

HRVATSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

HANS SACHS und VLASTA ŠCURIĆ-ČUDOVAN
ZUR THEORIE DER FLÄCHEN 2. ORDNUNG IM FLAGGENRAUM

Poseban otisak iz.

*Rada 456 — Matematičke znanosti,
svezak 10*



ZAGREB 1991

ZUR THEORIE DER FLÄCHEN 2. ORDNUNG IM FLAGGENRAUM

Hans Sachs und Vlasta Šćurić-Čudovan

Abstract. According to H. Brauner a flag space $I_3^{(2)}$ is a three-dimensional affine space with an absolute $\{\omega, f, F\}$, where f is a line in the plane of infinity ω and F a point on f . In this paper the surfaces of second order in the space $I_3^{(2)}$ are completely classified with regard to the group of isotropic motions in $I_3^{(2)}$. All surfaces are described by normal-forms and the remaining invariants are interpreted in a geometrical way. Finally some applications are given.

1. EINLEITUNG

Es bezeichne P_3 den dreidimensionalen reellen projektiven Raum, ω eine Ebene in P_3 und $A_3 = P_3 \setminus \omega$ den zugeordneten affinen Raum. Ein affiner Raum A_3 heißt ein *Flaggenraum* (zweifach isotroper Raum) $I_3^{(2)}$, wenn in ihm eine Metrik über die *Absolutfigur* $\{\omega, f, F\}$ induziert wird, wobei f eine Gerade aus ω und $F \in f$ einen Punkt bezeichnet. Die Geometrie dieses Raumes wurde erstmals von H. Brauner in den grundlegenden Arbeiten [1]–[3] studiert. Eine Zusammenfassung aller Resultate dieser interessanten Geometrie bis zum Jahre 1990 findet sich in der Monographie des erstgenannten Verfassers (vgl. [7]).

Im folgenden bezeichnen wir mit $\{x, y, z\}$ affine Koordinaten in $I_3^{(2)}$ und mit $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ die zugehörigen projektiven Koordinaten. Es ist dann üblich die Absolutfigur $\{\omega, f, F\}$ durch

$$\omega \dots x_0 = 0, \quad f \dots x_0 = x_1 = 0, \quad F(0 : 0 : 0 : 1) \quad (1.1)$$

festzulegen. Die allgemeine *projektive Automorphismengruppe* von $\{\omega, f, F\}$ ist neunparametrig¹⁾ und läßt sich bezüglich (1.1) durch

$$\begin{cases} \bar{x} = c_1 + c_2x \\ \bar{y} = c_3 + c_4x + c_5y \\ \bar{z} = c_6 + c_7x + c_8y + c_9z \end{cases} \quad (1.2)$$

beschreiben (vgl. [1.119]). (1.2) enthält als Normalteiler die sechseparametrische Untergruppe $\mathcal{A}_6^{(2)}$

$$\begin{cases} \bar{x} = c_1 + x \\ \bar{y} = c_2 + c_3x + y \\ \bar{z} = c_4 + c_5x + c_6y + z, \end{cases} \quad (1.3)$$

¹⁾ Alle i. f. verwendeten Resultate aus der Geometrie des Flaggenraumes können in [1]–[3] bzw. [7] nachgelesen werden.

die man als *zweifach isotrope Bewegungsgruppe* bezeichnet. Die Geometrie $\{I_3^{(2)}, \mathcal{B}_6^{(2)}\}$ heißt *zweifach isotrope Bewegungsgeometrie*. Die Gerade f wird als *absolute Gerade* und der Punkt F als *absoluter Punkt* bezeichnet. Ebenen ε , welche f enthalten heißen *vollisotrop*, während man Ebenen ε mit $F \in \varepsilon$, aber $f \notin \varepsilon$ als *isotrop* bezeichnet. Alle weiteren eigentlichen Ebenen heißen *nichtisotrop*. In jeder Ebene des $I_3^{(2)}$ einschließlich ω wird durch (1.3) eine *ebene isotrope Geometrie* induziert, deren Grundzüge man in [6] nachlesen kann.

Ziel unserer gemeinsamen Arbeit ist eine vollständige *Klassifikation der Flächen 2. Ordnung* des Flaggenraumes bezüglich der Bewegungsgruppe (1.3), die Erstellung von *Normalformen* für alle Flächentypen, sowie eine geometrische Interpretation aller verbleibenden Formparameter als Invarianten bezüglich (1.3). Ein Versuch in dieser Richtung wurde schon in [13] unternommen, doch sind die angegebenen *Resultate nicht vollständig*; außerdem wird nur der Fall einer regulären Fläche 2. Ordnung behandelt. Andererseits ist die Kenntnis aller Flächen 2. Ordnung des $I_3^{(2)}$ für viele weitere Untersuchungen, z. B. beim Studium der *Zykliden* dieses Raumes (vgl. [9]–[14]) von grundlegender Bedeutung.

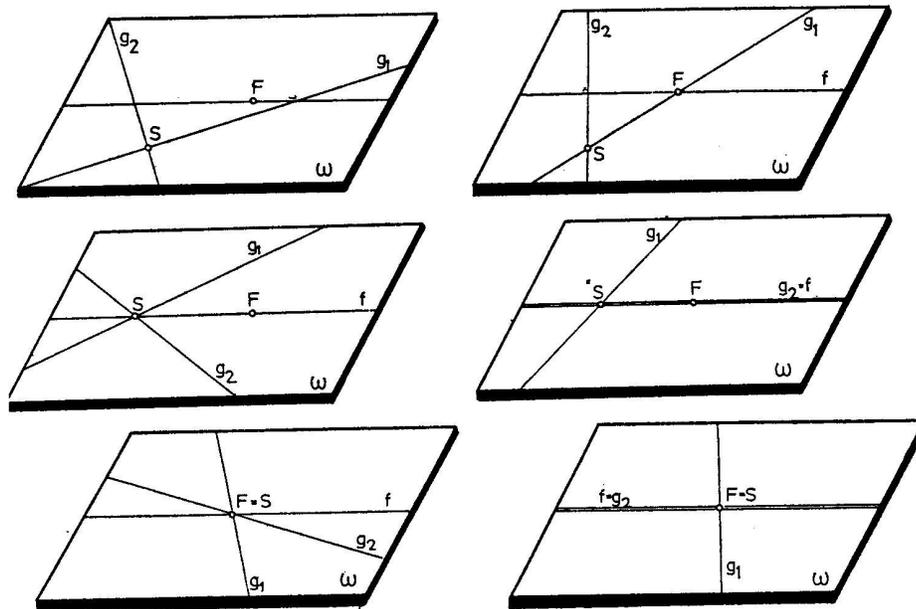


Abb. 1

In 2 geben wir eine rein *geometrische Klassifikation* aller Flächen 2. Ordnung, die wir in 3 zur Bestimmung aller *Normalformen* heranziehen. 4 ist *zwei Anwendungen* gewidmet.

2. GEOMETRISCHE KLASSIFIKATION DER FLÄCHEN 2. ORDNUNG

Die Fernkurve k einer Fläche 2. Ordnung des $I_3^{(2)}$ ist entweder ein Kegelschnitt (Fall A), ein Geradenpaar (Fall B), ein Linienelement (Fall C) oder eine

Doppelgerade (Fall *D*); hierbei sind noch verschiedene *Realitätstypen* zu unterscheiden. Wir geben i. f. alle diese Typen an und bestimmen dazu gleich die möglichen Flächen 2. Ordnung, die wir mit lateinischen Ziffern als Indizes belegen.

