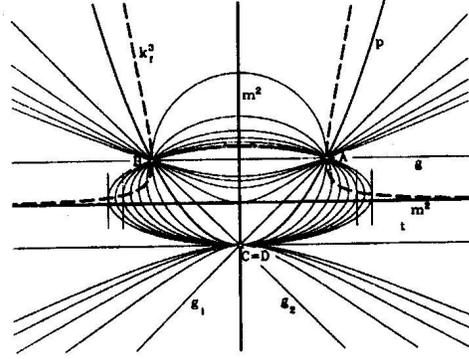


Abb. 10.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 dieses Büschels zerfällt in zwei Geraden m und m_1 . Die Mittelpunkte aller *KS*-e liegen auf der Geraden

$$m \dots x = 0, \quad (3.17)$$

während die Gerade

$$m_1 \dots y = 0,5\varphi_1 d_1 \quad (3.18)$$

die Mittelpunkte der Strecken \overline{AC} , \overline{BC} und den Fernpunkt K enthält. Somit gehört die Gerade m_1 als Mittellinie des Geradenpaares (g, t) der Kurve m^2 an.

SATZ 11. Ein *KS*-Büschel des Falls $IV_{1,c}$ enthält genau dann einen isotropen parabolischen Kreis, wenn es zu einer isotropen Geraden m symmetrisch ist; m enthält die Mittelpunkte aller *KS*-e.

Für die *Brennpunktskurve* k_f^3 gewinnt man die Gleichung

$$\varphi_1 (2y - \varphi_1 d_1) x^2 - d_1 y^2 = 0. \quad (3.19)$$

Der Punkt $C = U(0, 0)$ ist stets ein isolierter Punkt, da $D = 4\varphi_1^2 d_1^2 > 0$ gilt. Diesen Fall kann man daher mit IV_{1,c^*} bezeichnen. Damit erhält man unmittelbar:

SATZ 12. Die isotrope Brennpunktskurve k_f^3 eines *KS*-Büschels des Falls $IV_{1,c}$ ist eine rationale Kurve 3. Ordnung. Sie liegt symmetrisch bezüglich der Mittelpunktsgeraden m , enthält die Punkte A und B , berührt die absolute Gerade f

im absoluten Punkt F und besitzt eine nicht isotrope Asymptote, die mit der Symmetriegeraden m_1 des Geradenpaares (g, t) übereinstimmt. Der Punkt C ist stets ein isolierter Punkt von k_f^3 .

SATZ 13. Ein KS-Büschel des Falls $IV_{1,1c}$ ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ eindeutig bestimmt. Dieses zur Geraden m symmetrisch gelegene Büschel enthält Ellipsen. Hyperbeln von durchwegs 2. Art und einen isotropen parabolischen Kreis, während die zweite Parabel in das parallele Geradenpaar (g, t) degeneriert ist.

4. DER BÜSCHELUNTERTYP IV_2

Genau eine der Verbindungsgeraden der eigentlichen Büschelgrundpunkte ist in diesem Untertyp IV_2 eine *isotrope Gerade*.

Die Büschelart $IV_{2,1}$

Die Büschelfälle $IV_{2,1a}$, $IV_{2,1b}$

Die Gerade $g := AB$ sei *isotrop*. Durch eine isotrope Bewegung kann man erreichen, daß der doppel zu zählende Grundpunkt C in den Ursprung $U(0, 0)$ und die gemeinsame Tangente t in die x -Achse des Koordinatensystems fällt. Die parallelen Punkte A und B erhalten dann die Koordinaten $A(a_1, a_2)$, $B(a_1, b_2)$, so daß die Winkel $\varphi_1 = a_2 : a_1$, $\varphi_2 = b_2 : a_1$ in der Beziehung $\varphi_1 : \varphi_2 = a_2 : b_2$ stehen.

SATZ 14. In der Büschelart $IV_{2,1}$ verhalten sich die Winkel $\sphericalangle(CA, t)$, $\sphericalangle(CB, t)$ wie die Abstände der Punkte A und B von der Tangente t .

