JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VLASTA ŠĆURIĆ-ČUDOVAN

ZUR KLASSIFIKATIONSTHEORIE DER KEGELSCHNITTBÜSCHEL DER ISOTROPEN EBENE I. TEIL

Poseban otisak iz:

Rada 450 — Matematičke znanosti, svezak 9

ZAGREB 1990

Rad Jugosl. akad. znan. umj., mat. [450] 9 (1990), 41—51

ZUR KLASSIFIKATIONSTHEORIE DER KEGELSCHNITTBÜSCHEL DER ISOTROPEN EBENE I. TEIL

Vlasta Ščurić-Čudovan

Herrn em. o. Prof. Dr. *F. Hohenberg* zum 80. Geburtstag gewidmet.

Abstract. The subject matter is, using the synthetic method, to determine properties of those pencils of conics in the isotropic plane $I_2 \subset A_2 \subset P_2$, whose four basic points are distinct and real. For each of the 14 cases, the 3rd order curve k_f^3 consisting of all isotropic foci, as well as the curve m^2 of the pencil's centers of conics are also benig determined.

1. EINFÜHRUNG

Eine reelle affine Ebene $A_2(R)$, welche über eine Absolutfigur $\{f, F\}$ — bestehend aus einer Geraden $f \subset A_2$ und einem mit f inzidenten Punkt F — metrisiert wird, heißt eine isotrope Ebene $I_2(R)$. Die interessante Geometrie dieser Ebene kann in [4] bzw. [8] nachgelesen werden. Unter den vielen bemerkenswerten Originalarbeiten zur isotropen Geometrie sei hier vor allem die interessante Abhandlung [3] des Jubilars erwähnt, in welcher besondere Schließungsscharen von Dreiecken mit Methoden der isotropen Geometrie untersucht werden.

Die Kegelschnitte der isotropen Ebene wurden erstmals von *N. M. Makarova* in [5] bzw. *K. Strubecker* in [10] untersucht. In der vorliegenden Arbeit sollen die Kegelschnittbüschel in $I_2(R)$, gelegentlich aber in der komplexen Erweiterung der isotropen Ebene studiert werden, wobei wir uns zunächst synthetischer Methoden bedienen. Diese grobe Klassifikationstheorie, welche die geometrische Betrachtungsweise in den Vordergrund stellt, soll später mittels analytischer Methoden verfeinert werden. Die oskulierenden und hyperoskulierenden Kegelschnittbüschel wurden inzwischen von *H. Sachs* in [10] vollständig klassifiziert und analytisch beschrieben.

Wegen $I_2 \subset A_2 \subset P_2$ werden wir i. f. alle affinen bzw. projektiven Eigenschaften von Kegelschnittbüscheln oder auch anderen geometrischen Gebilden benützen ohne darauf im Einzelfall gesondert hinzuweisen. Die projektive bzw. affine Theorie der Kegelschnittbüschel kann in [1], [2], [6], [7], [11] nachgelesen werden. Wir bezeichnen i. f. Kegelschnittbüschel (KS-Büschel) mit dem Symbol $/k_n^2/$ und betrachten nur *nicht ausgeartete* Büschel, d. h. Büschel die nicht nur aus Geradenpaare bestehen.

Ein KS-Büschel $/k_n^2/$ ist bekanntlich durch zwei KS-e bestimmt. Diese beiden KS-e schneiden sich in vier Punkten A, B, C, D in algebraischen Sinn, welche

Grundpunkte des *KS*-Büschels genannt werden. Ein beliebiger Punkt der Ebene und diese vier Grundpunkte bestimmen einen KS dieses Büschels eindeutig. Je nach Realität bzw. Vielfachkeit dieser Grundpunkte und nach der Lage dieser Grundpunkte zur Absolutfigur $\{f, F\}$ der isotropen Ebene, läßt sich eine Klassifikation der Kegelschnittbüschel in I_2 vornehmen. Wir geben hier zunächst eine Übersicht über die gewonnenen Resultate. Die Herleitung für den *Typ I* erfolgt in dieser Abhandlung, die weiteren Typen werden an anderen Stellen untersucht werden:

Typ I ist durch vier verschiedene reelle Grundpunkte bestimmt und enthält mindestens 14 Büschelarten.

Typ II ist durch zwei Paare von konjugiertkomplexen Grundpunkten bestimmt und enthält mindestens 6 Büschelarten.

Typ III ist durch ein Paar reeller und verschiedener und ein Paar konjugiertkomplexer Grundpunkte bestimmt; er enthält mindestens 20 Büschelarten.

Typ IV ist durch einen doppelt zählenden reellen und zwei einfache reelle Grundpunkte bestimmt; er enthält mindestens 26 Büschelarten.

Typ V ist durch einen reellen doppelt zählenden und zwei konjugiert-komplexe Grundpunkte bestimmt. Dieser Typ enthält emindstens 11 Büschelarlen.

Typ VI. und VII Je zwei von vier Grundpunkte sind zusammengefallen und als solche reell oder auch konjugiert-komplex. Dieser Typ enthält mindestens 21 Büschelarten.

Typ VIII Je drei von vier Grundpunkte fallen zusammen; es liegt ein Oskulationsbüschel vor [9].