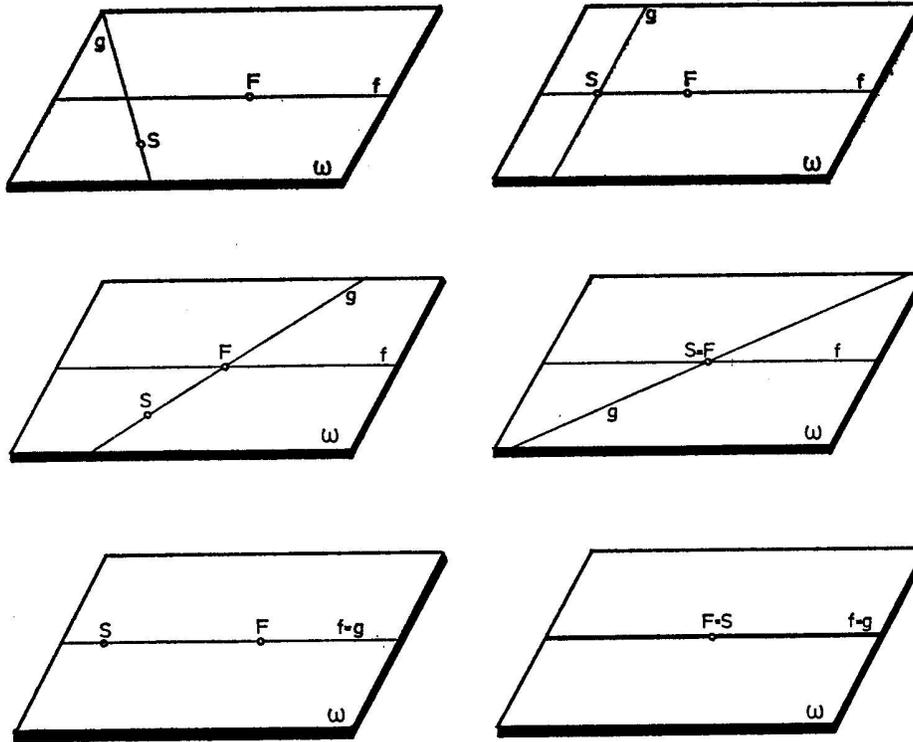


Abb. 2

Fall *A*. *c* ist ein (irreduzibler) Kegelschnitt. Wir benutzen hier und i. f., daß in ω eine ebene isotrope Geometrie mit der Absolutfigur $\{f, F\}$ vorliegt. In ω wird von $\mathcal{B}_6^{(2)}$ eine dreiparametrische ebene Bewegungsgruppe \mathcal{B}_3 induziert (vgl. [6, 14]). Bezüglich \mathcal{B}_3 kann man in ω 7 Kegelschnittstypen unterscheiden (vgl. [5]), die in [6, 71, Figur 21 a—g] symbolisch dargestellt werden.

- | | |
|-------------------------------|------------------------|
| A1. Nullteiliger Kegelschnitt | A5. Spezielle Hyperbel |
| A2. Ellipse | A6. Parabel |
| A3. Hyperbel 1. Art | A7. Kreis |
| A4. Hyperbel 2. Art | |

Zu A1 gehört entweder eine nullteilige Fläche 2. Ordnung Φ_1 oder ein Ellipsoid Φ_2 oder ein Kegel Φ_3 . Zu den einteiligen Kegelschnitten A2)–A7) gehören einschalige oder zweischalige Hyperboloide oder reelle Kegel. Dies liefert die Typen Φ_4 – Φ_9 (einschalige Hyperboloide), Φ_{10} – Φ_{15} (zweischalige Hyperboloide), Φ_{16} – Φ_{21} (reelle Kegel). Damit umfaßt die Klasse *A* genau 21 Flächentypen.

Fall B. Ein Geradenpaar $\{g_1, g_2, S\}$ — S bezeichnet den Schnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_2 — kann bezüglich $\{f, F\}$ die folgenden Lagemöglichkeiten haben, die in Abb. 1 dargestellt sind; hierbei wurde zunächst vorausgesetzt, daß g_1 und g_2 reell sind. Zu den angegebenen 6 Typen gehören 6 Arten von *hyperbolischen Paraboloiden* Φ_{22} — Φ_{27} , 6 Arten *hyperbolischer Zylinder* Φ_{28} — Φ_{33} , sowie 6 Arten *reell schneidender Ebenenpaare* Φ_{34} — Φ_{39} . Sind g_1 und g_2 konjugiert-komplex und damit S reell, so existieren je nach der Lage von S ($S \notin f$; $S \in f$, $S \neq F$; $S = F$) drei Typen von Geradenpaaren. Diese bestimmen 3 Arten *elliptischer Paraboloiden* Φ_{40} — Φ_{42} , 3 Arten *elliptischer Zylinder* Φ_{43} — Φ_{45} , 3 Arten *nullteiliger Zylinder* Φ_{46} — Φ_{48} und 3 Arten *konjugiert-komplexer schneidender Ebenenpaare* mit reeller Schnittgeraden Φ_{49} — Φ_{51} . Damit umfaßt die Klasse B genau 30 Flächentypen.

Fall C. Ein Linienelement $\{S, g\}$ — S bezeichnet den mit g inzidenten Punkt — kann bezüglich $\{f, F\}$ die in Abb. 2 angegebenen 5 Lagemöglichkeiten besitzen. Dies liefert als zugeordnete Flächen 2. Ordnung 7 Typen *parabolischer Zylinder* Φ_{52} — Φ_{57} . Der Fall Φ_{56} ($g = f$, $S \neq F$) liefert die sogenannten *Punktkugeln*, der Fall Φ_{57} ($g = f$, $S = F$) ergibt die *Punktgrenzkugeln* (vgl. [1.125]). Damit ordnet sich der Begriff der Sphären (Kugeln) hier ein. Die Klasse C umfaßt also genau 6 Flächentypen.

Fall D. Eine Doppelgerade $g_1 = g_2 = : g$ kann bezüglich $\{f, F\}$ 3 Lagemöglichkeiten einnehmen (Abb. 3). Dazu gehören 3 Typen *reeller, paralleler Ebenen* Φ_{58} — Φ_{60} , 3 Typen *konjugiert-komplexer, paralleler Ebenen* Φ_{61} — Φ_{63} oder 3 Typen von *Doppelebenen* Φ_{64} — Φ_{66} . Damit umfaßt die Klasse D genau 9 Flächentypen.

Insgesamt liefert die Klassifikation der Flächen 2. Ordnung des Flaggenraumes damit 66 Flächentypen. Für viele Anwendungen ist die Klassifikation der

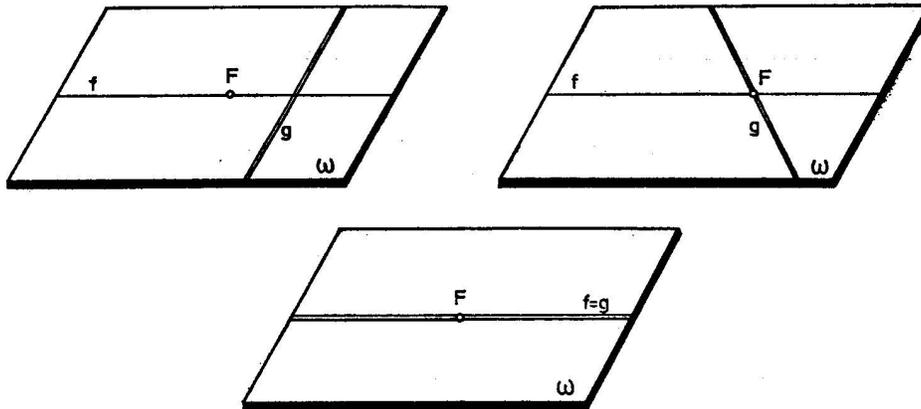


Abb. 3

Flächen 2. Ordnung im projektiv erweiterten Flaggenraum notwendig. Dann kommen noch folgende Typen hinzu: Φ_{67} (*Fernebene ω + nichtisotrope Ebene*), Φ_{68} (*Fernebene ω + isotrope Ebene*), Φ_{69} (*Fernebene ω + vollisotrope Ebene*), Φ_{70} (*Fernebene ω als Doppelebene*). Wir fassen zusammen im

SATZ 1. Im projektiv erweiterten Flaggenraum existieren genau 70 Typen von Flächen 2. Ordnung. Im eigentlichen Flaggenraum $I_3^{(2)}$ existieren genau 66 Typen von Flächen 2. Ordnung.

