JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VLASTA ŠĆURIĆ-ČUDOVAN

WEITERE UNTERSUCHUNGEN IN DER GESAMTHEIT (MF^2)
I. TEIL.
KOMPLEX (TK) UND KOMPLEX (MK)

Poseban otisak iz:

Rada 450 — Matematičke znanosti,
svezak 9

ZAGREB 1990

Rad Jugosl. akad. znan. umj. mat. [450] **9** (1990), 9—21

WEITERE UNTERSUCHUNGEN IN DER GESAMTHEIT (MF^2) I. TEIL. KOMPLEX (TK) UND KOMPLEX (MK)

Vlasta Ščurić-Čudovan

Abstract. The paper investigates the structures constituted by the rays of the complex (TK), respectively of the complex (MK), assuming that these rays are associated to the points of two straigh lines and resulting from some partition of a quadrics bundle into a one-parameter family (MF^2) of pencils (F^2) of quadrics.

Einleitung. Diese Arbeit ist eine Fortsetzung meiner Arbeiten [11] und [12]. Die Untersuchungen werden im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum P^3 durchgeführt.

Ein Bündel $/F^2$ von Quadriken ist bekanntlich durch drei nicht in einem Büschel liegende Quadriken bestimmt und es besteht aus ∞^2 Quadriken. Diese Quadriken bilden auch ∞^2 Flähenbüschel und jede Quadrik befindet sich in ∞^1 dieser Flächenbüschel. Da durch jede Fläche des Bündels $/F^2$ auch ihr Polarraum bestimmt ist, ist durch das Bündel $/F^2$ auch ein Bündel $(F^2$ der Polarräume dieser Flächen bestimmt.

Schon die eben erwähnten Tatsachen zeigen uns deutlich, dass die Zutritte zu den Problemen und ihren Lösungen im Bereich eines Bündels $(F^2$ verschieden sein können. Das Bündel könnte man z. B. als das Ganze betrachten. Auf verschiedene aber bestimmte Weisen sind durch das Flächenbündel auch verschiedene Gebilde bestimmt. Möchten wir eine feinere Struktur dieser Gebilde untersuchen, wird es zweckmäsig sein, die Eigenschaften jener auf gewisse Weise einfacheren Gebilde, die durch einzelne Flächenbüschel bestimmt sind, zu betrachten. Nur von einer Menge von ∞^2 Flächenbüschel zu sprechen wäre dabei kaum zweckmäsig.

In den Arbeiten [11], [12] war es die Absicht, eine Möglichkeit zu finden, das Bündel $/F^2$ als Vereinigungsmenge einer einparametrigen Gesamtheit von Büscheln aufzufassen. Wäre dies möglich, könnte man mit den Büscheln der Quadriken des Bündels $/F^2$ genauso wie mit irgendeiner kontinuierlichen Reihe verfahren. In diesem Fall wären auch die Gebilde, die auf eine bestimmte Weise durch die Büschel einer slochen kontinuierlichen Gesamtheit bestimmt sind, auch kontinuierlich verbunden.

Die erwähnte Absicht wurde auf folgende Weise durchgefühert.

Ein bestandteil des Bündels $/F^2$ sind ∞^1 Kegelflächen. Die Spitzen dieser Kegel bilden eine Raumkurve k^6 6. Ordnung. Die einem beliebigen Punkt $M \in k^6$

bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiert zugeordneten Punkte bilden eine Gerade m, welche die Trisekante der Kurve k^6 ist [7].

Der erwähnte Punkt $M \in k^6$ ist die Spitze einer Kegelfläche $M^2 \subset /F^2$. Eine beliebige Fläche des Bündels $/F^2$ bestimmt mit der Fläche M^2 ein Flächenbüschel $/F^2/$. Alle solchen ∞^1 Büschel bilden eine Menge, die als Gesamtheit $/MF^2/$ bezeichnet wird. Die Büschel dieser Menge bilden, wie im [11] festgestellt wird, eine einparametrige Familie.

Der Punkt $M \in k^6$ ist nämlich als Spitze der gemeinsamen Kegelfläche aller Büschel $/F^2/ \subset /MF^2/$ auh der gemeinsame Eckpunkt aller Polartetraeder der Polarraumbüschel $(F^2) \subset (MF^2)$. Je drei übrige Eckpunkte eines jeden dieser Tetraeder liegen in derselben Ebene des Büschels $[m]$. Eine beliebige Ebene dieses Büschels schneidet die Kurve k^6 in drei festen Punkten der Geraden m und in den erwähnten Eckpunkten eines Polartetraeders eines bestimmten Büschels $(F^2) \subset$ $\subset (MF^2)$. Eine beliebige Gerade r durchsetzt die Ebenen des Büschels $[m]$ in einer Punktreihe (r). Die Punkte dieser Punktreihe, die Ebenen des Büschels $[m]$ und dadurch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ sind untereinander bijektiv zugeordnet. Damit ist eine ein-parametrige Familie (MF^2) der Büschel (F^2) erhalten.