Typ ~~*VIII*~~ IX. Alle vier Grundpunkte sind zusammengefallen; es liegt ein Hyperoskulationsbüschel vor [9].

Bei allen diesen Büscheltypen können noch weitere Unterfälle auftreten.

Durch vier reelle verschiedene Grundpunkte A, B, C, D sind in allgemeinen außer den irreduzieblen KS-en auch drei singuläre in drei Geradenpaare AB, CD; AC, BD; AD, BC ausgeartete KS-e des Büschels $/k_n^2/$ bestimmt. Die drei Schnittpunkte $K = AB \cap CD$; $L = AD \cap BC$; $M = AC \cap BD$ werden *Hauptpunkte* des Büschels $/k_n^2/$ genannt. Die Punkte K, L, M können auch als Eckpunkte des gemeinsamen, dem Polarfeld (k^2) jedes KS-es k^2 dieses Büschels zugeordneten Polardreiecks aufgefaßt werden. Die einen Grundpunkt z. B. A enthaltenden Tangenten dieser KS-e bilden ein Strahlbüschel (A), wobei diese Tangenten und die KS-e des Büschels zueinander bijektiv sind.

Weiters ist bekannt, daß die von einem beliebigen Punkt T an einen Kegelschnitt $k^2 \subset /k_n^2/$ legbaren Tangenten, die Berührpunkte in den Schnittpunkten dieser Kurve k^2 mit jener Polaren haben, die diesem Punkt T bezüglich (k^2) zugeordnet ist. Eine beliebige Gerade berührt zwei KS-e eines Büschels $/k_n^2/$. Die Berührpunkte der von dem Punkt T an die KS-e des Büschels $/k_n^2/$ gelegten Tangenten bilden eine Kurve k^3 3. Ordnung [6], [7], [11]. Die Punkte dieser Kurve sind auch die Schnittpunkte der KS-e $k^2 \subset /k_n^2/$ mit den Geraden eines Büschels (P). Jede Gerade dieses Büschels ist dem Punkt T, bezüglich eines $(k^2) \subset (k_n^2)$ zugeordnete Polare und die Punkte T und P sind bezüglich (k_n^2) konjugiert.

Die Kurve k^3 enthält, bekanntlich, alle vier Grundpunkte A, B, C, D, die Punkte T und P und auch die drei Hauptpunkte K, L, M. Durch diese neun Punkte ist die Kurve k^3 vollständig bestimmt.

Fällt der beliebige Punkt T mit dem absoluten Punkt F der isotropen Ebene I_2 zusammen, dann werden die erwähnten Berührpunkte der Kurve k^3 zu den isotropen Brennpunkten der KS-e des Büschels $|k_n^2|$. Daraus folgt der

SATZ 1. *Die isotropen Brennpunkte der Kegelschnitte eines Büschels $|k_n^2|$ der isotropen Ebene I_2 bilden eine (eventuell reduzible) Kurve k_f^3 3. Ordnung. Diese Brennpunktskurve enthält die vier Büschelgrundpunkte, die drei Büschelhauptpunkte, den absoluten Punkt F und jenen, dem Punkt F, bezüglich des Büschels (k_n^2) konjugiert-zugeordneten Punkt P.*

Es sei erwähnt, da die Brennpunktskurve eines Büschels $|k_n^2|$ der euklidischen Ebene E_2 i. a. eine Kurve 6. Ordnung ist. [2, S. 473], [11, S. 251].

Die Kurve k_f^3 hängt, außer von dem absoluten Punkt F, auch von den Büschelgrund- und Hauptpunkten ab. Deswegen wird es zweckmässig sein, für jeden Typ und jede Art des Büschels $|k_n^2|$ die zugehörige Brennpunktskurve k_f^3 zu betrachten.

Zunächst möchten wir einige Behauptungen des Satzes 1 klarer machen.

Die Kurve k_f^3 enthält die Büschelsgrundpunkte als einfache Punkte. Die z. B. den Grundpunkt A enthaltenden Tangenten der KS-e des Büschels $|k_n^2|$ bilden ein Strahlbüschel (A). Genau eine Tangente dieses Büschels enthält den absoluten Punkt F und bestimmt damit jenen KS, den diese istorpe Tangente im Punkt A berührt.

Auch die Büschelhauptpunkte sind auf der Kurve k_f^3 einfache Punkte. Wie bekannt, ist ein solcher Punkt der Schnittpunkt eines Geradenpaares, in welches ein Büschelkegelschnitt entartet und daher enthält er zwei unendlich benachbarte Punktte dieses KS-es.

Die Fälle, in denen die Grund- und Hauptpunkte Mehrfachpunkte sind, sollen in dieser Arbeit nicht betrachtet werden.

Die drei Fernpunkte der Kurve k_f^3 sind ebenfalls von Interesse. Besonders ist dies der Fall mit dem reellen Punkt F, der sicher auf der Kurve k_f^3 liegt. Je nach der Art des Büschels $|k_n^2|$ ist F der Brennpunkt einer *speziellen Heprbel*, eines *parabolischen Kreises*, eines *Geradenpaares*, das einen *reduziblen isotropen Kreis* darstellt oder der gemeinsame Brennpunkt eines *speziellen Hyperbelbüschels.*

Auf Grund des bekannten Satzes von *Desargues* und *Sturm* folgt, daß alle KS-e eines Büschels die Ferngerade f in solchen, eine Involution bildenden Punktepaaren schneiden, deren Fixpunkte die Berührungspunkte derjenigen zwei Büschelkurven sind, welche die Gerade f als Tangente besitzen. (Vgl. [11, S. 248]) Solche Kurven sind in A_2 Parabeln und die zwei Berührungspunkte sind in I_2 ihre Brennpunkte.