3. NORMALFORMENTHEORIE DER FLÄCHEN 2. ORDNUNG DES FLAGGENRAUMES

Um die Transformation der Fernelemente der Flächen 2. Ordnung im $I_3^{(2)}$ zu bewerkstelligen, schreiben wir zunächst (1.2) in projektiven Koordinaten zu

$$\begin{aligned}\varrho \bar{x}_0 &= x_0 \\ \varrho \bar{x}_1 &= c_1 x_0 + x_1 \\ \varrho \bar{x}_2 &= c_2 x_0 + c_3 x_1 + x_2 \\ \varrho \bar{x}_3 &= c_4 x_0 + c_5 x_1 + c_6 x_2 + x_3\end{aligned}\quad (3.1)$$

mit $\varrho \neq 0$ und beachten, daß (3.1) in $\omega \dots x_0 = 0$ die Gruppe

$$\begin{aligned}\varrho \bar{x}_1 &= x_1 \\ \varrho \bar{x}_2 &= c_3 x_1 + x_2 \\ \varrho \bar{x}_3 &= c_5 x_1 + c_6 x_2 + x_3\end{aligned}\quad (3.2)$$

induziert. Deutet man $(x_1 : x_2 : x_3)$ als projektive Koordinaten in ω und geht man mittels $\frac{x_2}{x_1} = \xi, \frac{x_3}{x_1} = \eta, \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} = \bar{\xi}, \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1} = \bar{\eta}$ zu affinen Koordinaten in ω über, so findet man

$$\begin{aligned}\xi &= c_3 + \xi \\ \bar{\eta} &= c_5 + c_6 \xi + \eta\end{aligned}\quad (3.3)$$

und dies ist die Gruppe \mathcal{B}_3 der ebenen isotropen Bewegungen (vgl. [6, 14]). Um die Flächen 2. Ordnung des $I_3^{(2)}$ auf Normalform zu transformieren, sind zunächst ihre Fernelemente k mittels (3.3) auf Normalform zu transformieren; anschließend sind nur mehr Schiebungen aus (1.3) in den drei Achsenrichtungen zulässig. Mit dieser Methode wurden die folgenden Normalformen bestimmt, wobei wir nun bei den ersten Fällen eine ausführliche Beschreibung angeben.

Fall A. Die Kurven 2. Ordnung der isotropen Ebene wurden in [6, 63f] bezüglich der Gruppe \mathcal{B}_3 ausführlich klassifiziert; diese Resultate werden i. f. benützt.

Ist k ein nullteiliger Kegelschnitt, so gilt nach [6, 65], wobei $\frac{1}{a} =: a$ und $\frac{1}{b} =: \beta$ gesetzt wurde in sinngemäßer Bezeichnung

$$k \dots a^2 \xi^2 + \beta^2 \eta^2 + 1 = 0. \quad (3.4)$$

In projektiven Koordinaten gewinnt man hieraus

$$a^2 x_2^2 + \beta^2 x_3^2 + x_1^2 = 0 \quad (3.5)$$

und schließlich noch Übergang zu den üblichen affinen Koordinaten

$$k \dots \alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2 + x^2 = 0. \quad (3.6)$$

Damit lauten alle zu k gehörigen Flächen 2. Ordnung

$$x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2 + \alpha_{01} x + \alpha_{02} y + \alpha_{03} z + \alpha_{00} = 0. \quad (3.7)$$

Wegen $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ kann man in (3.7) durch eine Schiebung in den drei Achsenrichtungen $\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_{03} = 0$ erzwingen. Damit lauten die zugehörigen Flächen 2. Ordnung in der Normalform

$$(3.A1-3) \quad x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2 + \alpha_{00} = 0.$$

Für $\alpha_{00} > 0$ liegt eine *nullteilige Fläche 2. Ordnung* Φ_1 , für $\alpha_{00} < 0$ ein *Ellipsoid* Φ_2 und für $\alpha_{00} = 0$ ein *nullteiliger Kegel* Φ_3 vor.

Für eine *Ellipse* k bzw. eine *Hyperbel 1. Art* bzw. eine *Hyperbel 2. Art* bzw. eine *spezielle Hyperbel* bzw. eine *Parabel* bzw. einen *Fernkreis* hat man der Reihe nach

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2 - x^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad (3.8)$$

$$\alpha^2 y^2 - \beta^2 z^2 - x^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad (3.9)$$

$$\alpha^2 y^2 - \beta^2 z^2 + x^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad (3.10)$$

$$yz - kx^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad (3.11)$$

$$z^2 - 2pxy = 0 \quad \text{bzw.} \quad (3.12)$$

$$Ry^2 - xz = 0. \quad (3.13)$$

Die Fernkurven (3.8)—(3.9) führen wie oben zu den Normalformen

$$(3.A 4, 10, 16) \quad x^2 - \alpha^2 y^2 - \beta^2 z^2 + \alpha_{00} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$(3.A 5, 11, 17) \quad x^2 - \alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2 + \alpha_{00} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$(3.A 6, 12, 18) \quad x^2 + \alpha^2 y^2 - \beta^2 z^2 + \alpha_{00} = 0.$$

Für $\alpha_{00} > 0$ liegt in (3.A 4, 10, 16) ein *einschaliges Hyperboloid* Φ_4 , für $\alpha_{00} < 0$ ein *zweischaliges Hyperboloid* Φ_{10} vor; $\alpha_{00} = 0$ liefert einen *Kegel* Φ_{16} . In (3.A 5, 11, 17) ergibt $\alpha_{00} < 0$ ein *einschaliges Hyperboloid* Φ_5 , $\alpha_{00} > 0$ ein *einschaliges Hyperboloid* Φ_{11} und $\alpha_{00} = 0$ einen *Kegel* Φ_{17} . Die Gleichung (3.A 6, 12, 18) liefert für $\alpha_{00} < 0$ ein *einschaliges Hyperboloid* Φ_6 , für $\alpha_{00} > 0$ ein *zweischaliges Hyperboloid* Φ_{12} und für $\alpha_{00} = 0$ einen *Kegel* Φ_{18} .

Für die zu (3.11) gehörige Fläche 2. Ordnung findet man zunächst nach Anwendung einer Schiebung in x -Richtung

$$kx^2 - yz + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0. \quad (3.14)$$

Die Schiebung $\{x = \bar{x}, y = \bar{y} + a_{03}, z = \bar{z}\}$ liefert nach Umbezeichnung des Absolutgliedes

$$k\bar{x}^2 - \bar{y}\bar{z} + a_{02}\bar{y} + a_{00} = 0, \quad (3.15)$$

und schließlich ergibt eine geeignete Schiebung in z -Richtung

$$(3.A 7, 13, 19) \quad kx^2 - yz + a_{00} = 0.$$

Für $k > 0, a_{00} < 0$ bzw. $k < 0, a_{00} > 0$ liegt ein *einschaliges Hyperboloid* Φ_7 , für $k > 0, a_{00} > 0$ bzw. $k < 0, a_{00} < 0$ ein *zweischaliges Hyperboloid* Φ_{13} und für $a_{00} = 0$ ein *Kegel* Φ_{19} .

Analog erhält man aus (3.12) als Normalform der Flächen

$$(3.A. 8, 14, 20) \quad z^2 - 2pxy + a_{00} = 0.$$

Für $p > 0, a_{00} < 0$ bzw. $p < 0, a_{00} < 0$ liegt ein *einschaliges Hyperboloid* Φ_8 , für $p > 0, a_{00} > 0$, bzw. $p < 0, a_{00} > 0$ liegt ein *zweischaliges Hyperboloid* Φ_{14} vor. $a_{00} = 0$ liefert einen *Kegel* Φ_{20} . Aus dem Fernkreis (3.13) gewinnt man schließlich als Normalform der zugehörigen Fläche 2. Ordnung

$$(3.A 9, 15, 21) \quad Ry^2 - xz + a_{00} = 0.$$

Hierbei liefert $R > 0, a_{00} < 0$ bzw. $R < 0, a_{00} > 0$ ein *einschaliges Hyperboloid* Φ_9 , während $R > 0, a_{00} > 0$ bzw. $R < 0, a_{00} < 0$ ein *zweischaliges Hyperboloid* Φ_{15} abgibt. Für $a_{00} = 0$ stellt sich ein *Kegel* Φ_{21} ein. Damit sind alle 21 Flächen der Klasse A durch Normalformen beschrieben. Die Flächen (3.A 9, 15, 21) sind als *Drehflächen 2. Ordnung* des Flaggenraumes anzusprechen.

Die *geometrische Deutung* der in den Gleichungen (3.A 1—21) verbleibenden *Koeffizienten* bezüglich der Bewegungsgruppe ist nicht allzu schwierig, soll aber aus Platzgründen nur *exemplarisch* vorgeführt werden.

