Österreichische Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Sonderdruck aus Sitzungsberichte, Abt. II, Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften Band 201, Heft 1 – 10

Vlasta Ščurić-Čudovan

Eine Kennzeichnung der speziellen Hyperbel der isotropen Ebene

Wien 1992

In Kommission bei Springer-Verlag Wien New York

Eine Kennzeichnung der speziellen Hyperbel der isotropen Ebene

Von

Vlasta Ščurić-Čudovan, (Zagreb), Kroatien

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Oktober 1992 durch das k. M. Hellmuth Stachel)

Herrn o. Univ. – Prof. Dr. H. Sachs zum 50. Geburtstag gewidmet

Unter einer *isotropen Ebene* I_2 versteht man eine reelle affine Ebene A_2, welche über eine *Absolutfigur* $\{f, F\}$ metrisiert wird, wobei f die Ferngerade von A_2 und F einen mit f inzidenten Punkt bezeichnet. Die Geometrie dieser Ebene ist erstmals in [8] systematisch betrachtet worden und in der *Monographie* [4] *des Jubilars* ausführlich dargestellt. Man gelangt u. a. zu dieser ebenen isotropen Geometrie, wenn man in der Absolutfigur $\{f, J_1, J_2\}$ der euklidischen Ebene die beiden konjugiert-komplexen isotropen Kreispunkte J_1, J_2 in einem reellen Punkt F zusammenfallen läßt (vgl. [8, 297 f.]).

Die *Kegelschnitte* der isotropen Ebene wurden unabhängig voneinander von K. Strubecker in [8, 386 f] und N. K. Makarowa in [3] betrachtet; man vergleiche auch [4, 63 f.]. Ein Kegelschnitt $k \subset I_2$, der den Punkt F als einfachen Punkt enthält, heißt *spezielle Hyperbel.* Diese Kurve 2. Ordnung spielt u. a. eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Kegelschnittbüscheln in I_2 (vgl. [5]–[7]). Diese Untersuchungen zeigen, daß eine spezielle Hyperbel d.h. eine Hyperbel mit einer isotropen Asymptote, das isotrope Analogon zur gleichseitigen Hyperbel der euklidischen Ebene ist. Man kann sich dies auch durch die folgende Überlegung plausibel machen, die natürlich kein strenger Beweis ist: Da die Asymptoten a_1, a_2 einer gleichseitigen Hyperbel der euklidischen Ebene aufeinander normal stehen, liegen ihre Fernpunkte A_1, A_2 zu den absoluten Kreispunkten J_1, J_2 harmonisch, d.h. es gilt $DV(A_1, A_2, J_1, J_2) = -1$.

Bei einem Grenzübergang $J_1, J_2 \to F$, der diese harmonische Lage erhält, muß $A_1 \to F$ oder $A_2 \to F$ gelten, womit eine Asymptote der entstehenden Hyperbel als isotrop nachgewiesen ist.

Da die Metrik der isotropen Ebene stark degeneriert ist, schlagen auch die meisten Versuche fehl, *Kennzeichnungen der gleichseitigen Hyperbel* in die isotrope Ebene zu übertragen wie etwa (vgl. [2, 434]):

Ein Kegelschnitt[1] *k der euklidischen Ebene ist genau dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn der Höhenschnittpunkt H jedes k einbeschriebenen Dreiecks auf k liegt.*

Überträgt man diese Kennzeichnung in die isotrope Ebene, so gilt $H = F$ (vgl. [4, 28]), und außer der speziellen Hyperbel kommt auch jedem isotropen Kreis diese Eigenschaft zu (vgl. [4, 23]). Die folgende Aussage der euklidischen Kegelschnittgeometrie (vgl. [2, 436]) gestattet jedoch ein isotropes Analogon: *Ein Mittelpunktskegelschnitt k ist genau dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn sein Mittelpunkt auf dem Umkreis jedes eigentlichen Poldreiecks von k liegt.*

Zur Herleitung eines isotropen Analogons sei $k \subset I_2$ ein Mittelpunktskegelschnitt und $P_1 \in I_2$, $P_1 \notin k$ ein eigentlicher Punkt mit der Eigenschaft, daß keine der von P_1 an k legbaren Tangenten isotrop ist.