Ist eine solche Involution *hyperbolisch*, dann sind die Fix-Brennpunkte *reell* und das Büschel enthält *zwei reelle Parabeln*. Z. B. alle Fälle *a*) dieser Arbeit.

Bei einer *elliptischen* Involution können die Fixpunkte und damit die Brennpunkte nur *konjugiertkomplex* sein und die *Parabeln* dieses Büschels sind *imaginär*. Z. B. alle Fälle *b*) dieser Arbeit.

Damit haben wir die übrigen zwei Fernpunkte der Brennpunktskurve k_f^3 in der Ebene I_2 erhalten.

Bemerkung. In dieser Arbeit wird die irreduzible Kurve k_f^3 nicht näher betrachtet. Je nach der Methode der Klassifikation gibt es nach *Newton* 72 Arten, nach *Plücker* 219, nach *Wiener* durch projektive Klassifikation 13 Arten von Kurven 3. Ordnung. (Vgl. [11, S. 373—396].)

Von Interesse ist auch der Polkegelschnitt der uneigentlichen Geraden f in Bezug auf ein KS-Büschel $/k_n^2/$. Er ist die Menge aller Mittelpunkte der Büschel KS-e und soll deshalb als *Mittelpunktskurve* m^2 2. Ordnung des Büschels $/k_n^2/$ bezeichnet werden.

Eine beliebige, den Mittelpunkt S eines KS-es $k^2 \subset /k_n^2/$ enthaltende Gerade g schneidet diesen KS in Punkten P_1 und P_2 und die Ferngerade f in einem Punkt Q. Dabei gilt: $DV(P_1\, P_2\, S\, Q) = -1$.

Eine dem absoluten Punkt F bezüglich eines (k^2) zugeordnete Polare enthält auch in I_2 den Mittelpunkt und die beiden Breennpunkt dieses KS-es. Zum Vgl. gibt es in E_2 zwei solche Polaren mit je zwei Brennpunkten und diese Polaren schneiden sich im Kegelschnittmittelpunkt.

Da die *Kurve* m^2, je nach der Art des Büschels $/k_n^2/$ eine *Hyperbel, Ellipse, Parabel,* aber auch ein *Geradenpaar* sein kann, erwähnen wir ihre ausgezeichnete Punkte. Diese sind bekanntlich die drei Büschelhauptpunkte K, L, M als die Mittelpunkte der singulären KS-e, die sechs Mittelpunkte aller Punktepaare, die sich aus den Grundpunkten bilden lassen und die zwei auf der Geraden f liegenden Parabelmittelpunkte.

Man kann noch eine Eigenschaft der Kurve m^2 in die Ebene I_2 direkt übertragen: Ist m^2 eine Hyperbel, dann enthält ein Zweig die Mittelpunkte einer Kurvenart (z. B. Ellipsen), der andere Zweig die Mittelpunkte der anderen Kurvenart (z. B. Hyperbeln) und die Fernpunkte gehören den Parabeln an. (Vgl. [11, S. 250].)

Die Kurven k_f^3 3. Ordnung und m_2^2 2. Ordnung haben i. a. sechs gemeinsame Punkte. Drei dieser Punkte sind die Hauptpunkte K, L, M, zwei weitere die uneigentlichen Parabelbrenn- und Mittelpunkte. Da in dieser Arbeit nur der Typ I betrachtet wird, sind die Punkte K, L, M immer reell, während die Parabelmittelpunkte auch konjugiertkomplex sein können.

In E_2 hat jeder der erwähnten Typen der KS-Büschel noch eine Menge metrischer Sonderarten, die von der Lage des Büschels zu den absoluten Kreispunkten der euklidischen Ebene abhängen.

In der isotropen Ebene I_2 besteht ein noch größerer Reichtum an KS-Büschelarten, da die Absolutfigur stärker ausgeartet ist. Um in dieser und in den folgenden Arbeiten einen konsequenten Aufbau sicherzustellen, wird folgende Bezeichnungsweise durch Indizes verwendet.

Index 1 bedeutet, daß die Grundpunkte eigentlich und die Geradenpaare von $/k_n^2/$ unabhängig vom absoluten Punkt F sind.

Index 2: Genau eine der Verbindungsgeraden der eigentlichen Grundpunkte enthält den absoluten Punkt F, d. h. sie ist eine isotrope Gerade.

Index 3: Ein Geradenpaar, d. h. zwei Verbindungsgeraden der eigentlichen Grundpunkte sind isotrop. Ein Hauptpunkt fällt mit dem absoluten Punkt F zusammen.

Index 4: Von zwei uneigentlichen Grundpunkte fällt keiner mit dem Punkt F zusammen. Die Verbindungsgerade der beiden eigentlichen Grundpunkte ist nicht isotrop.

Index 5: Zwei Grundpunkte sind uneigentlich und die Verbindungsgerade der beiden eigentlichen Punkte ist isotrop.