Die Gleichungen der Verbindungsgeraden der Büschelgrundpunkte sowie die *Normalform* dieses Büschels sind im Vergleich mit dem Büscheluntertyp IV_1 hier wesentlich einfacher:

$$\begin{aligned} g_1 \dots y - \varphi_1 x &= 0, & g_2 \dots y - \varphi_2 x &= 0, & t \dots y &= 0, \\ g \dots x - d_1 &= 0; & a_1 &= d_1, \\ F \equiv y^2 - (\varphi_1 + \varphi_2) xy + \varphi_1 \varphi_2 x^2 + \nu y(x - d_1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die *Mittelpunktskurve* m^2 hat die Form

$$2y^2 - 2\varphi_1 \varphi_2 (x - d_1)x - (\varphi_1 + \varphi_2) d_1 y = 0. \quad (4.2)$$

Um die Fernpunkte dieser Kurve zu bestimmen, schneidet man sie mit der Ferngeraden $f(x_0 = 0)$ und erhält

$$y^2 - \varphi_1 \varphi_2 x^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{y}{x}\right)_{1,2} = \pm \sqrt{\varphi_1 \varphi_2}.$$

Gilt $\text{sgn } \varphi_1 = \text{sgn } \varphi_2$, dann sind die Fernpunkte von m^2 reell und die Mittelpunktskurve m^2 ist eine Hyperbel. Ein solches Büschel wird mit $IV_{2,1a}$ bezeichnet.

Gilt $\text{sgn } \varphi_1 \neq \text{sgn } \varphi_2$, dann sind die Fernpunkte von m^2 konjugiert-komplex und m^2 ist eine Ellipse. Ein solches Büschel wird mit $IV_{2,1b}$ bezeichnet.

Die isotrope Brennpunktskurve k_f^3 zerfällt in die drei Geraden

$$x - d_1 = 0; \quad y \pm \sqrt{\varphi_1 \varphi_2} x = 0. \quad (4.3)$$

Die Gerade $x = d_1$ enthält die Brennpunkte des Geradenpaares (g, t) , das als singuläre, spezielle Hyperbel aufgefaßt werden kann.

Im Fall $IV_{2,1a}$ stellt der Rest von k_f^3 zwei reelle, sich im Punkt C schneidende Geraden dar.

Im Fall $IV_{2,1b}$ besteht der Rest vom k_f^3 aus zwei konjugiert-komplexen sich im reellen Punkt C schneidenden Geraden. Man erkennt den

SATZ 15. *Ein KS-Büschel der Art $IV_{2,1}$ ist bis auf isotrope Bewegungen durch drei Invarianten $\{\varphi_1, \varphi_2, d_1\}$ eindeutig bestimmt.*

Das Ellipsen-Hyperbel-Büschel der Art $IV_{2,1}$ enthält ebenfalls zwei reelle Parabeln. Diese werden durch $\nu = \varphi_1 + \varphi_2 \mp 2\sqrt{\varphi_1 \varphi_2}$ als

$$p_{1,2} \equiv y^2 \mp 2\sqrt{\varphi_1 \varphi_2} xy + \varphi_1 \varphi_2 x^2 - [(\varphi_1 + \varphi_2) \mp 2\sqrt{\varphi_1 \varphi_2}] d_1 y = 0 \quad (4.4)$$

bestimmt. Das Geradenpaar (g, t) als eine spezielle singuläre Hyperbel trennt die Hyperbeln von 1. und 2. Art. $\varphi_1 = \varphi_2$ liefert eine Ausartung des Büschels.

SATZ 16. *Der Büschelfall $IV_{2,1a}$ als ein Unterfall von $IV_{2,1}$ ist durch $\text{sgn } \varphi_1 = \text{sgn } \varphi_2$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$ gekennzeichnet. Ein solches Büschel, dessen Grundpunkte A und B parallel sind, enthält Ellipsen sowie Hyperbeln 1. und 2. Art, die das Geradenpaar (g, t) als eine spezielle singuläre Hyperbel trennt, und zwei reelle Parabeln. Seine Mittelpunktskurve m^2 ist eine Hyperbel, während die Brennpunktskurve k_f^3 3. Ordnung in die Gerade $g := AB$ und in zwei zu den Asymptoten von m^2 parallele und sich in C schneidende Geraden zerfällt.*