Es ist auch bekannt, dass durch jedes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ vier Komplexe bestimmt sind u. zw. der *Reye*sche tetraedrale Komplex 2. Grades oder der Komplex (TK) [3], [7], [11], der *Majcen*sche Komplex 3. Grades oder Komplex $(MK$ [1], [2], [8], [11], der orientierte *Niče*sche Komplex 8. Grades oder der Komplex (VN) [5], [9], [10], [12] und der Noramlenkomplex 8. Grades [4].

In dieser Arbeit wird unser Augenmerk auf die Untersuchungen jener Gebilde gerichtet, die die Strahlen des Komplexes (TK) bzw. des Komplexes (MK) bilden. Diese Strahlen werden durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt und auf gewisse Weisen den Punkten einer beliebigen Geraden g bzw. den Punkten einer Geraden g_k zugeordnet. Dabei ist die Gerade g_k konjugiert zur Geraden g bezüglich der erwähnten Kegelfläche M^2 und enthält den Punkt $M \in k^6$. Genauso wie im [11], wo ein spezieller Fall des Komplexes (TK) und des Komplexes (MK) betrachtet wurde, wird unser Interesse ausser auf allgemeine Resultate immer darauf gerichtet sein, für einen jeden Strahl der erwähnten Komplexe festzustellen, welchem Punkt er zugeordnet ist und durch welches der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ er bestimmt ist. Dadurch wird auch die gesuchte feinere Struktur der Gebilde hervorkommen.

Errinern wir uns noch, dass die den Punkten einer beliebigen Geraden g, bezüglich eines Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordneten Punkte eine Raumkurve g^3 3. Ordnung bilden [7]. Betrachten wir indessen eine den Punkt $M \in k^6$ enthaltende Gerade g_k, dann entartet eine solche Kurve 3. Ordnung in einen Kegelschnitt g^2 und in die Gerade m, die genau dem Punkt M konjugiertzugeordnet ist. Wie in [11] gezeigt wurde, schneidet die Ebene der Kurve g^2 die Raumkurve k^6 ausser im Punkt M in noch genau fünf Punkten, welche diesen Kegelschnitt vollständig bestimmen. Wegen der bijektiven Zuordnung der Punkte der Reihen (g_k) und (g^2) schneidet die Gerade m den Kegelschnitt g^2 in genau jenem Punkt, der in dieser Zuordnung dem Punkt $M \in g_k$ entspricht.

In demselben Sinn ist es möglich, auch jene den Punkten der Kurve g^3 3. Ordnung bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordneten Punkte zu betrachten. Diese Punkte sollen eine Kurve 9. Ordnung bilden. Da aber die Punkte der Kurve g^3 und die Punkte der Geraden g bijektiv zugeordnet sind, muss die erwähnte

Kurve 9. Ordnung in die Gerade g und in eine Kurve 8. Ordnung zerfallen. Diese Kurve 8. Ordnung kann selbst in 8 Geraden ausarten.

Auf der Kurve g^3 sollen deshalb acht solche Punkte liegen, denen auf die beschriebene Weise nicht nur je ein Punkt der Geraden g, sondern je eine die Gerade g schneidende Gerade zugeordnet ist. Anderseits ist es bekannt, dass die den Punkten der Kurve k^6 bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiert zugeord Geraden die Trisekanten dieser Kurve sind und die Erzeugenden einer Regelfläche F^8 8. Grades sind [7]. Die Gerade g durchsetzt diese Fläche F^8 in acht Punkten. Die diesen Punkten bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugierten Punkte sind die acht Schnittpunkte der Kurven g^3 und k^6. Jene acht Erzeugenden der Fläche F^8, die den erwähnten Schnittpunkten zugeordnet sind, bilden die gesuchte zerfallene Kurve 8. Ordnung.

SATZ 1. *Sind die Punkte einer Kurve g^3 3. Ordnung konjugiert zu Punkten einer beliebigen Geraden g bezüglich des Bündels $(F^2$, dann bilden alle zu den Punkten von g^3 konjugierten Punkte bezüglich $(F^2$ eine Kurve 9. Ordnung, die in die Gerade g und in acht die Gerade g schneidende Geraden zerfällt. Diese acht Geraden sind bezüglich des Bündels $(F^2$ den Schnittpunkten der Kurven g^3 und k^6 konjugiert zugeordnet.*

A. DER TETRAEDRALE KOMPLEX ODER DER KOMPLEX (TK)

Ein dem beliebigen Punkt T zugeordneter und durch ein Büschel $(F^2) \subset$ $\subset (MF^2)$ bestimmter Strahl t des Komplexes (TK) ist die Schnittgerade der dem Punkt T bezüglich der Polarräume der Flächen dieses Büschels (F^2) zugeordneten Polarebenen [7]. Eine solche Punkt-Strahl Zuordnung wird durch $t = \varphi(T)/(F^2) \subset$ $\subset (MF^2)$ bezeichnet [9].