Nur diese fünf Hauptarten können auch im Büscheltyp II auftreten. Beim Typ I gibt es noch

Index 6: Einer von zwei uneigentlichen Grundpunkten stimmt mit dem absoluten Punkt F überein

Index 7: Einer der vier Grundpunkte ist uneigentlich und verschieden vom Punkt F

Index 8: Einer der vier Grundpunkte ist uneigentlich und stimmt mit dem Punkt F überein.

Einige dieser Arten besitzen beim Typ I und auch bei anderen Typen weitere Unterfälle. Einige Arten existieren bei den Typen IV, V und VI nicht, während neue Kennzeichnungen auftreten. Die Büschelarten des Typs VII/und ~~VIII~~ IX wurden von *H. Sachs* [9] mit anderen Methoden betrachtet.

Die wichtigsten Unterfälle sind jene, deren Indizes mit *a*) bzw. *b*) bezeichnet worden sind.

Je nachdem jeder der vier Grundpunkte auß erhalb des durch die drei anderen Grundpunkte gebildeten Dreiecks liegt oder ein Grundpunkt im Inneren eines solches Dreiecks liegt, wird das zugehörige Büschel dem Unterfall *a*) oder *b*) angehören. (Vgl. [11, S. 249].)

Im *Fall a*) bestimmen die Kurven k^2 des Büschels $/k_n^2/$ auf der Geraden f eine ***hyperbolische Involution.*** Sie enthält sowohl reelle als auch konjugiert-komplexe Punktpaare und besitzt zwei reelle Doppelpunkte. Dieses Büschel enthält daher unendlich viele ***Hyperbeln***, unendlich viele ***Ellipsen*** und ***zwei reele Parabeln.*** Die Gesamtheit der Ellipsen wird von der Gesamtheit der Hyperbeln durch die beiden Parabeln des Büschels getrennt. Jeder entartete KS des Büschels ist ein Geradenpaar. Die reellen nichtparallelen Geradenpaare treten unter den Hyperbeln, die reellen parallelen unter den Parabeln und die konjugiert-komplexen unter den Ellipsen auf. (Vgl. [2, S. 389].)

Im *Fall* (*b* bestimmen die Kurven k^2 des Büschels $/k_n^2/$ auf der Geraden f eine ***elliptische Involution***, die weder reelle Doppelpunkte noch konjugiert-komplexe Punktepaare enthält. Jeder nicht entartete KS des Büschels ist eine ***Hyperbel***, so daß der Fall (*b* ein ***Hyperbelbüschel*** darstellt. Die zwei ***Parabeln*** eines solchen Büschels sind ***imaginär.*** Unter den entarteten KS-en kann sich kein Paar konjugiert-komplexen Geraden, kein Parallelenpaar und keine Doppelgerade befinden. (Vgl. [2, S. 388].)

Die Mittelpunktskurve m^2 ist im Fall *a*) eine ***Hyperbel***, da sie die Fernmittelpunkte der Parabel des Büschels enthält und im Fall *b*) eine ***Ellipse***, da die Parabeln dieses Büschels imaginär sind. (Vgl. [2, S. 399].)

2. KLASSIFIKATION DER KS-BÜSCHEL VOM TYP I

$I_{1a)}$ Index 1 zeigt an, daß in diesem KS-Büschel keine der Verbindungsgeraden der eigentlichen Grundpunkte isotrop ist. Da aber der Fall *a*) vorliegt, enthält ein solches KS-Büschel: ***Ellipsen, Hyperbeln*** 1. und 2. ***Art***, eine ***spezielle Hyperbel*** als Grenzfall dieser zwei Arten und ***zwei Parabeln.*** (Vgl. [1, S. 384, Beispiel 1; S. 385—391; S. 449], [2, S. 378; S. 398].)

Die ***Brennpunktskurve*** k_f^3 3. Ordnung ist durch die neun Punkte $A, B, C, D, K, L, M, F, P$ ausreichend bestimmt.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 ist eine *Hyperbel*, welche durch die uneigentlichen reellen Parabelmittelpunkte und die in der Einführung erwähnten Punkte ausreichen bestimm ist.

Eine der Parabeln des KS-Büschels in $I_{1a)}$ kann die Gerade f im reellen absoluten Punkt F berühren, d. h. sie ist als *parabolischer Kreis* der isotropen Ebene I_2 anzusprechen. Ein solches Büschel stellt einen Unterfall $I_{1,1a)}$ von $I_{1a)}$ dar.

$I_{1,1a)}$ In einem solchen KS-Büschel liegt keine spezielle Hyperbel, da den Punkt F, der kein Grundpunkt ist, nur ein KS des Büschels enthalten kann. Die einzige Parabel dieses Büschels hat zwei Brennpunkte deren einer uneigentlich ist, also auf der Geraden f lieget. Ein parabolischer Kreis kann dagegen keinen eigentlichen Brennpunkt haben, da beiden in absoluten Punkt F zusammenfallen.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 berührt deshalb die Gerade f im Punkt F und schneidet sie im Brennpunkt der Parabel. Die Asymptote der Kurve k_f^3 ist in diesem Fall die uneigentliche Gerade f.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 ist eine *spezielle Hyperbel*.