SATZ 17. *Der Büschelfall $IV_{2,1b}$ ist als ein Unterfall von $IV_{2,1}$ durch $\text{sgn } \varphi_1 \neq \text{sgn } \varphi_2$ gekennzeichnet. Da die gemeinsame Tangente t durch den eigentlichen Punkt C keine isotrope Gerade ist und die Grundpunkte A und B parallel sind, besteht dieses KS-Büschel nur aus Hyperbeln 2. Art. Die Mittelpunktskurve m^2 ist eine Ellipse, während die Brennpunktskurve k_f^3 in die reelle isotrope Gerade $g := AB$ und die zwei sich im reellen Punkt C schneidende konjugiert-komplexe Geraden zerfällt. Im Fall $IV_{2,1b}$ hat die Kurve k_f^3 im Punkt C stets einen isolierten Punkt. Dieses Büschel wird daher mit $IV_{2,1b^*}$ bezeichnet.*

Wählt man $\varphi_1 = -\varphi_2$, so ist die Tangente t eine Symmetrieachse des Büschels.

Die Büschelart IV_{2,2}

Die Büschelfälle IV_{2,2a}, IV_{2,2b}

Die gemeinsame Tangente t sei isotrop. Durch eine isotrope Bewegung ist es möglich den eigentlichen Punkt C in den Ursprung $U(0, 0)$ des Koordinatensystems zu legen. Durch eine weitere isotrope Bewegung, die (C, t) als ganzes festläßt, ist noch zu erreichen, daß A die Koordinaten $A(a_1, 0)$ erhält. B besitzt dann die Koordinaten $B(b_1, b_2)$. Setzt man $\varphi_2 = b_2 : b_1$, dann werden die Geraden g_1, g_2, g, t durch die Gleichungen $g_1 \dots y = 0, g_2 \dots y - \varphi_2 x = 0, g \dots Rx + Sy + T = 0$ und $t \dots x = 0$ mit den Abkürzungen $R := \varphi_2 : a_1, S := 1 : b_1 - 1 : a_1, T := -\varphi_2$ beschreiben.

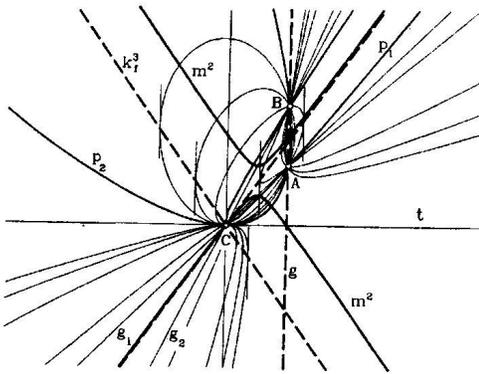


Abb. 11.

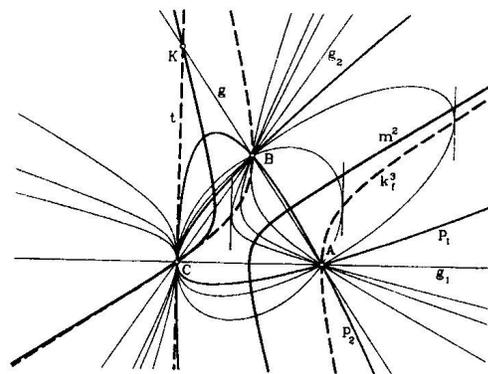


Abb. 12.

In üblicher Weise gewinnt man als *Normalform* dieses *KS*-Büschels

$$F \equiv y(y - \varphi_2 x) + \nu x(Rx + Sy + T) = 0 \quad (4.5)$$

und als *Mittelpunktskurve* m^2

$$R\varphi_2 x^2 - 2Rxy - Sy^2 + 0,5T\varphi_2 x - Ty = 0. \quad (4.6)$$

Ihre Fernpunkte sind durch

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{1,2} = \frac{R \pm \frac{\varphi_2}{\sqrt{a_1 b_1}}}{S}$$

gegeben. m^2 wird eine Hyperbel genau für $\text{sgn } a_1 = \text{sgn } b_1$; dieser Büschelfall werde mit IV_{2,2a} bezeichnet. m^2 wird eine Ellipse genau für $\text{sgn } a_1 \neq \text{sgn } b_1$; dieser Büschelfall werde mit IV_{2,2b} bezeichnet.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3

$$x(R\varphi_2 x^2 - Sy^2 - 2Rxy + T\varphi_2 x - 2Ty) = 0 \quad (4.7)$$

zerfällt in die gemeinsame Tangente $t(x = 0)$ und in einem Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt ist für den Fall $IV_{2,2a}$ eine Hyperbel und für den Fall $IV_{2,2b}$ eine Ellipse.