Alle Strahlen $t = \varphi(T)/\forall(F^2) \subset (MF^2)$ bilden ein Strahlbüschel (T_k) in jener Ebene, die dem Punkt T bezüglich der Kegelfläche M^2 polar zugeordnet ist, während die Punkte T und T_k bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiert sind.

a) Die den Punkten einer Geraden g zugeordneten Strahlen des Komplexes (TK)

Die den Punkten einer beliebigen Gerade g zugeordneten Strahlen $t = \varphi(T)/$ $(F^2) \subset (MF^2)$ $\forall T \in g$, sind bekanntlich die Erzeugenden eines Regulus eines einschaligen Hyperboloides H^2. Die Erzeugenden des anderen Regulus bilden die der Geraden g bezüglich der Polarräume einer jeden Fläche dieses Büschels (F^2) konjugierten Geraden. Eine dieser Geraden ist die erwähnte Gerade g_k. Da jedem Punkt $T \in g$ ein bestimmter bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugierter Punkt $T_k \in g^3$ entspricht, muss auch der, diesem Punkt $T \in g$ zugeordnete Strahl des Komplexes (TK) den Punkt T_k enthalten. Daraus folgt, dass die Kurve g^3 und die Gerade g_k auf dem Hyperboloid H^2 liegen müssen.

Betrachten wir ein anderes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$, dann bilden die durch dieses Büschel bestimmten und den Punkten der Geraden g zugeordneten Strahlen des Komplexes (TK) ein Erzeugendensystem eines neuen Hyperboloides, auf dem auch die Kurve g^3 und die Gerade g_k liegen. Dies hat zur Folge, dass alle derartigen Hyperboloide, die durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ auf beschriebene Weise bestimmt sind, ein solches Büschel $/H^2/$ bilden, in dem die Grundkurve 4. Ordnung in die Kurve g^3 3. Ordnung und in die Gerade g_k zerfällt. Jede Erzeugende jeder Fläche des Büschels $|H^2|$ Schneidet, als Bisckante der Grundkurve dicres Büschels, die Kurve g^3 und die Gerade g_k.

Jedes der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt danach je eine bijektive Zuordnung der Punkte der Kurve g^3 und der Punkte der Geraden g_k, aber auch eine bijektive Zuordnung unter den Punkten der Geraden g und g_k.

Ein Flächenbüschel 2. Grades, in dem die Grundkurve 4. Ordnung in eine Kurve 3. Ordnung und in eine Gerade zerfällt, enthält bekanntlich lauter Regelflächen. Die regulären Flächen sind die Hyperboloide, während in einem solchen Büschel nur zwei singulären Flächen liegen können. Die Spitzen dieser zwei Kegelflächen liegen auf der Geraden der reduziblen Grundkurve [7].

Die Spitzen $T_{k1} \in g_k$ und $T_{k2} \in g_k$ der Kegelflächen des Büschels $/H^2/$ werden auf folgende Weise bestimmt.

Da die Erzeugenden dieser Kegelflächen 2. Grades die Verbindungsgeraden des Punktes $T_{k1} \in g_k$ bzw. $T_{k2} \in g_k$ mit den Punkten der Kurve g^3 sind, muss die Kurve g^3 die Gerade g_k in genau diesen zwei Punkten schneiden. Diese Punkte sind als Punkte der Kurve g^3 bezüglich des Bündels $(F^2$ den zwei Punkten T_1 und T_2 der Geraden g konjugiertzugeordnet. Da die Punkte T_{k1} und T_{k2} auch auf der Geraden g_k liegen, müssen die ihnen bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugierten Punkte auf dem Kegelschnitt g_k^2 liegen. Daher folgt, dass die Gerade g die Kurve g_k^2 genau in den Punkten T_1 und T_2 schneidet .

Die Gerade $g_k \ni M$ ist ebenfalls ein den Punkten T_1 bzw. T_2 zugeordneter und durch zwei Büschel (F_1^2) bzw. (F_2^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmter Strahl des Komplexes (TK). In [11] B, d) wurde nämlich gezeigt, dass eine den Punkt $M \in k^6$ enthaltende Gerade ein solcher ∞^1-deutige Strahl des Komplexes (TK) ist, der durch alle $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt ist und den Punkten eines Kegelschnittes zugeordnet ist. Die Gerade g_k ist als Strahl des Komplexes (TK) auf beschriebene Weise den Punkten des bekannten Kegelschnittes g_k^2 zugeordnet. Die erwähnten Büschel (F_1^2) und (F_2^2) sind diejenigen, deren zugeordnete Ebenen des Ebenenbüschels $[m]$ die Schnittpunkte T_1 bzw. T_2 der Kurve g_k^2 und der Geraden g enthalten.