Nach [2, S. 477] erzeugt in der Ebene E_2 ein Ellipsen-Hyperbel-Büschel mit einem Kreis auf der Ferngeraden f eine symmetrische Involution und die Kurve m^2 ist eine gleichseitige Hyperbel oder ein orthogonales Geradenpaar.

$I_{1b)}$ Im Fall *b)* liegt ein *Hyperbelbüschel* vor. Dieses Büschel wird von *reellen Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art* und *einer speziellen Hyperbel* als Grenzfall gebildet.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 hat nur einen reellen uneigentlichen Punkt in F, nämlich den Brennpunkt der speziellen Hyperbel des Büschels.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 ist ein *Ellipse*.

$I_{1c)}$ Ein Unterfall von $I_{1a)}$ liegt vor. Eine von zwei reellen Parabeln dieses *Ellipsen-Hyperbel Büschels* entartet in ein Geradenpaar. Die vier Grundpunkte liegen paarweise auf zwei parallelen Geraden und ein Hauptpunkt ist uneigentlich.

Ein solches, ein Paar paralleler Geraden enthaltendes Büschel, kann nie ein Unterfall von $I_{1b)}$ sein, d. h. es kann nie ein Hyperbel-Büschel vorliegen. (Vgl. [2, S. 389].)

Die *Kurven* k_f^3 und m^2 sind durch die bekannten Punkte ausreichend bestimmt.

$I_{1d)}$ Ein spezielles Unterfall von $I_{1a)}$: In diesem *Ellipsen-Hyperbel Büschel* sind *beide Parabeln* in *parallele Geradenpaare* entartet. Keines der Geradenpaare enthällt eine isotrope Gerade. Die *Hyperbeln* sind von 1. und 2. Art und als Grenzfall tritt eine *spezielle Hyperbel* auf.

Da die zwei Hauptpunkte uneigentlich sind, stimmt eine Seite des gemeinsamen Polardreiecks mit der Geraden f überein. Der einzige eigentliche Haupt- und Eckpunkt des Polardreiecks ist deshalb der *gemeinsame Mittelpunkt* aller KS-e des Büschels $/k_n^2/$. Dadurch haben wir ein Büschel von *konzentrischen* KS-e erhalten.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 ist irreduziebel.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 entartet in die eigentlichen Seiten des gemeinsamen Poldreiecks und liefert die Mittelpunkte der parallelen Geradenpaare, die die reduziblen Parabeln erzeugen.

$I_{2a)}$ Die Verbindungsgerade zweier eigentlicher Grundpunkte z. B. AB sei eine isotrope Gerade. Ein Büschel mit *Ellipsen, Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art* und *zwei Parabeln* liegt vor. Nur die spezielle Hyperbel, welche die Hyperbeln von 1. und 2. Art trennt, artet in diesem Fall in das *Geradenpaar ABF, CD* aus. Ein solches Geraden paar werde i. f. als »*spezielle singuläre Hyperbel*« bezeichnet.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 ändert sich im Vergleich mit den Fällen I_1 grundsätzlich, da sie in die *Gerade ABF* und in einen KS k_f^2 zerfällt. Jene Tangente, die aus dem Punkt F an die spezielle singuläre Hyperbel gelegt werden kann, »berührt« diese längs der Geraden AB, da sie in jedem Punkt auch zwei unendilch nahe Punkte dieser Geraden AC enthält und damit selbst Brennpunktsmenge ist. Da der Kegelschnitt k_f^2 der übrigen Brennpunkte der KS des Büschels $/k_n^2/$ auch die Brennpunkte der zwei Parabeln enthalten muß, ist k_f^2 eine *Hyperbel.*

Diese Entartung der Kurve k_f^3 könnte man auch auf folgende Weise einsehen. Die Brennpunkte eines KS-es $k^2 \subset /k_n^2/$ liegen auf der Polaren des Punktes F bezüglich (k^2). Die dem Punkt F bezüglich der KS-e des Büschels (k_n^2) zugeordneten Polaren bilden ein Strahlbüschel (P). Dieser Punkt P liegt aber auf der Geraden AB, da diese die Polare der speziellen singulären Hyprebel AB, CD sein muß. Die Gerade AB enthält somit vier Punkte F, P, A und B der Kurere k_f^3 3. Ordnung, was nur dann möglich ist, wenn die Gerade AB selbst ein Teil der Kurve k_f^3 ist. Der Punkt P halbiert die Spanne AB, da $DV(ABFP) = -1$ ist.

Die Bestandteile ABF und k_f^2 der reduziblen Kurve k_f^3 können *keine reellen gemeinsamen Punkte* besitzen. Auf Grund der Definition eines KS-Büschels folgt unmittelbar, daß zwei seiner KS-e auch in den Grundpunkten keine gemeinsame Brennpunkte haben können. Ein regulärer KS $k^2 \subset /k_n^2/$ der z. B. im Punkt A die Gerade AB berühren würde, müßte auch den Grundpunkt B enthalten, was unmöglich ist.