Bezeichnet p_1 die Polare von P_1 bezüglich k, so wollen wir voraussetzen, daß p_1 nicht isotrop ist. Jeder Punkt $P_2 \in p_1 \setminus k$ liefert dann ein Poldreieck bezüglich k. Wir bezeichnen die Menge derjenigen *Poldreiecke $P_1 P_2 P_3$*, die zudem eigentlich sind und *keine isotrope Seite haben, als Schar $S(P_1)$* zulässiger Poldreiecke zu P_1. Dann gilt der

Satz: *Besitzt ein Mittelpunktskegelschnitt k in der isotropen Ebene I_2 die Eigenschaft, daß die Umkreise zweier verschiedener Poldreiecke aus der Schar $S(P_1)$ den Mittelpunkt von k enthalten, dann ist k eine spezielle Hyperbel und diese Eigenschaft gilt für alle zulässigen Poldreiecke.*

Beweis:

Wir wählen o. B. d. A. P_1 als Koordinatenursprung und setzen wegen $P_1 \notin k$ den gegebenen Kegelschnitt in der Gestalt

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + 1 = 0 \tag{1}$$

mit $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ an. Die Polare p_1 von P_1 bezüglich (1) ergibt sich als

$$p_1 \cdots a_1x + a_2y + 1 = 0. \tag{2}$$

---

[1] Als Kegelschnitt bezeichnen wir stets irreduzible Kurven 2. Ordnung, so daß orthogonale Geradenpaare aus der Kennzeichnung herausfallen.

Hierbei gilt $a_2 \neq 0$, sonst wäre p_1 eine isotrope Gerade. Durch eine isotrope Drehung des Koordinatensystems kann noch erreicht werden, daß in (2) $a_1 = 0$ gilt; hiebei wird die Bauart der Gleichung (1) von k nicht geändert. Die Polare p_1 wird somit durch

$$y = -\frac{1}{a_2} =: c_0 \tag{3}$$

beschrieben. Wählt man als weitere Ecke des Poldreiecks den Punkt $P_2 \in p_1$ mit

$$P_2(t, c_0), \tag{4}$$

wobei t einen Parameter bezeichnet, so erhält man als Polare p_2 von P_2 bezüglich k

$$(a_{11}t + a_{12}c_0)x + (a_{12}t + a_{22}c_0 + a_2)y = 0 \tag{5}$$

und damit als dritte Ecke P_3 des Poldreiecks

$$P_3\left(-\frac{(a_{12}t + a_{22}c_0 + a_2)c_0}{a_{11}t + a_{12}c_0}, c_0\right). \tag{6}$$

Für $t \neq \dfrac{1}{a_{12}a_2}(a_{22} - a_2^2)$ liegt eine zulässige Poldreieckschar $S(P_1)$ vor. Wird die Abkürzung

$$h := -\frac{a_{12}t + a_{22}c_0 + a_2}{a_{11}t + a_{12}c_0} \tag{7}$$

eingeführt, so gilt für jedes Dreieck aus $S(P_1)$ $th \neq 0$, und die Ecken dieser Poldreiecke sind gegeben durch

$$P_1(0,0); \quad P_2(t, c_0); \quad P_3(c_0 h, c_0). \tag{8}$$

Berechnet man nach [4, 25] den Umkreis l des Dreiecks P_1, P_2, P_3, so stellt sich nach Abspalten des Faktors $(t - c_0 h)$ die Gleichung

$$l \cdots yht + x^2 - (c_0 h + t)x = 0 \tag{9}$$

ein. Andererseits besitzt der Mittelpunktskegelschnitt (1) wegen $a_1 = 0$ den *Mittelpunkt* $M(x_M, y_M)$ mit

$$M\left(-\frac{a_2 a_{12}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, \frac{a_2 a_{11}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right). \tag{10}$$