Sei Φ_{10} das *zweischalige Hyperboloid* in der Normalform (3.A 10) $F \equiv x^2 - a^2y^2 - \beta^2z^2 + a_{00} = 0$ mit $a_{00} < 0$. Die Fläche Φ_{10} besitzt den Mittelpunkt $M(0, 0, 0)$. Alle Punkte von Φ_{10} mit vollisotroper Tangentialebene werden durch $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ festgelegt; sie besitzen geometrische Bedeutung. Man findet

für diese Punkte — wegen $y = z = 0$ — sofort $S_1 = (\sqrt{a_{00}}, 0, 0), S_2 = (-\sqrt{a_{00}}, 0, 0)$. Die Abstände $d(M, S_1) = \sqrt{a_{00}}$ und $d(M, S_2) = -\sqrt{a_{00}}$ liefern somit eine geometrische Deutung der Invariante a_{00} . Der isotropen Ebene $y = 0$ durch S_1S_2 kommt ebenfalls eine geometrische Bedeutung zu. Sie schneidet Φ_{10} nach der Hyperbel 2. Art $x^2 - \beta^2z^2 = a_{00}$. Die vollisotrope Achse dieser Hyperbel hat die Länge $\frac{2}{\beta} \sqrt{-a_{00}}$, womit unter Verwendung der Deutung von a_{00} auch

die Größe β als $\mathcal{B}_6^{(2)}$ -Invariante nachgewiesen ist. Es bleibt nach α zu deuten. Die Ebene $z = 0$ hat als Symmetrieebene von Φ_{10} geometrische Bedeutung, und sie schneidet den Asymptotenkegel von Φ_{10} nach den beiden Erzeugenden $y = \pm \frac{1}{\alpha} x$. Da die x -Achse als Gerade $\overline{S_1 S_2}$ geometrische Bedeutung hat und $\pm \frac{1}{\alpha}$ der Winkel obiger Erzeugenden gegen $\overline{S_1 S_2}$ ist, haben wir die gesuchte Deutung gefunden.

Wir betrachten noch das *einschalige Hyperboloid* Φ_7 mit der Normalform (3.A 7). Es besitzt den Mittelpunkt $M(0, 0, 0)$. Die vollisotrope Ebene $x = 0$ durch M besitzt geometrische Bedeutung und schneidet Φ_7 nach der speziellen Hyperbel $yz = a_{00}$. Nach [6, 73] besitzt a_{00} geometrische Bedeutung. Die Polarebene des absoluten Punktes F bezüglich Φ_7 besitzt ebenfalls geometrische Bedeutung und ist durch $y = 0$ gegeben. Sie schneidet Φ_7 nach den beiden vollisotropen Geraden $x = \pm \sqrt{\frac{-a_{00}}{k}}$. Zusammen mit a_{00} mißt daher k den Abstand dieser beiden Geraden vom Flächenmittelpunkt. Wir notieren den

SATZ 2. *Die Flächen 2. Ordnung der Klasse A des Flaggenraumes lassen sich durch die Normalformen (3.A. 1—21) beschreiben. Alle in diesen Gleichungen verbleibenden Koeffizienten sind $\mathcal{B}_6^{(2)}$ -Invarianten.*

Fall B. Ist die Fernkurve k der Flächen 2. Ordnung ein Geradenpaar g_1, g_2 mit dem Schnittpunkt S , dann erfaßt die in [6, 66f] gegebene Klassifikation der Kurven 2. Ordnung hier nicht alle Fälle, da sich diese Klassifikation auf Kurven 2. Ordnung in einer eigentlichen isotropen Ebene beschränkt. Diese Klassifikation ist daher hier entsprechend zu ergänzen. Seien zunächst g_1 und g_2 *reelle* Geraden. Ist S ein Punkt mit $S \notin f$ und gilt $F \notin g_1, g_2$, dann kann man nach [6, 66] erreichen, daß g_1, g_2 durch

$$k \dots \alpha^2 \xi^2 - \beta^2 \eta^2 = 0 \quad (3.16)$$

beschrieben werden, wobei wieder $\alpha^2 := \frac{1}{a^2}$, $\beta^2 := \frac{1}{b^2}$ gesetzt wurde. Die zu k gehörigen Flächen 2. Ordnung lauten damit

$$\alpha^2 y^2 - \beta^2 z^2 + \alpha_{01} x + \alpha_{02} y + \alpha_{03} z + \alpha_{00} = 0 \quad (3.17)$$

und diese Gleichung läßt sich durch eine Schiebung y - und z -Richtung noch zu

$$\alpha^2 y^2 - \beta^2 z^2 + \alpha_{01} x + \alpha_{00} = 0 \quad (3.18)$$

vereinfachen. Gilt $\alpha_{01} \neq 0$, dann ist (3.18) ein hyperbolisches Paraboloid, und durch eine Schiebung in x -Richtung kann in (3.18) noch $\alpha_{00} = 0$ erreicht werden. Durch Division mit $\alpha_{01} \neq 0$ kann der Koeffizient bei x noch zu 1 normiert werden und wir erhalten als Normalform eines *hyperbolischen Paraboloids* Φ_{22}

$$(3.B 22) \quad \alpha^2 y^2 - \beta^2 z^2 + x = 0.$$

Die Verbindungsgerade von $S(0 : 1 : 0 : 0)$ mit $F(0 : 0 : 0 : 1)$ besitzt geometrische Bedeutung und ebenso alle Ebenen durch SF , die durch $y_0 = \text{const.}$ beschrieben werden. Diese Ebenen schneiden Φ_{22} nach den Parabeln $x = \beta^2 z^2 + a^2 y_0^2$, womit [6, 74] die Größe β als $\mathcal{B}_6^{(2)}$ -Invariante nachgewiesen ist. Die Ebenen $z_0 = \text{const.}$ sind Parallelebenen zu einer Symmetrieebene der beiden Richtebenen von Φ_{22} und besitzen damit geometrische Bedeutung. Sie schneiden Φ_{22} nach den Parabeln $x = -a^2 y^2 + \beta^2 z_0^2$, womit a als geometrische Größe nachgewiesen ist.

Gilt in (3.18) $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{00} \neq 0$, so liegt ein *hyperbolischer Zylinder* Φ_{28}

$$(3.B 28) \quad a^2 y^2 - \beta^2 z^2 + \alpha_{00} = 0$$

und für $\alpha_{01} = \alpha_{00} = 0$ ein *schneidendes Ebenenpaar* Φ_{34}

$$(3.B 34) \quad a^2 y^2 - \beta^2 z^2 = 0$$

vor.

Ist S ein Punkt mit $S \notin f$ und gilt $F \in g_1$, dann kann man nach [6, 68] erreichen, daß k durch

$$k \dots \xi \eta = 0 \quad (3.19)$$

beschrieben wird. Die zu k gehörigen Flächen 2. Ordnung lauten damit

$$yz + \alpha_{01}x + \alpha_{02}y + \alpha_{03}z + \alpha_{00} = 0. \quad (3.20)$$

Durch eine Schiebung in y - und z -Richtung kann man (3.20) noch zu

$$yz + \alpha_{01}x + \alpha_{00} = 0 \quad (3.21)$$

vereinfachen. Gilt in (3.21) $\alpha_{01} \neq 0$, so kann man durch eine Schiebung in x -Richtung noch $\alpha_{00} = 0$ erreichen. In diesem Fall liegt ein *hyperbolisches Paraboloid* Φ_{23} mit der Normalform

$$(3.B 23) \quad yz + \alpha_{01}x = 0$$

vor. Gilt in (3.21) $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{00} \neq 0$, dann liegt ein *hyperbolischer Zylinder* Φ_{29} mit der Normalform

$$(3.B 29) \quad yz + \alpha_{00} = 0$$

vor. Für $\alpha_{01} = \alpha_{00} = 0$ erhält man schließlich aus (3.21) ein *reelles, schneidendes Ebenenpaar* Φ_{35} mit der Normalform

$$(3.B 35) \quad yz = 0.$$

Gilt $S \in f$ und $g_1, g_2 \notin f$, dann kann man k nach [6, 67] durch

$$\eta^2 - a^2 = 0 \quad (a \neq 0) \quad (3.22)$$

beschreiben. Die zu k gehörigen Flächen 2. Ordnung lassen sich dann in der Form

$$z^2 - a^2x^2 + \alpha_{01}x + \alpha_{02}y + \alpha_{03}z + \alpha_{00} = 0 \quad (3.23)$$

ansetzen und durch eine Schiebung in x - und z -Richtung zu

$$z^2 - a^2x^2 + \alpha_{03}y + \alpha_{00} = 0 \quad (3.24)$$

vereinfachen. Für $\alpha_{03} \neq 0$ liegt ein *hyperbolisches Paraboloid* Φ_{24} vor, welches man nach Anwendung einer Schiebung in y -Richtung durch die Normalform