SATZ 18. *Ein KS-Büschel der isotropen Ebene der Büschelart $IV_{2,2}$ ist bis auf isotrope Bewegung durch 3 Invarianten $\{a_1, b_1, b_2\}$ eindeutig bestimmt. Ein solches Büschel gehört dem Fall a bzw. dem Fall b an, je nachdem die Grundpunkte A und B auf der gleichen Seite der gemeinsamen Tangente t liegen oder die Tangente t diese Punkte A und B trennt.*

SATZ 19. *Ein KS-Büschel des Falls $IV_{2,2a}$ enthält Ellipsen, zwei Parabeln und nur Hyperbeln 1. Art, da (C, t) ein Linienelement aller Büschelkegelschnitte ist. Die Mittelpunktskurve ist eine Hyperbel, während die Brennpunktskurve in die Gerade t und in eine Hyperbel zerfällt. Die Fernpunkte dieser beiden Hyperbeln sind identisch und stimmen mit den Fernpunkten der Parabeln des Büschels überein.*

SATZ 20. *Ein KS-Büschel des Falls $IV_{2,2b}$ ist ein Hyperbelbüschel, das aus lauter Hyperbeln 1. Art besteht. Die Mittelpunktskurve m^2 ist eine Ellipse. Die Brennpunktskurve k_f^3 zerfällt in die Gerade $t(x = 0)$, die die Brennpunkte der speziellen singulären Hyperbel $t \cdot g = 0$ trägt, und in eine mit m^2 homotetische Ellipse, die von den anderen Brennpunkten der Hyperbeln erzeugt wird.*

Vgl. [3] S. 398, 2B.

Die Büschelart $IV_{2,3}$

Die Büschelfälle $IV_{2,3a}$, $IV_{2,3b}$

Genau eine der Verbindungsgeraden des Doppelpunktes C mit einem einfachen Grundpunkt ist in dieser Büschelart *isotrop*. Diese Gerade sei g_1 . Durch eine isotrope Bewegung kann der Punkt C in den Ursprung $U(0, 0)$ und die Tangente t in die x-Achse des Koordinatensystems gelegt werden. Da die Gerade $g_1 := AC$ isotrop ist, besitzen die Punkte A und B die Koordinaten $A(0, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ mit $b_1 \neq 0$.

In üblicher Weise erhält man die Normalform eines Büschels der Art $IV_{2,3}$ zu

$$F \equiv x(y - \varphi_2 x) + \nu y \left(y - a_2 - \varphi_2 x - \frac{a_2}{b_1} x \right) = 0 \quad (4.8)$$

mit $\varphi_2 = b_2 : b_1$.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 hat die Form

$$2b_1 y^2 - 4b_2 xy + 2(b_2 - a_2)\varphi_2 x^2 - a_2 b_1 y + 2a_2 b_2 x = 0. \quad (4.9)$$

Ihre Fernpunkte sind durch $\left(\frac{y}{x}\right)_{1,2} = \frac{b_2 \pm \sqrt{a_2 b_2}}{b_1}$ gegeben.

Gilt $\text{sgn } a_2 = \text{sgn } b_2$, so ist die Kurve m^2 eine Hyperbel und es liegt der Büschelfall $IV_{2,3a}$ vor.

Für $\text{sgn } a_2 \neq \text{sgn } b_2$ ist die Kurve m^2 eine Ellipse; dieser Büschelfall werde mit $IV_{2,3b}$ bezeichnet.