Die Erzeugenden der Kegelflächen des Büschels $/H^2/$ sind daher die Strahlen $t = \varphi(T)/(F_i^2) \subset (MF^2) \ \forall \ T \in g \ (i = 1, 2)$ und zugleich die Verbindungsgeraden des Punktes T_{k1} bzw. T_{k2} mit den Punkten der Kurve g^3. Die Gerade g_k ist die gemeinsame Erzeugende dieser beiden Kegelflächen.

Dies bedeutet keinen Wiederspruch zu den schon erwähnten Tatsachen über die Erzeugendensysteme der Hyperboloide $H^2 \subset /H^2/$, wo die Gerade g_k als Mitglied jener Reguli bezeichnet wurde, die keine Strahlen des Komplexes (TK) bilden. Bei einer Kegelfläche fallen bekanntlich beide Erzeugendensysteme zusammen.

Eine beliebige Ebene des Büschels $[g_k]$ schneidet die Kurve g^3 3. Ordnung in zwei Punkten $T_{ki} \in g_k$ $(i = 1, 2)$ und in noch einem Punkt T_k, der Schneitel des Büschels der Strahlen $t = \varphi(T)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ $T \in g$ ist. Die Ebene (T_k, g_k) ist dabei die dem Punkt $T \in g$ bezüglich der Kegelfläche $M^2 \subset /F^2$ zugeordnete Polarebene. Da jeder dieser Strahlen t die Erzeugende je eines Hyperboloides des Büschels $/H^2/$ ist, folgt, dass eine beliebige Ebene des Büschels $[g_k]$ nicht nur die üblichen drei, sondern *alle* Flächen $H^2 \subset /H^2/$ berührt. Die Berührpunkte liegen dabei längs der Geraden g_k.

Betrachten wir anstatt der erwähnten Strahlen t die Strahlen $t_i = \varphi(T_i)/ \forall (F^2) \subset (MF^2)$, $T_i \in g \wedge T_i \in g_k^2$ $(i = 1, 2)$, so fallen die Scheitelpunkte dieser Büschel in die Punkte $T_{ki} \in g_k$ $(i = 1, 2)$. Dies bedeutet, dass in der Ebene (T_{ki}, g_k) $(i = 1, 2)$ des Büschels $[g_k]$ noch der dritte Schnittpunkt mit der Kurve g^3 im Punkt T_{ik} $(i = 1, 2)$ fallen muss. Die Ebene (T_{ki}, g_k) $(i = 1, 2)$ enthält daher die Tangente d_i der Kurve g^3 im Punkt T_{ki}. Berücksichtigen wir, dass die Punkte T_{k1} und T_{k2} die Schnittpunkte der Kurve g^3 und der Geraden g_k der reduziblen Grundkurve des Büschels $/H^2/$ sind, hat dies zur Folge, dass die Ebene (d_1, g_k) bzw. (d_2, g_k) alle Flächen des Büschels $/H^2/$ im Punkt T_{k1} bzw. T_{k2} berühren muss.

Daraus folgt:

SATZ A 1. *Ist g eine beliebige Gerade, g_k eine der Geraden g bezügich der Fläche $M^2 \subset /F^2$ konjugiert zugeordnete Gerade, g^3 eine Raumkurve 3. Ordnung welche die bezüglich des Bündels $(F^2$ den Punkten der Geraden g konjugiert zugeordneten Punkte bilden und g_k^2 ein Kegelschnitt, der aus denjenigen Punkten besteht, die bezüglich des Bündels $(F^2$ den Punkten der Geraden g_k konjugiertzugeordnet sind, dann schneidet die Gerade g den Kegelschnitt g_k^2 in zwei Punkten T_1 und T_2, während die Gerade g_k die Kurve g^3 in jenen zwei Punkten T_{k1} und T_{k2} schneidet, welche bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiert zu den Punkten T_1 und T_2 sind.*

SATZ A 2. *Die Gerade g_k ist als ein Strahl des Komplexes (TK) den zwei in Satz A* 1. *definierten Punkten $T_i \in g$ zugeordnet und durch zwei bestimmte Büschel $(F_i^2) \subset (MF^2)$ festgesetzt $(i = 1, 2)$.*

SATZ A 3. *Die den Punkten einer beliebigen Geraden g zugeordneten und durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen des Komplexes (TK), sind die Erzeugenden je eines Regulus der Hyperboloide H^2 eines Büschels $/H^2/$. Die Grundkurve* 4. *Ordnung dieses Büschels zerfällt in die Kurve g^3 und in die Gerade g_k* (Satz A 1). *Auf der Geraden g_k liegen die zwei Spitzen T_{k1} und T_{k2} der zwei singulären Kegelflächen des Büschels $/H^2/$.*

SATZ A 4. *Die einem beliebigen Punkt $T \in g$ zugeordneten und durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen des Komplexes (TK) bilden ein Strahlbüschel (T_k) $T_k \in g^3$ in der Ebene (T_k, g_k), wobei die Punkte T und T_k bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiert zugeordnet sind. Jeder Strahl dieses Büschels ist die Erzeugende je einer Fläche $H^2 \subset /H^2/$.*