$$(3.B 24) \quad z^2 - a^2x^2 + \alpha_{02}y = 0$$

beschreiben kann. Für $\alpha_{03} = 0, \alpha_{00} \neq 0$ stellt sich der *hyperbolische Zylinder* Φ_{30}

$$(3.B 30) \quad z^2 - a^2x^2 + \alpha_{00} = 0$$

ein. Für $\alpha_{03} = \alpha_{00} = 0$ gewinnt man das *reelle, schneidende Ebenenpaar* Φ_{36} mit der Darstellung

$$(3.B 36) \quad z^2 - a^2x^2 = 0.$$

Nun gelte $g_2 = f, S \neq F$; dann läßt sich k unter Verwendung projektiver Koordinaten durch die Normalform $x_1x_3 = 0$ beschreiben. Die zu k gehörigen Flächen 2. Ordnung können somit in der Gestalt

$$xz + \alpha_{01}x + \alpha_{02}y + \alpha_{03}z + \alpha_{00} = 0 \quad (3.25)$$

angesetzt werden und diese Gleichung läßt sich durch eine Schiebung in x - und z -Richtung noch zu

$$xz + \alpha_{02}y + \alpha_{00} = 0 \quad (3.26)$$

vereinfachen. Für $\alpha_{02} \neq 0$ ist (3.26) ein *hyperbolisches Paraboloid* Φ_{25} , welches man nach Anwendung einer Schiebung in y -Richtung in der Normalform

$$(3.B 25) \quad xz + \alpha_{02}y = 0$$

darstellen kann. Für $\alpha_{02} = 0, \alpha_{00} \neq 0$ liegt ein *hyperbolischer Zylinder* Φ_{31}

$$(3.B 31) \quad xz + \alpha_{00} = 0$$

und für $\alpha_{02} = \alpha_{00} = 0$ ein *reelles, schneidendes Ebenenpaar* Φ_{37} mit der Normalform

$$(3.B 37) \quad xz = 0$$

vor.

Nun gelte $S = f$, aber $g_1, g_2 \neq f$. Dann läßt sich k nach [6, 69] in der Normalform

$$\xi^2 - d_0 = 0 \text{ mit } d_0 > 0 \quad (3.27)$$

beschreiben. Die zugehörigen Flächen 2. Ordnung lauten dann

$$y^2 - d_0x^2 + \alpha_{03}z + \alpha_{00} = 0. \quad (3.28)$$

Für $\alpha_{03} \neq 0$ liegt ein *hyperbolisches Paraboloid* Φ_{26} vor, das sich auf die Normalform

$$(3.B 26) \quad y^2 - d_0x^2 + \alpha_{03}z = 0$$

transformieren läßt. Die Richtebenen dieses hyperbolischen Paraboloids sind parallel zu den beiden Ebenen $y = \pm \sqrt{d_0}x$, die miteinander den Winkel $2\sqrt{d_0}$ einschließen, womit d_0 als geometrische Größe nachgewiesen ist. Zur Deutung von α_{03} in (3.B 26) schneiden wir Φ_{26} mit den vollisotropen Ebenen $x = x_0 = \text{konst.}$

Dies sind kongruente isotrope Kreise vom Radius $-\frac{1}{\alpha_{03}}$. Aus der geometrischen

Bedeutung von d_0 und α_{03} folgt, daß (3.B 26) nicht weiter vereinfacht werden kann. Gilt in (3.28) $\alpha_{03} = 0$, $\alpha_{00} \neq 0$, so liegt ein *hyperbolischer Zylinder* Φ_{32} mit der Normalform

$$(3.B 32) \quad y^2 - d_0x^2 + \alpha_{00} = 0$$

vor. Für $\alpha_{03} = \alpha_{00} = 0$ stellt sich des *reelle, schneidende Ebenenpaar* Φ_{38}

$$(3.B 38) \quad y^2 - d_0x^2 = 0$$

ein.

Schließlich gelte $F = S$ und $g_1 = f$. Dann läßt sich k in projektiven Koordinaten durch $x_1x_2 = 0$ beschreiben und die zugehörigen Flächen 2. Ordnung werden durch

$$xy + \alpha_{03}z + \alpha_{00} = 0 \quad (3.29)$$

festgelegt. Für $\alpha_{03} \neq 0$ stellt (3.29) ein *hyperbolisches Paraboloid* Φ_{27} mit der Normalform

$$(3.B 27) \quad xy + \alpha_{03}z = 0$$

dar, während $\alpha_{03} = 0$, $\alpha_{00} \neq 0$ einen *hyperbolischen Zylinder* Φ_{33}

$$(3.B 33) \quad xy + \alpha_{00} = 0$$

liefert. Für $\alpha_{03} = \alpha_{00} = 0$ erhält man ein *reelles, schneidendes Ebenenpaar* Φ_{39} ,

$$(3.B 39) \quad xy = 0.$$

Damit sind alle Flächen 2. Ordnung des $I_3^{(2)}$ bestimmt, welche als Fernkurve ein reelles schneidendes Geradenpaar $\{g_1, g_2\}$ besitzen. Es bleibt noch der Fall zu betrachten, wo g_1, g_2 konjugiert-komplex sind und den reellen Schnittpunkt S besitzen.

Gilt zunächst $S \neq F$, dann kann man nach [6, 66] erreichen, daß g_1, g_2 durch

$$a^2\xi^2 + \beta^2\eta^2 = 0 \quad (3.30)$$

beschrieben wird, wobei $a^2 := \frac{1}{a^2}$, $\beta^2 := \frac{1}{b^2}$ gesetzt wurde. Die zugehörigen Flächen 2. Ordnung lauten

$$a^2y^2 + \beta^2z^2 + \alpha_{01}x + \alpha_{02}y + \alpha_{03}z + \alpha_{00} = 0 \quad (3.31)$$

und durch eine Schiebung in y - und z -Richtung läßt sich diese Gleichung zu

$$a^2y^2 + \beta^2z^2 + \alpha_{01}x + \alpha_{00} = 0 \quad (3.32)$$

vereinfachen. Gilt in (3.32) $\alpha_{01} \neq 0$, dann liegt ein *elliptisches Paraboloid* Φ_{40} vor, welches man nach Anwendung einer Schiebung in x -Richtung und nachfolgende Division mit $\alpha_{01} \neq 0$ durch die Normalform

$$(3.B 40) \quad a^2y^2 + \beta^2z^2 + x = 0$$

beschreiben kann; hierbei wurde eine Umbezeichnung der verbleibenden Koeffizienten unterdrückt. Gilt $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{00} \neq 0$, dann liegt für $\alpha_{00} < 0$ ein *elliptischer Zylinder* Φ_{43} vor, den man auf die Normalform

$$(3.B 43) \quad a^2y^2 + \beta^2z^2 - 1 = 0$$

transformieren kann. Für $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{00} > 0$ stellt sich der *nullteilige Zylinder* Φ_{46}

$$(3.B 46) \quad a^2y^2 + \beta^2z^2 + 1 = 0$$

ein. Für $\alpha_{01} = \alpha_{00} = 0$ in (3.32) gewinnt man das *konjugiert-komplexe Ebenenpaar* Φ_{49}

$$(3.B 49) \quad a^2y^2 + \beta^2z^2 = 0.$$

Nun gelte $S \in f$, $S \neq F$. Nach [6, 69] läßt sich dann k durch die Normalform $\eta^2 + d_0 = 0$ mit $d_0 > 0$ beschreiben. Mit $d_0 = a^2$ lauten die zugehörigen Flächen 2. Ordnung

$$z^2 + a^2x^2 + \alpha_{02}y + \alpha_{00} = 0. \quad (3.33)$$

Gilt $a_{02} \neq 0$, dann liegt ein *elliptisches Paraboloid* Φ_{41} vor, welches man auf die Normalform

$$(3.B 41) \quad z^2 + a^2x^2 + a_{02}y = 0$$

transformieren kann. Für $a_{02} = 0$, $a_{00} \neq 0$ liegt ein Zylinder vor. Dieser ist für $a < 0$ ein *elliptischer Zylinder* Φ_{44} mit der Normalform

$$(3.B 44) \quad z^2 + a^2x^2 - 1 = 0.$$

Für $a_{00} > 0$ gewinnt man den *nullteiligen Zylinder* Φ_{47}

$$(3.B 47) \quad z^2 + a^2x^2 + 1 = 0.$$

Für $a_{02} = a_{00} = 0$ schließlich erhält man das *schneidende, konjugiert-komplexe Ebenenpaar* Φ_{50}