Man könnte dieses Problem noch von einem anderen Standpunkt aus betrachten. Setzen wir voraus, ein regulärer KS $k^2 \subset /k_n^2/$ habe eine Tangente AF mit dem Brennpunkt im Punkt A. Da die singuläre spezielle Hyperbel ABF, CD ihren Brennpunkt auch im Punkt A auf der Tangente AF hat, würden zwei KS-e des Büschels $/k_n^2/$ und daher alle KS-e dieses Büschels die gemeinsame Tangente mit dem Berührpunkt in A haben. Da beim Typ I vorausgesetzt wurde, daß alle vier Grundpunkte reell und getrennt sind, kann die Gerade AB keinen weiteren KS außer ABF, CD berühren.

Damit ist auch die prinzipielle Lösung des Problems der Brennpunkte der Hyperbel 2. Art gegeben, da diese keine reellen Brennpunkte besitzen.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 is teine *Hyperbel,* welche durch die bekannten Punkte ausreichend bestimmt ist.

$I_{2b)}$ Dieser Fall *b)* bestimmt wieder ein *Hyperbelbüschel* mit zwei *imaginären Parabeln.* Der Grenzfall der *Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art* ist eine *spezielle singuläre Hyperbel,* z. B. *ABF, CD.*

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 3. Ordnung entartet wie im Fall $I_{2a)}$ in die *Gerade ABF* und in *einen KS* k_f^2. Dieser KS enthält die Brennpunkte der imaginären Parabeln und kann somit nur eine *Ellipse* sein.

Auch die *Mittelpunktskurve* m^2 enthält dieselben uneigentlichen imaginären Parabelmittelpunkte und ist daher ebenfalls eine *Ellipse.*

$I_{2ad)}$ Hier liegt ein Unterfall von $I_{1d)}$ und $I_{2a)}$, also ein *Ellipsen-Hyperbel Büschel* vor. Beide *Parabeln* entarten in die *parallelen Geradenpaare*, während die spezielle Hyperbel in die *spezielle singuläre Hyperbel entartet.*

Der einzige eigentliche Hauptpunkt ist der gemeinsame Mittelpunkt aller KS-e des Büschels $/k_n^2/$ und dadurch ist ein *konzentrisches* KS-Büschel bestimmt.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 entartet wie im Fall $I_{2a)}$ in die *isotrope Verbindungsgerade* der Grundpunkte und in eine *Hyperbel.*

Die *Mittelpunktskurve* m^2 entartet wie im Fall $I_{1d)}$ in *zwei* eigentliche *Verbindungsgeraden* der Hauptpunkte.

I_3 Beide Geraden eines *Geradenpaares* z. B. AB, CD sind *isotrop.* Ein solches Geradenpaar werde i. f. als ein *»reduzibler isotroper Kreis I. Stufe«* bezeichnet.

Ein durch den Index 3 bezeichnetes KS-Büschel kann nur dem Fall *a)* angehören. Das Büschel wird von *Ellipsen, Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art* und einer *Parabel* gebildet; die andere Parabel und die spezielle Hyperbel sind in den *reduziblen isotropen Kreis* 1. *Stufe* entartet.

Im Vergleich mit dem Fall $I_{1a)}$ erleidet die *Brennpunktskurve* k_f^3 wesentliche Veränderungen. Sie artet in die *isotropen Geraden* ABF, CDF als Menge der Brennpunkte des reduziblen isotropen Kreisse aus, so daß der ergänzende Bestandteil zur Kurve 3. Ordnung nur eine *Gerade* sein kann. Die Brennpunkte aller übrigen KS-e liegen tatsächlich auf der gemeinsamen, dem Punkt $K \equiv F$ bezüglich der KS-e des Büschels (k_n^2) zugeordneten Polaren ML, die auch den uneigentlichen Brennpunkt der einzigen Parabel dieses Büschel enthalten muß. Der Punkt $K \equiv F$ ist ein Eckpunkt und die Gerade LM die gegenüberliegende Seite des gemeinsamen Poldreiecks des Büschels (k_n^2). Wegen $K \equiv F$ halbiert die Gerade LM die Spanne AB bzw. CD, da auch $DV(FABP_1) = -1$ gilt, wobei $P_1 = AB \cap LK$ ist.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 entartet in die *Gerade* ML als Gesamtheit der Mittelpunkte aller KS-e des Büschels $/k_n^2/$ und in eine, die *Strecke* AB, CD *halbierende Gerade*, die von den Mittelpunkten des reduziblen Kreises gebildet wird.

Wird in der *Ebene* E_2 ein solches *Ellipsen-Hyperbel Büschel mit einem Kreis* betrachtet, so bilden die *Mittelpunkte* dieses KS-Büschels ein *orthogonales Geradenpaar.* (Vgl. [2, S. 477].)

I_4 Zwei Grundpunkte, z. B. A und B und der Hauptpunkt K sind uneigentliche Punkte, aber keiner dieser Punkte stimmt mit dem Punkt F überein. Die KS-e des Büschels $/k_n^2/$ bestimmen auf der Geraden f eine *identische Involution,* da sie alle dieselben Punkte A und B enthalten müßen. Alle regulären KS-e können nur *Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art* mit untereinander *parallelen Asymptoten* der *Richtungen* A bzw. B sein und bilden ein *homothetisches Hyperbelbüschel.* (Vgl. [1, S. 452, S. 457, Beispiel 4, Abb. 191], [2, S. 389, 393].)

Dieses Büschel enthält ein Geradenpaar ABF, CD das als *»reduzibler isotroper Kreis* 2_1. *Stufe«* bezeichnet wird. Die übrigen zwei Geradenpaare AC, BD und AD, BC gehören den singulären Hyperbeln an.