SATZ A 5. *Eine beliebige Ebene des Büschels $[g_k]$ berührt alle Flächen des Büschels $/H^2/$ u. zw. so, dass die Berührpunkte längs der Geraden g_k liegen. Eine Ausnahme bilden jene zwei Ebenen dieses Büschels, welche die Tangenten d_1 bzw. d_2 der Kurve g^3 in ihren Punkten $T_{k1} \in g_k$ bzw. $T_{k2} \in g_k$ enthalten, da diese Ebenen alle Flächen des Büschels $/H^2/$ in genau diesen Punkten berühren.*

Auf Grund des Gesagten kann man weiterhin behaupten:

SATZ A 6. *Die Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes $G_k \in g_k$ mit den Punkten der Raumkurve g^3 sind die Erzeugenden einer Kegelfläche (G_k, g^3) 3. Grades. Eine beliebige dieser Erzeugenden ist als ein Strahl des Komplexes (TK) durch je ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt und je einem Punkt $T \in g$ zugeordnet, je nach dem,* *auf welchem Hyperboloide $H^2 \subset /H^2/$ dieser Strahl als Erzeugende liegt bzw. welchen Punkt $T_k \in g^3$ er enthält. Die Gerade g_k ist zweifache Erzeugende dieser Kegelfläche (G_k, g^3), da sie die Verbindungsgerade des Punktes G_k mit dem Punkt T_{k1} bzw. T_{k2} ist. Liegt die Spitze G_k einer solchen Kegelfläche im Punkt $T_{ki} \in g_k$ $(i = 1, 2)$, zerfällt sie in eine Kegelfläche (T_{ki}, g^3) 2. Grades, die auch eine singuläre Fläche des Büschels $/H^2/$ ist und in das Strahlbüschel (T_{ki}) in der Ebene (d_i, g_k)* $(i = 1, 2)$ (Satz A 5). *Die beiden gemeinsamen Erzeugenden des Kegels (T_{ki}, g^3) und des Büschels (T_{ki}) fallen mit der Geraden g_k bzw. der Tangente d_i der Kurve g^3 in ihrem Punkt T_{ki} $(i = 1, 2)$ zusammen. Beide dieser Erzeugenden sind als Strahlen des Komplexe (TK) durch die Büschel $(F_i^2) \subset (MF^2)$ bestimmt.*

b) Die den Punkten der Geraden g_k zugeordneten Strahlen des Komplexes (TK)

Die Gerade g_k enthält bekanntlich auch den gemeinsamen Eckpunkt M aller Poltetraeder der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$. Die dem Punkt M zugeordneten und durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen des Komplexes (TK) wurden in [11] ausführlich betrachtet. Es sei nur erwährt, dass die Strahlen $t = \varphi(M)/(F^2) \subset (MF^2)$ alle Geraden jener Ebene des Büschels $[m]$ darstellen, welche bezüglich dieses Büschels (F^2) die dem Punkt M gegenüberliegende Poltetraederseitenebene ist. Die durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ derart bestimmten Strahlen bilden den singulären linearen Komplex mit der Leitgeraden m.

Bei weiteren Untersuchungen jener Strahlen des Komplexes (TK), welche den Punkten der Geraden g_k zugeordnet sind, wird von der Singularität des Punktes $M \in g_k$ abgesehen.

Ein dem beliebigen Punkt $G_k \in g_k$ zugeordneter Strahl $t_k = \varphi(G_k)/(F^2) \subset \subset (MF^2)$ enthält jenen Punkt $G \in g_k^2$, der bezüglich des Bündels $(F^2$ den Punkt G_k konjugiertzugeordnet ist. Dieser Strahl t_k schneidet noch einmal den Kegelschnitt g_k^2 in genau jenem Punkt, den auch die diesem Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bijektiv zugeordnete Ebene des Büschels $[m]$ enthält. Da für diese zwei Schnittpunkte des Strahles t_k mit dem Kegelschnitt g_k^2 auch eine Umkehr gilt, folgt, dass eine beliebige in der Ebene des Kegelschnittes g_k^2 liegende Gerade ein solcher zweifacher Strahl des Komplexes (TK) ist, der zu zwei Punkten der Geraden g_k zugeordnet ist und durch zwei bestimmte Büschel der Gesamtheit (MF^2) fest gelegt ist.