$$(3)B 50) \quad z^2 + a^2x^2 = 0$$

Nun sei $S = F$. Die Geraden g_1, g_2 können in projektiven Koordinaten mittels $x_0 = x_2 - ax_1 = 0$, $x_0 = x_2 - \bar{a}x_1$ angesetzt werden, wobei $a \in \mathbb{C}$ gilt und \bar{a} die konjugiert-komplexe Zahl zu a bezeichnet. In affinen Koordinaten gilt $(y - ax)(y - \bar{a}x) = y^2 - (a + \bar{a})xy + (a\bar{a})x^2 = 0$. Wird $a = a + ib$ mit $b \neq 0$ gesetzt, so ist diese Gleichung mit

$$y^2 - 2axy + (a^2 + b^2)x^2 = 0 \quad (3.34)$$

äquivalent. Wendet man auf (3.34) die ebene isotrope Bewegung $\{x = \tilde{x}, y = \tilde{y} + a\tilde{x}\}$ an, so findet man mit $\beta := \frac{1}{b}$

$$\tilde{x}^2 + \beta^2\tilde{y}^2 = 0. \quad (3.35)$$

Wir können daher die Fernkurve k im folgenden in der Gestalt (3.35) ansetzen, wobei wir die Tilde unterdrücken. Die zugehörigen Flächen 2. Ordnung lauten

$$x^2 + \beta^2y^2 + a_{03}z + a_{00} = 0. \quad (3.36)$$

Für $a_{03} \neq 0$ ist (3.36) ein *elliptisches Paraboloid* Φ_{42} mit der Normalform

$$(3.B 42) \quad x^2 + \beta^2y^2 + a_{03}z = 0.$$

Für $a_{03} = 0$, $a_{00} \neq 0$ ist (3.36) ein Zylinder. Dies ist für $a_{03} < 0$ ein *elliptischer Zylinder* Φ_{45} , für den man die Normalform

$$(3.B 45) \quad x^2 + \beta^2y^2 - 1 = 0$$

gewinnt. Für $\alpha_{03} > 0$ erhält man den *nullteiligen Zylinder* Φ_{48}

$$(3.B 48) \quad x^2 + \beta^2 y + 1 = 0.$$

Schließlich findet man für $\alpha_{03} = \alpha_{00} = 0$ das *schneidende, konjugiert-komplexe Ebenenpaar* Φ_{51}

$$(3.B 51) \quad x^2 + \beta^2 y^2 = 0.$$

Damit sind auch alle Flächen 2. Ordnung bestimmt, deren Fernkurve ein konjugiert-komplexes, schneidendes Geradenpaar ist. Wir fassen zusammen im

SATZ 3. *Die Flächen 2. Ordnung der Klasse B des Flaggenraumes lassen sich durch die Normalformen (3.B 22—51) beschreiben. Alle in diesen Gleichungen verbleibenden Koeffizienten sind $\mathcal{B}_6^{(2)}$ -Invarianten.*

Fall C. Jeder *parabolische Zylinder* schneidet die Fernebene ω nach einer Doppelgeraden g , wobei die Zylindererzeugenden alle einen Punkt $S \in g$ als *Fernspitze* enthalten. Demnach müssen die Linienelemente $\{g, S\}$ bezüglich $\{f, F\}$ klassifiziert werden. Gilt $F \notin g$, $S \notin f$, dann kann man g nach Anwendung einer isotropen Bewegung durch $x_0 = x_3 = 0$ beschreiben und S in den Punkt $S(0 : 1 : 0 : 0)$ legen. Alle Flächen 2. Ordnung, die ω nach der Doppelgeraden g schneiden, lassen sich dann durch

$$z^2 + \alpha_{01}x + \alpha_{02}y + \alpha_{03}z + \alpha_{00} = 0 \quad (3.37)$$

beschreiben. Durch eine Schiebung in z -Richtung kann $\alpha_{03} = 0$ erreicht werden. Da die Erzeugenden dieses Zylinders den Punkt S enthalten müssen, folgt zwingend $\alpha_{01} = 0$ und man erhält aus (3.37)

$$z^2 + \alpha_{02}y + \alpha_{00} = 0. \quad (3.38)$$

Es ist $\alpha_{02} \neq 0$, sonst würden zwei parallele Ebenen oder eine Doppalebene vorliegen. Durch eine Schiebung in y -Richtung kann somit noch $\alpha_{00} = 0$ erzwungen werden und man erhält als Normalform eines *parabolischen Zylinders* vom Typ Φ_{52}

$$(3.C 52) \quad z^2 + \alpha_{02}y = 0.$$

Gilt $F \notin g$, $S \in f$, so ist für g die Darstellung $x_0 = x_3 = 0$ erreichbar und S hat die Koordinaten $S(0 : 0 : 1 : 0)$. Analog wie oben erhält man dann als Normalform eines *parabolischen Zylinders* Φ_{53}

$$(3.C 53) \quad z^2 + \alpha_{01}x = 0.$$

Gilt $F \in g$ und $F \neq S$, so ist $g : x_0 = x_2 = 0$ und $S(0 : 1 : 0 : 0)$ erreichbar und als Normalform eines *parabolischen Zylinders* vom Typ Φ_{54} stellt sich

$$(3.C 54) \quad y^2 + \alpha_{03}z = 0$$

ein. Gilt $F \in g$, $S = F$, so erhält man als Normalform eines *parabolischen Zylinders* vom Typ Φ_{55}

$$(3.C 55) \quad y^2 + \alpha_{01}x = 0.$$

Nun sei $g = f$ und $S \neq F$. Dann kann man durch eine isotrope Bewegung $S(0 : 0 : 1 : 0)$ erreichen. Als Normalform eines *parabolischen Zylinders* vom Typ Φ_{56} gewinnt man

$$(3.C 56) \quad x^2 + \alpha_{03}z = 0.$$

Diese Flächen wurden in [1, 125] als *Punkt-kugeln* bezeichnet. Gilt schließlich $g = f$ und $S = F$, so ergibt sich als Normalform des zugehörigen *parabolischen Zylinders* Φ_{07}

$$(3.C 57) \quad x^2 + \alpha_{02}y = 0$$

Diese Flächen wurden in [1, 125] als *Punktgrenzkugeln* bezeichnet

Für die Flächen (3.C 52) bzw. (3.C 53) sind die Schnitte mit den Ebenen $x = \text{const.}$ bzw. $y = \text{const.}$ jeweils kongruente Parabeln. Da diese Ebenen geometrisch ausgezeichnet sind, folgt nach [6, 74] die $\mathcal{B}_6^{(2)}$ -Invarianz von α_{02} bzw. α_{01} . Eine analoge Überlegung gilt für (3.C 54—57), wobei sich bei (3.C 56) bzw. (3.C 57) $\frac{1}{\alpha_{03}}$ bzw. $\frac{1}{\alpha_{02}}$ als *Radius der Punkt-kugel* bzw. *Punktgrenzkugel* einstellt (vgl. [1, 125]). Wir fassen zusammen im

SATZ 4. Die Flächen 2. Ordnung der Klasse C des Flaggenraumes sind durchwegs *parabolische Zylinder*, die sich durch die Normalformen (3.C 52—57) beschreiben lassen, wobei die in den Gleichungen verbleibenden Koeffizienten $\mathcal{B}_6^{(2)}$ -Invarianten sind.