Bemerkung. Um einen KS der Ebene I_2 als eine Art Kreis zu betrachten könnte, muß er die uneigentliche Gerade f im Punkt F berühren, d. h. mit ihr zwei unendlich benachbarte Punkte haben und dies ist der Fall mit dem Geradenpaar ABF, CD.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 muß wieder ausarten, da sie die *Gerade* $f:ABF$ als Menge der Brennpunkte des reduziblen isotropen Kreises ABF, CD enthält. Die übrigen KS-e haben die Brennpunkte auf einer, die Grundpunkte C, D und die Hauptpunkte L, M enthaltender *Ellipse*, da ein Hyperbelbüschel ohne reelle Parabeln vorliegt. Die konjugiertkomplexen Schnittpunkte der Geraden des Büschels (F) mit dieser Ellipse, ergeben die Brennpunkte der Hyperbeln 2. Art.

Das Viereck $CLDM$ ist ein Parallelogramm und seine Diagonale ML ist die gemeinsame, dem Hauptpunkt $K \in f$, bezüglich aller $(k^2) \subset (k_n^2)$ zugeordnete Polare. Diese Gerade ML ist demnach der *gemeinsame Durchmesser* aller Hyperbeln des Büschels $/k_n^2/$ und auch der Träger aller Mittelpunkte dieser Hyperbeln.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 entartet danach in die einfache eigentliche *Gerade* ML und in die uneigentliche *Gerade* f als die Menge der Mittelpunkte des reduziblen isotropen Kreises. (Vgl. [1, S. 454], [2, S. 403].)

I_5 Die uneigentlichen Punkte seien A und B und der Hauptpunkt K stimme mit dem absoluten Punkt F überein. Beide *Geraden* ABF und CDF sind dann isotrop und dieses Geradenpaar wird als *»reduzibler isotroper Kreis* 2_2 *Stufe«* bezeichnet.

Die regulären KS-e dieses Büschels sind wie im Fall I_4 *homothetische Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art* mit untereinander parallelen Asymptoten der Richtung A bzw. der Richtung B. Die beiden übrigen singulären KS-e AD, BC und AC, BD bilden die Grenzfälle der zwei Hyperbelarten. Auch in diesem Fall liegt ein *homothetisches Hyperbelbüschel* vor.

Die Ausartung der *Brennpunktskurve* k_f^3 ist hier erheblich größer als im Fall I_4, da die Kurve k_f^3 in die *Geraden* ABF und CDF der Brennpunkte des reduziblen isotropen Kreises und in die Gesamtheit der Brennpunkte aller Hyperbeln längs der *Geraden* ML entartet. Diese Gerade ML ist, wie schon mehrmals erwähnt wurde, die gemeinsame, dem Punkt $K \equiv F$ bezüglich aller $(k^2) \subset (k_n^2)$ zugeordnete Polare.

Die Punkte C, L, D, M bilden wieder ein Parallelogramm.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 artet wie im Fall I_4 in die *Geraden* ML und $f{:}ABKF$ aus.

I_6 Zwei Grundpunkte A und B liegen auf der Geraden f; einer von diesen Punkten, z. B. A stimmt mit dem absouten Punkt F überein. Die *regulären KS-e* dieses Büschels sind *spezielle Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art*, da sie alle je eine Asymptote der Richtung $A \equiv F$ haben. Alle Asymptoten der Richtung $A \equiv F$ bzw. der Richtung B sind untereinander parallel.

Einer der singulären KS-e: AB, CD wird als *»reduzibler isotroper Kreis* 2_1*. Stufe«* bezeichnet, während die beiden anderen Geradenpaare AC, BD und AD, BC den reduziblen isotropen speziellen Hyperbeln angehören. Diese trennen die speziellen Hyperbeln der 1. und 2. Art.

Dieses KS-Büschel ist ein *homothetisches Büschel aus speziellen Hyperbeln.*

Alle diese speziellen Hyperbeln haben den gemeinsamen Brennpunkt im Punkt $A \equiv F$. Die *Brennpunktskurve* k_f^3 entartet in diesem Fall in die *drei isotrope Geraden* AB, AC, AD, welche als Mengen der Brennpunkte der drei singuläre KS-e dieses Büschels aufzufassen sind.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 entartet wie im Fall I_4 und I_5 in die *Gerade* ML als Menge der Mittelpunkte aller KS-e und in die, die Mittelpunkte des reduziblen isotropen Kreises enthaltende *Gerade* $f{:}ABK$.

Diesen Fall könnte man als einen speziellen von I_4 und I_5 betrachten. Die Punkte C, L, D, M bilden wieder ein Parallelogramm, diesen Seiten CL, DM auf isotropen Geraden liegen.