Die isotrope Brennpunktskurve k_f^3

$$x [b_2(b_2 - a_2)x^2 - 2b_1b_2xy + b_1^2y + b_1b_2a_2x] = 0 \quad (4.10)$$

hat ihre Fernpunkte im absoluten Punkt F und in den Fernpunkte der Kurve m^2 .

SATZ 21. Ein KS-Büschel der Art $IV_{2,3}$ ist bis auf isotrope Bewegungen durch drei Invarianten $\{a_2, b_1, b_2\}$ eindeutig bestimmt. Ein solches Büschel gehört zum Fall a) bzw. b), je nachdem die Grundpunkte A und B auf der gleichen bzw. verschiedenen Seiten der Tangente t liegen.

SATZ 22. Ein KS-Büschel des Falls $IV_{2,3a}$ enthält außer Ellipsen und zwei Parabeln noch Hyperbeln von 1. und 2. Art, die durch die spezielle singuläre Hyperbel $g_1 \cdot g_2 = 0$ getrennt werden. Die Mittelpunkte dieser KS-e bilden eine Hyperbel m^2 , deren eine Zweig von den Ellipsenmittelpunkten und deren andere Zweig von den Hyperbelmittelpunkten bzw. den Fernpunkten der Büschelparabeln erzeugt wird. Der Schnittpunkt C der Geraden g_1 und g_2 trennt die Mittelpunkte der Hyperbeln 1. und 2. Art. Die isotrope Brennpunktskurve k_f^3 zerfällt in eine mit m^2 homotetische Hyperbel und in die isotrope Gerade g_1 , die die Brennpunkte von $g_1 \cdot g_2 = 0$ trägt.

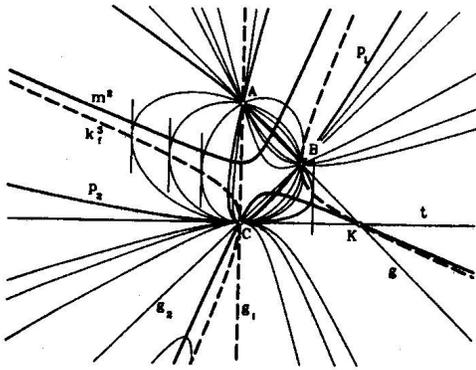


Abb. 13.

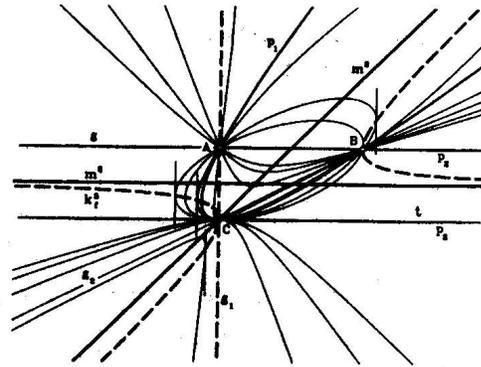


Abb. 14.

SATZ 23. Ein KS-Büschel des Falls $IV_{2,3b}$ ist ein Hyperbel-Büschel aus Hyperbeln 1. und 2. Art, die durch die spezielle singuläre Hyperbel $g_1 \cdot g_2 = 0$ getrennt werden. Die Mittelpunktskurve m^2 ist eine Ellipse, die Brennpunktskurve k_f^3 zerfällt in eine mit m^2 homothetische Ellipse und in die isotrope Gerade g_1 als Brennpunktskurve von $g_1 \cdot g_2 = 0$.

Der Büschelfall $IV_{2,3c}$

Damit eine der beiden Parabeln des Falls $IV_{2,3a}$ in zwei parallele Geraden g und t ausartet, müssen die Punkte A und B die Koordinaten $A(0, b_2)$ und $B(b_1, b_2)$ besitzen. Als *Normalform* dieses Büschels, das mit $IV_{2,3c}$ bezeichnet wird, erhält man

$$y^2 - b_2y + (b_1xy - b_2x^2) = 0. \quad (4.11)$$

Die *Mittelpunktskurve* m^2 zerfällt in zwei Geraden

$$(b_2 - 2y)(b_1y - 2b_2x) = 0, \quad (4.12)$$

wobei die Gerade $b_1y - 2b_2x = 0$ die Menge der Mittelpunkte aller *KS*-e, einschließlich der Geradenpaare (g_1, g_2) , (g, t) trägt, und die Gerade $2y - b_2 = 0$ die Mittellinie des Geradenpaares (g, t) darstellt.