SATZ A 7. *Alle den Punkten der Geraden $g_k \ni M$ zugeordneten und durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen des Komplexes (TK), wobei von der Singularität des Punktes $M \in g_k$ abgesehen wird, liegen in der Ebene (M, g), welche mit der Ebene des Kegelschnittes g_k^2 übereinstimmt.*

Jede Gerade der Ebene (M, g) ist ein zweifacher Strahl des Komplexes (TK), der den zwei Punkten der Geraden g_k zugeordnet ist und der durch zwei verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt ist. Der eine der Schnittpunkte des Strahles (TK) mit der Kurve g_k^2 zeigt, welchem Punkt der Geraden g_k dieser Strahl zugeordnet ist und der andere Schnittpunkt zeigt, durch welches Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ er bestimmt ist u. zw. durch die Zuordnung der Punkte der Reihen (g_k) und (g_k^2) bezüglich des Bündels $(F^2$ bzw. durch den Schnittpunkt der Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ mit der Kurve g_k^2.

SATZ A 8. *Alle ein Büschel* (G) $G \in g_k^2$ *bildenden Strahlen des Komplexes* (TK) *in der Ebene* (M, g) *sind entweder als die einem Punkt* $G_k \in g_k$ *bezüglich aller Büschel* $(F^2) \subset (MF^2)$ *zugeordneten oder als die allen Punkten der Geraden* g_k *zugeordneten und durch ein Büschle* $(F^2) \subset (MF^2)$ *bestimmten Strahlen aufzufassen.*

Die eben erwähnten Tatsachen über Strahlen des Komplexes (TK) bilden auch eine Grundlage für Untersuchungen der Gebilde jener auf bestimmte Weise den Punkten der Geraden g und g_k zugeordneten und durch die Büschel $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen des *Majcen*schen Komplexes und des orientierten *Niče*schen Komplexes.

B. DER MAJCENSCHE KOMPLEX ODER DER KOMPLEX (MK)

Der durch ein Büschel (F^2) bestimmte Majcensche Komplex ist die Gesamtheit jener Geraden, die je eine Fläche dieses Büschels im Unendlichen berühren. Der zweite Berührpunkt jedes dieser Strahlen mit noch einer Fläche des Büschels (F^2) ist ein eigentlicher Punkt, der als sein Mittelpunkt bezeichnet wird [1], [2], [8], [11]. Ein dem beliebigen Punkt T zugeordneter und durch ein Büschel bestimmter Strahl des tetraedralen Komplexes und jener Strahl des *Majcen*schen Komplexes, der im Punkt T seinen Mittelpunkt hat, sind zu einander parallel. Die demselben Punkt T zugeordneten Strahlen der Komplexe (TK) und (MK) werden einander zugeordnet.

Ein beliebiger Punkt ist bekanntlich Mittelpunkt je eines durch ein Büschel (F^2) bestimmten Strahles des Komplexes (MK). Da der Komplex (MK) vom 3. Grad ist, bilden alle Komplexstrahlen, die einen beliebigen Raumpunkt enthalten eine Kegelfläche 3. Grades und die Mittelpunkte dieser Strahlen bilden eine Raumkurve 4. Ordnung.

Durch jedes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ist ebenfalls ein Komplex (MK) bestimmt. Uns werden jene Strahlen dieses Komplexes interessieren, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Geraden g bzw. auf einer ihr zugeordneten Geraden g_k liegen.

a) **Die Strahlen des Komplexes (MK), deren Mittelpunkte auf der Geraden g liegen**

Eine beliebige Gerade g sei die Gesamtheit der Mittelpunkte der durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen des Komplexes (MK). Jene dieser Strahlen, die durch ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind, liegen zu den Strahlen $t = \varphi(T)/(F^2) \subset (MF^2)$ $\forall T \in g$, welche einem Hyperboloid $H^2 \subset /H^2/$ angehören, parallel. Die Fernpunkte dieser Strahlen der Komplexe (TK) und (MK) stimmen damit überein. Da die Punkte der Geraden g und die Punkte der Fernkurve des Hyperboloides H^2 untereinander bijektiv sind und auf Grund des bekannten *Chasles*schen Korrespondenzprinzips folgt, dass jene durch ein Büschel (F^2) bestimmten Strahlen des Komplexes (MK), deren Mittelpunkte längs der Geraden g liegen, die Erzeugenden einer Regelfläche (g, MK) 3. Grades mit der einfachen Leitgeraden g sind $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3)$. Berücksichtigen wir alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$, ist auf dieselbe Weise eine Menge von ∞^1 Flächen (g, MK) 3. Grades erhalten.

Die Fernebene schneidet jede dieser Flächen (g, MK) in einer Kurve 3. Ordnung, die in die Fernkurve h^2 des entsprechenden Hyperboloides H^2 und in eine Erzeugende der Fläche (g, MK) zerfällt. Dem Fernpunkt $T_n \in g$ ist nämlich bezüglich des Bündels $(F^2$, ein Punkt $T_k \in g^3$ zugeordnet. Die Strahlen $t_n \in \varphi(T_n)/\forall(F^2) \subset (MF^2)$ bilden ein Strahlbüschel (T_k) in der Ebene (T_k, g_k). Die Fernpunkte dieser Strahlen sind ausserden die Fernpunkte jener ihnen zugeordneten Fernstrahlen des Komplexes (MK), deren gemeinsamer Mittelpunkt im Fernpunkt $T_n \in g$ liegt.