Bei verschiedenen Betrachtungen in dieser Arbeit wurden Analogien zur euklidischen Situation aufgefunden. Dies ist auch für den Typ I_6 möglich, wenn man eine *spezielle Hyperbel* der *isotropen Ebene* als isotropes Analogon zur *gleichseitigen Hyperbel* der *euklidischen Ebene* ansicht. Die folgende Plausibilitätserklärung legt dies nahe: Eine gleichseitige Hyperbel in der euklidischen Ebene E_2 ist durch orthogonale Asymptoten gekennzeichnet, d. h. bezeichnen wir die Asymptotenfernpunkte mit U_1, U_2 gilt $DV(F_1 F_2 U_1 U_2) = -1$, wobei F_1, F_2 die absoluten Kreispunkte der euklidischen Ebene sind. Die isotrope Ebene kann man sich aber aus der euklidischen Ebene entstanden denken, indem man F_1 mit F_2 zusammenfallen läßt: $F_1 = F_2 = F$. Bei diesem Grenzprozeß gilt aber z. B. $U_1 = F$, während i. a. $U_2 \neq F$ bleibt. Eine nähere Untersuchung der speziellen Hyperbel wird an anderer Stelle erfolgen. (Vgl. [2, S. 476].)

I_7 Einer der vier Grundpunkte, z. B. $A \not\equiv F$ ist uneigentlich. Die KS-e dieses Büschels bestimmen auf der Geraden f eine *parabolische Involution.*

Ein solches Büschel wird von *Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art*, einer *speziellen Hyperbel*, einer *zweifachen Parabel* mit dem Brenn- und Mittelpunkt im Punkt A und *drei singulären Hyperbeln* AB, CD; AC, BD; AD, BC gebildet.

Der gemeinsame uneigentliche Punkt aller Hyperbeln liegt im Fernpukt A, der auch der gemeinsame Punkt aller untereinander parallelen Asymptoten dieser Hyperbeln ist. Der andere uneigentliche Punkt kann für zwei Hyperbeln nie zusammenfallen.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 ist irreduzibel. Die Gerade f berührt sie im Punkt A und schneidet sie im Brennpunkt F der speziellen Hyperbel.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 ist ein KS mit dem zweideutigen Punkt im Punkt A. Er kann nur eine die Punkte K, L, M und die Mittelpunkte der Abstände BC, DC enthaltende *Parabel* sein. (Vgl. [1, S. 488, Beispiel 2; S. 451, Abb 185], [2, S. 392, 395; S. 399—401].)

I_8 Einer der vier Grundpunkte, z. B. A ist uneigentlich und stimmt mit dem Punkt F überein. In diesem Büschel liegt der *zweifache parabolische Kreis*, während die anderen regulären KS-e *spezielle Hyperbeln* sind. Jeder der drei Geradenpaare AB, CD; AC, BD; AD, BC besitzt je eine isotrope Gerade und gehört danach den *singulären speziellen Hyperbeln* an. Die KS-e dieses Büschels bestimmen auf der Geraden f eine *parabolische Involution* mit dem Fixpunkt im Punkt $A \equiv F$.

Die *Brennpunktskurve* k_f^3 enhält den gemeinsamen Brennpunkt A aller $k^2 \subset \subset /k_n^2/$ und artet in *drei isotrope Geraden* AB, AC, AD der singulären Hyperbeln aus.

Die *Mittelpunktskurve* m^2 ist ein *parabolischer Kreis*, da er im Punkt $A \equiv F$ den zweideutigen Punkt hat und noch die bekannten Punkte enthalten muß. (Vgl. [2, S. 475—476].)

LITERATUR:

[1] *R. Cesarec,* Analitička geometrija u ravnini, Školska knjiga, Zagreb 1957.
[2] *L. Heffter, C. Koehler,* Lehrbuch der analytischen Geometrie, I Band, Teubner, Leipzig und Berlin 1905.
[3] *F. Hohenberg,* Ein projektiver Sonderfall des Scheießungssatzes von *Poncelet* und seine Deutung in der isotropen Geometrie, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, **194** (1985), 1—14.
[4] *И. М. Яглом,* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, Наука, Москва 1969.
[5] *Н. М. Макарова,* Кривые второго подядка в плоской параболической геометрии, «Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии», Ученые записки МГПИ им. Ленина (1963), 222—251.
[6] *V. Niče,* Uvod u sintetičku geometriju, Školska knjiga, Zagreb 1956.
[7] *Th. Reye,* Geometrie der Lage, Leipzig 1910.
[8] *H. Sachs,* Ebene isotrope Geometrie, Vieweg, Wiesbaden 1987.
[9] *H. Sachs* Oskulierende und Hyperoskulierende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene I, II, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 1987.
[10] *K. Strubecker,* Geometrie in einer isotropen Ebene, Math. Naturwiss. Unterricht **15** (1962), 297—306, 343—351, 385—394.
[11] *H. E. Timerding,* Repertorium der höheren Geometrie I Hälfte, Teubner, Leipzig und Berlin, 1910.

Angenommen in II. Abteilung
15. 3. 1988.

Geodätische Fakultät
41000 Zagreb, Kačićeva 26
Jugoslawien

Prilozi teoriji klasifikacije pramena konika izotropne ravnine, I. dio

Vlasta Ščurić-Čudovan

Sadržaj

U izotropnoj ravnini $I_2 \subset A_2 \subset P_2$ određuju se sintetičkom metodom svojstva onih pramenova konika, kojima su četiri temeljne točke različite i realne. U svakom od 14 slučajeva određuje se i krivulja k_f^3 3. reda izotropnih žarišta i krivulja m^2 2. reda središta konika pramena.

Primljeno u II. razredu
15. 3. 1988.