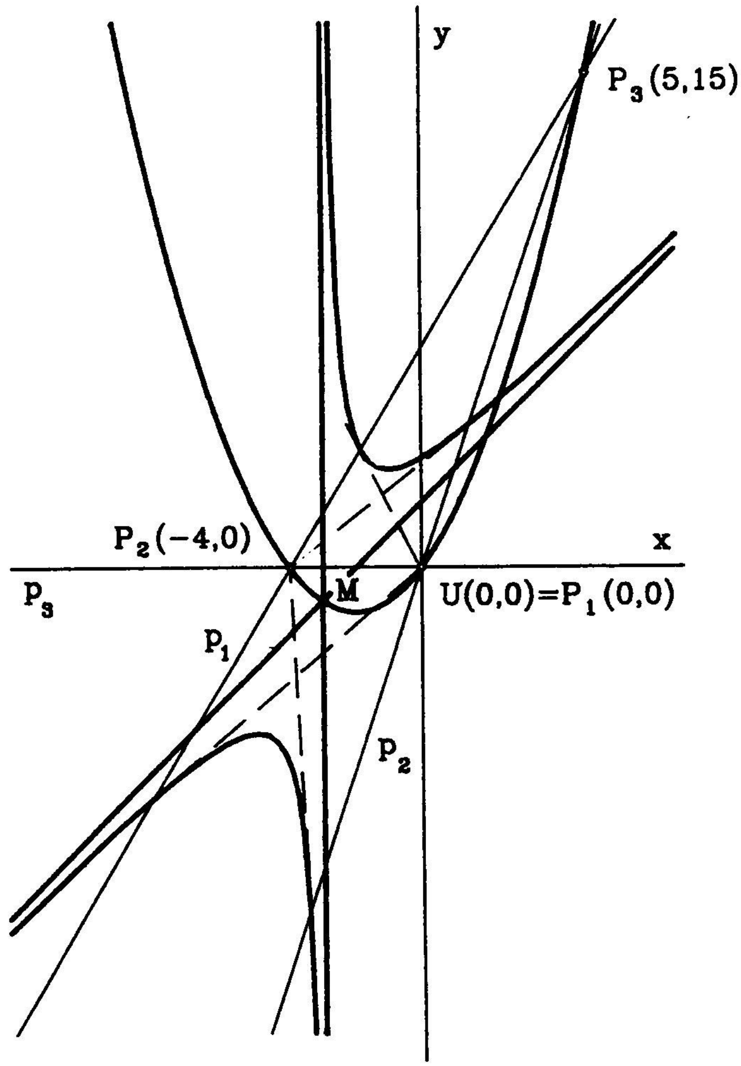

Abb. 1

Es bleibt nun die Bedingung zu untersuchen, die man durch Einsetzen von (10) in (9) erhält. Nach längerer Rechnung verbleibt eine in t lineare Gleichung. Sie ist genau dann die Identität, wenn

$$a_{22}(a_{11}a_2^2 + a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = 0 \tag{11}$$

gilt. Für $a_{22} = 0$ ist (1) eine *spezielle Hyperbel*. Verschwindet hingegen der zweite Klammerausdruck, so ist dies gleichwertig mit $y_M = c_0$. Dann aber wäre die Polare p_1 ein Durchmesser von k und P_1 ein Fernpunkt, was nicht sein darf.

Die Abbildung 1 zeigt den geometrischen Sachverhalt, wobei das zugeordnete Koordinatensystem allerdings in der üblichen Anordnung gewählt wurde.

Literatur

[1] Cesarec, R.: Analitička geometrija u ravnini. Školska knjiga, Zagreb 1957.

[2] Heffter, L., und C. Koehler: Lehrbuch der analytischen Geometrie I. Teubner-Verlag, Leipzig-Berlin 1905.

[3] Макарова, Н. М.: Кривые второго порядка в плоской параболической геометрии «Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии». Ученые записки МГПИ им. Ленина (1963), 222–251.

[4] Sachs, H.: Ebene isotrope Geometrie, Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden 1987.

[5] Sachs, H.: Oskulierende und hyperoskulierdende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene I, S. d. Akad. d. Wiss. Wien **196** (1987), 337–375.

[6] Ščurić-Čudovan, V.: Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene I. Rad JAZU **450** (1990), 41–51.

[7] Ščurić-Čudovan, V., und H. Sachs: Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene I (erscheint in Rad HAZU, Zagreb 1993).

[8] Strubecker, K.: Geometrie in einer isotropen Ebene. Math. -Naturwiss. Unterricht **15** (1962), 297–306, 343–351, 385–394.

Anschrift des Autors: Prof. Dr. V. Ščurić-Čudovan, Đorđićeva 3, CRO 41000 Zagreb, Kroatien.