Ausser der gemeinsamen Leitgeraden g haben alle dieser ∞^1 Flächen (g, MK) noch drei Erzeugenden gemeinsam. Die Fernebene schneidet nähmlich die Kurve g^3 in drei Punkten. Die diesen Punkten bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordneten Punkte der Geraden g sind die Mittelpunkte jener drei Strahlen (MK), welche die Fernpunkte auf der Kurve g^3 haben und als Strahlen des Komplexes (MK) durch alle Büschel $(F_2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind.

Da nur die vier erwähnten Geraden die gemeinsame reduzible Kurve aller Flächen (g, MK) darstellen, können diese Flächen kein Flächenbüschel bilden.

Alle Erzeugenden dieser Flächen (g, MK), welche als Strahlen des Komplexes (MK) durch alle Büschel $(M^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Mittelpunkte auf der beliebigen Geraden g liegen, bilden eine algebraische Kongruenz (K_g, MK).

Die Klasse der Kongruenz (K_g, MK) ist durch die Anzahl jener Strahlen dieser Kongruenz bestimmt, welche in einer beliebigen Ebene liegen.

Damit man die Klasse dieser Kongruenz bestimmen kann, werden alle jene Strahlen $t = \varphi(T)/\forall(F^2) \subset (MF^2)$ für festen $T \in g$ berücksichtigt, welche ein Strahlbüschel (T_k) $T_k \in g^3$ bilden. Alle Strahlen des Komplexes (MK) mit dem Mittelpunkt in diesem Punkt $T \in g$ bilden ein Büschel (T) in einer zur Ebene (T_k, g_k) parallelen Ebene.

Eine beliebige Ebene schneidet die Gerade g in einem Punkt T und das Büschel (T) von Strahlen (MK) in *einem* seiner Strahlen. Daraus folgt die Klasse dieser Kongruenz (K_g, MK) ist gleich *eins*.

Die Ordnung der Kongruenz (K_g, MK) ist durch die Anzahl jener Strahlen dieser Kongruenz bestimmt, welche einen beliebigen Punkt S enthalten. Da die Mittelpunkte aller Strahlen auf der Geraden g liegen, müssen sich auch die gesuchten Strahlen in der Ebene (S, g) befinden. Die Ferngerade g_u der Ebene (S, g) durchdringt jede der Ebenen des Büschels $[g_k]$ in genau einem Punkt. Dieser Punkt ist genauso wie auch die ganze Ebene des Büschels $[g_k]$ genau einem Punkt der Geraden g bezüglich des Kegels M^2 konjugiert zugeordnet. Auf diese Weise ist eine bijektive Zuordnung unter den Punkten der Geraden g_u, den Ebenen des Büschels $[g_k]$, den Büscheln $(F^2) \subset (MF^2)$ und den Punkten der Geraden g bestimmt. Jene, auf Grund dieser Zuordnung bestimmten Strahlen des Komplexes (MK), deren Mittelpunkte auf der Geraden g liegen, haben die Fernpunkte auf der Geraden g_u. Diese Strahlen des Komplexes (MK) könnte man auch als Verbindungsgeraden der bijektiv zugeordneten Punkte der Geraden g und g_u ansehen. Sie hüllen daher eine Kurve s^2 2. Klasse in der Ebene (S, g) ein und den beliebigen Punkt S enthalten zwei ihrer Tangenten. Die Ordnung der Kongruenz (K_g, MK) ist damit also gleich *zwei*.

Die Gerade g_u durchdringt jedes der Hyperboloide $H^2 \subset /H^2/$ in zwei Punkten. Dies hat zur Folge, dass je zwei Tangenten der Kurve s^2 durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind. Je zwei Strahlen des Komplexes (MK) schneiden sich in je einem Punkt der Ebene (S, g). Da der Punkt S ein beliebiger ist werden ihn in allgemeinen keine zwei durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmte Strahlen des Komplexes (MK) enthalten.

SATZ B 1. *Jene Strahlen des Komplexes (MK), deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Geraden g liegen und welche durch ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind, bilden die Erzeugenden einer Fläche 3. Grades, mit der einfachen Leitgeraden g. Die durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten obigen Flächen 3. Grades bilden kein Büschel, da sie ausser der gemeinsamen Leitgeraden g nur die Punkte der drei gemeinsamen Erzeugenden gemeinsam haben können. Diese Erzeugenden sind die Verbindungsgeraden der drei Fernpunkte der Kurve g^3 mit den ihnen bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiert zugeordneten Punkten der Geraden g.*

SATZ B 2. *Jene Strahlen des Komplexes (MK), die durch alle Büschel $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Geraden g liegen, sind die Erzeugenden der Flächen 3. Grades aus dem Satz B* 1. *und bilden eine Kongruenz (K_g, MK) 2. Ordnung und* 1. *Klasse.*