Fall D. Parallele Ebenenpaare bzw. eine Doppalebene schneiden die Fernebene ω nach einer Doppelgeraden $g_1 = g_2 =: g$ (vgl. Abbildung 3). Gilt $F \notin g$, so kann man g gemäß [6, 67] auf die Normalform $x_0 = x_3 = 0$ transformieren. Alle Flächen 2. Ordnung durch g lassen sich dann in der Gestalt

$$z^2 + \alpha_{01}x + \alpha_{02}y + \alpha_{00} = 0 \quad (3.39)$$

schreiben. Die Ebene $x = \text{const.}$ müssen nun (3.39) über C nach zwei Geraden schneiden woraus $\alpha_{02} = 0$ folgt. Da analoges für die Ebenen $y = \text{const.}$ gilt, ergibt sich ebenso $\alpha_{01} = 0$. Damit gewinnt man aus (3.39)

$$(3.D 58, 61, 64) \quad z^2 + \alpha_{00} = 0.$$

Für $\alpha_{00} < 0$ liegt ein *reelles, paralleles Ebenenpaar* Φ_{58} vor; für $\alpha_{00} > 0$ ergibt sich ein *konjugiert-komplexes Ebenenpaar* Φ_{61} . Für $\alpha_{00} = 0$ schließlich stellt sich eine *Doppalebene* Φ_{64} ein. Nun gelte $F \in g$; $g \neq f$. Nach [6, 68] kann dann g durch $x_0 = x_2 = 0$ beschrieben werden und alle Flächen 2. Ordnung durch g besitzen die Darstellung

$$y^2 + \alpha_{01}x + \alpha_{03}z + \alpha_{00} = 0. \quad (3.40)$$

Wie oben schließt man, daß für Ebenenpaare über C stets $\alpha_{01} = \alpha_{03} = 0$ gelten muß. Damit gewinnt man die Normalform

$$(3.D 59, 62, 65) \quad y^2 + \alpha_{00} = 0.$$

Für $\alpha_{00} < 0$ liegt ein *reelles, paralleles Ebenenpaar* Φ_{59} vor; für $\alpha_{00} > 0$ ein *reelles, konjugiert-komplexes Ebenenpaar* Φ_{62} . $\alpha_{00} = 0$ liefert eine *Doppelebene* Φ_{65} .

Schließlich gelte $g = f$. Man erhält dann analog alle Ebenenpaare durch f über C in der Gestalt

$$(3.D 60, 63, 66) \quad x^2 + \alpha_{00} = 0.$$

Für $\alpha_{00} < 0$ ist dies ein reelles, paralleles Ebenenpaar Φ_{60} ; für $\alpha_{00} > 0$ liegt ein paralleles, konjugiert-komplexes Ebenenpaar Φ_{63} vor. Für $\alpha_{00} = 0$ stellt sich eine Doppelebene Φ_{66} ein. Wir fassen zusammen im

SATZ 5. *Die Flächen 2. Ordnung der Klasse D des Flaggenraumes sind durchwegs Ebenenpaare, die sich durch die Normalformen (3.D 58–66) beschreiben lassen, wobei die in den Gleichungen verbleibenden Koeffizienten $\mathcal{B}_6^{(2)}$ -Invarianten sind.*

Nun bleiben noch die in 2 erwähnten Typen von Ebenenpaaren zu beschreiben, wobei eine Ebene die Fernebene ω ist. Für den Typ Φ_{67} tritt nebst ω eine *nichtisotrope Ebene* auf und man erhält als Normalform

$$(3.E 67) \quad x_0 x_3 = 0.$$

Der Typ Φ_{68} besteht aus ω und einer *isotropen Ebene* und läßt sich durch

$$(3.E 68) \quad x_0 x_2 = 0$$

beschreiben. Der Typ Φ_{69} besteht aus ω und einer *vollisotropen Ebene* und läßt sich somit durch

$$(3.E 69) \quad x_0 x_1 = 0$$

festlegen. Für den Typ Φ_{70} , d. h. ω als *Doppelebene* erhält man die Normalform

$$(3.E 70) \quad x_0^2 = 0.$$

Damit sind alle 70 Typen von Flächen 2. Ordnung im projektiv erweiterten Flaggenraum durch Normalform beschreiben.

4. ZWEI ANWENDUNGEN

Die in 3 erstellten Normalformen ermöglichen es, Eigenschaften von Flächen 2. Ordnung zu studieren. Wir geben je eine Anwendung aus der *Analytischen Geometrie* bzw. *Differentialgeometrie*, wobei wir uns auf typische Einzelfälle beschränken.

Einer der interessantesten Sätze aus der *euklidischen* Elementargeometrie des Ellipsoids findet sich in [4, 274]. Wir geben dazu ein flaggeometrisches Analogon an. Dazu gehen wir von der Normalgleichung eines Ellipsoids Φ_2

$$x^2 + a^2y^2 + \beta^2z^2 + a_{00} = 0 \text{ mit } a_{00} < 0 \quad (4.1)$$

aus. Die vollisotrope Gerade $x = y = 0$ durch den Mittelpunkt $M(0, 0, 0)$ von Φ_2 besitzt geometrische Bedeutung und soll *vollisotrope Hauptachse* von Φ_2 heißen. Die nichtisotrope Ebene $\eta_1 \dots z = 0$ ist die Polarebene von F bezüglich Φ_2 und werde i. f. als *nichtisotrope Hauptebene* bezeichnet.

Die Ebene $\eta_2 \dots x = 0$ heiße *vollisotrope Hauptebene*. Ihr Pol P_1 bezüglich Φ_2 hat die Koordinaten $P_1(0 : 1 : 0 : 0)$. Die Verbindungsebene von P_1 mit der vollisotropen Hauptachse besitzt ebenfalls geometrische Bedeutung und werde als *isotrope Hauptebene* η_3 bezeichnet. Weiters nennen wir die Gerade $\eta_1\eta_3$ bzw. $\eta_1\eta_2$ *nichtisotrope* bzw. *isotrope Hauptachse* von Φ_2 . Wir beweisen den

SATZ 6. *Ist Φ_2 ein Ellipsoid des Flaggenraumes mit dem Mittelpunkt M und bezeichnen P_1, P_2, P_3 die Endpunkte von (paarweise konjugierten Halbmessern von Φ_2 , wobei keine Gerade MP_j isotrop bzw. vollisotrop ist, dann gilt für die isotropen Längen $d_i = d_i(M, P_i)$ ($i = 1, 2, 3$) dieser Halbmesser*

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \text{konst.}$$

Die Summe der Quadrate der Abstände der Punkte P_i von den drei Hauptebenen ist ebenfalls konstant.

Beweis. Wir setzen $-a_{00} = a^2$. Dann ist die paarweise Konjugiertheit der Ellipsoidpunkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, 3$) gleichwertig mit

$$\begin{cases} x_i^2 + a^2y_i^2 + \beta^2z_i^2 = a^2 & (i = 1, 2, 3) \\ x_1x_2 + a^2y_1y_2 + \beta^2z_1z_2 = 0 \\ x_1x_3 + a^2y_1y_3 + \beta^2z_1z_3 = 0 \\ x_2x_3 + a^2y_2y_3 + \beta^2z_2z_3 = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Einer Idee aus [4, 274] folgend, setzen wir $x_i = a \cos \lambda_i$, $y_i = \frac{a}{\alpha} \cos \mu_i$,

$z_i = \frac{a}{\beta} \cdot \cos \nu_i$ ($i = 1, 2, 3$). Dann liefert (4.2) die Bedingungen

$$\begin{cases} \cos^2 \lambda_i + \cos^2 \mu_i + \cos^2 \nu_i = 1 & (i = 1, 2, 3) \\ \cos \lambda_i \cos \lambda_j + \cos \mu_i \cos \mu_j + \cos \nu_i \cos \nu_j = 0 \\ (i \neq j, i, j : 1, 2, 3). \end{cases} \quad (4.3)$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda_1 & \cos \mu_1 & \cos \nu_1 \\ \cos \lambda_2 & \cos \mu_2 & \cos \nu_2 \\ \cos \lambda_3 & \cos \mu_3 & \cos \nu_3 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

ist somit *orthonormiert*. Für die isotropen Abstände der Punkte P_i von M gilt $d_i = d_i(M, P_i) = x_i$ ($i = 1, 2, 3$) und somit $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = a^2 (\cos^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2 + \cos^2 \lambda_3) = a^2 = \text{konst.}$ nach obigem. Diese Aussage ist gleichwertig mit der Aussage über die Abstände dieser Punkte von der vollisotropen Hauptebene. Für die Abstände l_i der Punkte P_i von der isotropen Hauptebene gilt $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{a^2}{\alpha^2} (\cos \mu_1^2 + \cos \mu_2^2 + \cos \mu_3^2) = \frac{a^2}{\alpha^2} = \text{konst.}$ Schließlich gilt für die Abstände s_i der Punkt P_i von der nichtisotropen Hauptebene $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \frac{a^2}{\beta^2} = \text{konst.}$ \diamond

Die erste Aussage dieses Satzes ist ein direktes zweifach isotropes Analogon zu [4, 274]. Die zweite Aussage ist typisch flaggeometrisch. Im einfach isotropen Raum wurde ein analoges Resultat in [8, 189] angegeben. Wir beweisen noch den folgenden