Als *Brennpunktskurve* k_f^3 gewinnt man

$$x(b_1y^2 - 2b_2xy + b_2^2x) = 0, \quad (4.13)$$

die in die Gerade $g_1 \dots x = 0$ und in eine Hyperbel $b_1y^2 - 2b_2xy + b_2^2x = 0$ mit den Fernpunkten $K(0 : 1 : 0)$, $H_n(0 : b_1 : 2b_2)$ und dem Mittelpunkt $M_h(0,5b_1; 0,5b_2)$ zerfällt.

SATZ 24. *Liegt die Gerade $g := AB$ der Büschelart $IV_{2,3}$ parallel zur Geraden t , dann liegt der Büschelfall $IV_{2,3c}$ vor, der bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten $\{b_1, b_2\}$ eindeutig bestimmt ist.*

Die weiteren Büscheluntertypen $IV_3 - IV_{15}$ werden im Teil II der Abhandlung betrachtet werden.

LITERATUR:

- [1] *H. Brauner*, Geometrie projektiver Räume I, Bibliographisches Institut Mannheim, 1976.
- [2] *R. Cesarec*, Analitička geometrija u ravnini, Školska knjiga, Zagreb, 1957.
- [3] *L. Heffter* und *C. Koehler*, Lehrbuch der analytischen Geometrie I, Teubner-Verlag, Leipzig-Berlin, 1905.
- [4] *H. M. Makarova*, Кривые второго порядка в плоской параболической геометрии, "Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии", Ученые записки МГПИ им. Ленина 1963, 222–251.
- [5] *V. Niče*, Uvod u sintetičku geometriju, Školska knjiga, Zagreb, 1956.
- [6] *H. Sachs*, Ebene isotrope Geometrie, Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 1987.
- [7] *H. Sachs*, Oskulierende und hyperoskulierende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, I, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 196 (1987), 337–375.

- [8] *H. Sachs*, Oskulierende und hyperoskulierende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, II, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien (im Druck).
- [9] *V. Ščurić-Čudovan*, Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der Isotropen Ebene, I. Teil, Rad JAZU **450** (1990), 41–51.
- [10] *K. Strubecker*, Äquiforme Geometrie der isotropen Ebene, Archiv. Math. **3** (1952), 145–153.
- [11] *K. Strubecker*, Geometrie in einer isotropen Ebene, Math.-naturwiss. Unterr. **15** (1962), 297–306, 343–351, 385–394.
- [12] *H. E. Timmerding*, Repertorium der höheren Geometrie, I. Hälfte, Teubner, Leipzig und Berlin, 1910.

Angenommen in II. Abteilung
14. 12. 1993.

Geodetski fakultet
Kačićeva 26
10000 Zagreb, Hrvatska

Montanuniversität Leoben
Franz-Josef-Strasse 18
A-8700 Leoben, Austria

Teorija klasifikacije pramenova konika tipa IV u izotropnoj ravnini, I dio

Vlasta Ščurić-Čudovan i Hans Sachs

Sadržaj

Realna izotropna ravnina I_2 je realna afina ravnina A_2 metrizirana apsolutnom figurom $\{f, F\}$, pri čemu je f beskonačno daleki pravac ravnine $A_2 \subset P_2$, a F točka tog pravca.

U ravnini I_2 istražuju se pramenovi konika tipa IV. Konike tog pramena određene su jednom dvostrukom realnom i s dvije jednostruke realne temeljne točke. U svakom je pramenu određena i krivulja m^2 , koju čine središta konika, kao i krivulja k_f^3 izotropnih žarišta tih konika.

Pramenovi konika tipa IV mogu se razvrstati u 15 podtipova, a ovi nadalje u sveukupno 41 vrstu odnosno slučaj. U prvom su dijelu obrađena dva podtipa, dok će preostalih trinaest podtipova biti prikazano u drugom dijelu rada.

Prihvaćeno u II. razredu
14. 12. 1993.