SATZ 7. *Bezeichnen T_i ($i = 1, 2, 3$) die Schnittpunkte der drei Tangentialebenen τ_i in den Punkten P_i dreier paarweise konjugierter Halbmesser eines Ellipsoids Φ_2 in $I_3^{(2)}$, dann gilt für ihre Abstände $s_i = s_i(M, T_i)$ ($i = 1, 2, 3$)*

$$\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} + \frac{1}{s_3^2} = \text{konst.} \quad (4.5)$$

Ebenso gilt für die Abstände d_i der Schnittpunkt R_i von τ_i mit der nichtisotropen Hauptachse von M die Beziehung

$$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} = \text{konst.} \quad (4.6)$$

Für die Mittelpunktsabstände l_i der Schnittpunkte L_i von τ_i der mit isotropen Hauptachse von Φ_2 gilt ebenfalls

$$\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} = \text{konst.} \quad (4.7)$$

Beweis. Die Tangentialebene τ_i in einem Punkt $P_i(x_i, y_i, z_i)$ an Φ_2 ist durch

$$xx_i + \alpha^2 yy_i + \beta^2 zz_i = 2a^2 \quad (4.8)$$

gegeben. Hieraus folgt $T_i \left(0, 0, \frac{2a^2}{\beta^2 z_i} \right)$, also $s_i = \frac{2a}{\beta \cos \nu_i}$. Daraus ergibt sich $\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} + \frac{1}{s_3^2} = \frac{\beta^2}{4a^2} = \text{konst.}$ Analog berechnet man $\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} = \frac{\alpha^2}{4a^2}$ bzw. $\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} = \frac{\alpha^2}{4a^2} = \text{konst.}$ \diamond

Anders als in der euklidischen oder einfach isotropen Flächentheorie existieren auf C^2 -Flächen des Flaggenraumes nur eine einparametrische Schar *zweifach isotroper*

Krümmungslinien [3, 40f]. Diese Kurven sind die Parallelschattengrenzen für Lichtpunkte $L \in f$ bezüglich Φ . Wir wollen im folgenden diese Krümmungslinie für ein *Ellipsoid* Φ_2 , für ein *einschaliges Hyperboloid* Φ_4 und ein *elliptische Paraboloid* $\Phi_{4,2}$ bestimmen. Die Polarebene eines Punktes $L(0 : 0 : p_2 : p_3)$ bezüglich Φ_2 ist durch $(\alpha^2 p_2) y + (\beta^2 p_3) z = 0$ gegeben. Für $L = F$ stimmt diese Polarebene mit $z = 0$ überein und schneidet Φ_0 nach dem *ersten wahren Umriß* $u_1 \dots x^2 + \alpha^2 y^2 = a^2$. Diese Ellipse ist gleichzeitig eine Krümmungslinie auf Φ_2 . Für $p_1 \neq 0$ setzen wir $\frac{p_2}{p_3} =: p$ und erhalten die Polarebene von L in der Gestalt $z = -\frac{\alpha^2}{\beta^2 p} y$. Der Grundriß der entsprechenden Krümmungslinie lautet somit

$$x^2 + \left(a^2 + \frac{\alpha^4}{\beta^2 p^2} \right) y^2 = a^2. \quad (4.9)$$

Dies ist eine Ellipse, welche die Ellipse u_1 in den Punkten $F_1(a, 0, 0)$ und $F_2(-a, 0, 0)$ berührt. Die Punkte F_1 und F_2 sind hierbei die gemeinsamen *isotropen Brennpunkte* von u_1 und allen Krümmungsliniengrundrissen (vgl. [6, 72]). Jede Krümmungslinie ergibt sich als Schnitt von Φ_2 mit der Polarebene von L und ist somit eine Ellipse. Da alle diese Polarebenen die nichtisotrope Hauptebene von Φ_2 enthalten, haben wir damit den

SATZ 8. *Die zweifach isotropen Krümmungslinien eines Ellipsoids Φ_2 des $I_3^{(2)}$ sind Ellipsen, die sich als Schnitte von Φ_2 mit den Ebenen durch die nichtisotrope Hauptachse von Φ_2 einstellen. Die Grundrisse dieser Krümmungsellipsen sind isotrop konfokal zum ersten Umriß u_1 von Φ_2 .*

Die zweite Aussage dieses Satzes ist ein zweifach isotropes Analogon zu einer Aussage im einfach isotropen Raum, die von *K. Strubecker* in [12, 250] angegeben wurde.

Für ein *einschaliges Hyperboloid* Φ_4 sind die zweifach isotropen Krümmungslinien durchwegs Hyperbeln 2. Art, die sich als ebene Schnitte von Φ_4 mit Ebenen durch die nichtisotrope Hauptachse von Φ_4 einstellen. Die Grundrisse aller dieser Hyperbeln haben mit der Hyperbel u_1 des 1. Umrisses die konjugiert-komplexen isotropen Brennpunkte gemeinsam.

Für ein *elliptisches Paraboloid* $\Phi_{4,2}$ sind die zweifach isotropen Krümmungslinien die ebenen Schnitte $y = \text{konst.}$, d. h. durchwegs *isotrope Kreise*. Diese drei Beispiele zeigen, daß die zweifach isotropen Krümmungslinien — anders als im einfach isotropen Raum — durchaus verschiedenartige Grundrisse besitzen können.

LITERATUR:

- [1] *H. Brauner*, Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, Journ. reine angew. Math. **224** (1966), 118—146.
- [2] *H. Brauner*, Geometrie des zweifach isotropen Raumes II, Journ. reine angew. Math. **226** (1967), 132—158.
- [3] *H. Brauner*, Geometrie des zweifach isotropen Raumes III, Journ. reine angew. Math. **228** (1967), 38—70.
- [4] *K. Kommerell*, Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes, Koehler-Verlag, Stuttgart 1950.

- [5] *H. M. Макарова*, Кривые второго порядка в плоской параболической геометрии, Уч. зап. Моск. гос. пед. Инст. **208** (1963), 222—251.
- [6] *H. Sachs*, Ebene isotrope Geometrie, Vieweg-Verlag, Braunschweig—Wiesbaden 1987.
- [7] *H. Sachs*, Geometrie des Flaggen- und Galileiraumes, Vieweg-Verlag, Wiesbaden 1991 (in Vorbereitung).
- [8] *H. Sachs*, Lineare Komplexbüschel im einfach isotropen Raum, J. of Geom. **23** (1984), 184—200.
- [9] *H. Sachs*, Theorie der Zykliden des Flaggenraumes I: Allgemeine Theorie und Klassifikation. (erscheint voraussichtlich im J. of Geom.).
- [10] *H. Sachs*, Theorie der Zykliden des Flaggenraumes II: *Strommer*-Zykliden (erscheint voraussichtlich in Geom. Ded.).
- [11] *H. Sachs*, Die Zykliden 3. Ordnung des Flaggenraumes (in Vorbereitung).
- [12] *K. Strubecker*, Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen, Jahresber. DMV **48** (1938), 236—257.
- [13] *Л. Б. Выжгина, И. Семенова, И. Тюрина*, Квадрики во флаговом пространстве, Уч. зап. Моск. обл. пед. Инст. **123** (1963), 491—507.

Angenommen in II. Abteilung
15. 11. 1990.

Montanuniversität Leoben
Institut für Mathematik
und angewandte Geometrie
Franz Josef Strasse 18
A-8700 Leoben, Austria

Geodätische Fakultät
41000 Zagreb, Kačićeva 26
Kroatien

Prilog teoriji ploha 2. reda u dvostruko izotropnom prostoru

Hans Sachs i Vlasta Šćurić-Čudovan

Sadržaj

Dvostruko izotropni prostor $I_3^{(2)}$ je trodimenzionalni afini prostor s apsolutnom figurom $\{\omega, f, F\}$, pri čemu je f pravac beskonačno daleke ravnine ω , a F točka pravca f . U radu su, u prostoru $I_3^{(2)}$, potpuno klasificirane plohe 2. reda u odnosu na grupu izotropnih gibanja u $I_3^{(2)}$ i to normalnim oblicima tih ploha, a dana je i njihova geometrijska interpretacija. Ti normalni oblici omogućuju daljnja istraživanja ploha, a posebno je interesantno istraživanje analogona u geometriji dvostruko izotropnog prostora s onima u elementarnoj euklidskoj geometriji odn. u geometriji jednostruko izotropnog prostora, za što su u radu dani primjeri.

Primljeno u II. razredu
15. 11. 1990.