Die Gerade g ist als eine Menge von Mittelpunkten von Strahlen dieser Kongruenz (K_g, MK) ∞^2-deutig.

b) **Die Strahlen des Komplexes (MK) mit den Mittelpunkten auf der Geraden g_k**

Genauso wie bei den Untersuchungen des Komplexes (TK) wird von der Singularität des Punktes $M \in g_k$ abgesehen. Das bekannte Resultat aus [11] C a), dass jene Strahlen des Komplexes (MK), welche die Mittelpunkte im Punkt M haben und die durch alle $(F^2) \subset (MF)^2$ bestimmt sind, ein Bündel $\{M\}$ bilden, zählt zu den Endresultaten.

Betrachten wir jene Strahlen des Komplexes (MK), die längs der Geraden g_k die Mittelpunkte haben und die durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind, müssen wir auch die diesen Punkten zugeordneten und durch dieselben Büschel (F^2) bestimmten Strahlen des tetraderalen Komplexes berücksichtigen.

Wie in A *b*) dieser Arbeit erwähnt wurde, bilden die Strahlen $t_r = \varphi(G_k)/(F_r^2) \subset (MF)^2$ $\forall G_k \in g_k$ ein Strahlbüschel (G_r), wo $G_r \in g_k^2$ ist. Ein jeder dieser Strahlen ist jenem Punkt der Geraden g_k zugeordnet, der bezüglich des Bündels $(F^2$ dem zweiten Schnittpunkt mit der Kurve g_k^2 konjugiert zugeordnet ist. Die Fernpunkte dieser Strahlen des Komplexes (TK) sind auch die Fernpunkte jener Strahlen des Komplexes (MK), deren Mittelpunkte längs der Geraden g_k liegen. Wegen der bijektiven Zuordnung der Punkte der Geraden g_k und der eben erwähnten Fernpunkte längs der Ferngeraden u der Ebene (M, g) und auf Grund des bekannten *Chasles*schen Korrespondenzprinzips folgt, dass die Verbindungsgeraden der so zugeordneten Punktreihen (g_k) und (u) die Erzeugenden eines Regulus eines hyperbolischen Paraboloides sind. Die Geraden g_k und u gehören dem anderen Regulus an.

Jedes der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ definiert eine neue Zuordnung zwischen den Punkten der Geraden g_k und u und liegt damit eine Erzeugendenschar eines neuen hyperbolischen Paraboloides fest, wobei g_k und u dem anderen Regulus angehören.

Bilden diese hyperbolischen Paraboloide ein Flächenbüschel, dann muss die reduzible Grundkurve 4. Ordnung dieses Büschels noch eine Kurve 2. Ordnung enthalten, die wieder in zwei Geraden zerfallen kann.

Diese zwei auf allen hyperbolischen Paraboloide liegenden Geraden sind die Verbindungsgeraden der Fernpunkte U_v und U_s der Kurve g_k^2 mit den ihnen bezüglich des Bündels (F^2 konjugiert zugeordneten Punkten G_v und G_s der Geraden g_k.

Die Strahlen $t = \varphi(G_v)/\ \forall(F^2) \subset (MF^2)$ bilden nämlich ein Parallelenbüschel (U_v) der Strahlen des Komplexes (TK) und die Verbindungsgerade G_vU_v bzw. die auf dieselbe Weise bestimmte Verbindungsgerade G_sU_s ist ein durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmter ∞^1-deutiger Strahl des Komplexes (MK).

Alle diese hyperbolischen Paraboloide bilden dadurch ein solches Regelflächenbüschel 2. Grades, in dem genau zwei durch zwei Büchel $(F_{ui}^2) \subset (MF^2)$ $(i = 1,2)$ bestimmte, singuläre Flächen liegen. Diese beiden Quadrikenbüschel (F_{ui}^2) $(i = 1, 2)$ sind auf die in der Einleitung beschriebenen Weise zu jenen zwei Ebenen des Ebenenbüschels $[m]$ bijektiv zugeordnet, welche die Fernpunkte U_v und U_s des Kegelschnittes g_k^2 enthalten.

Die Strahlen $t = \varphi(G_k)/(F_{u1}^2) \subset (MF^2)\ \forall G_k \in g_k$ des Komplexes (TK) bilden ein Büschel (U_v) von parallelen Strahlen in der Ebene des Kegelschnittes g_k^2 welche mit der Ebene (M, g) übereinstimmt. Ein Strahl dieses Büschels ist die Ferngerade $u = U_vU_s$. Der zweite Schnittpunkt U_s dieses Strahles u mit der Kurve g_k^2 zeigt, dass er genau dem erwähnten Punkt $G_s \in g_k$ zugeordnet ist.

Da ein dem beliebigen Punkt T zugeordneter Strahl des Komplexes (TK) und jener Strahl des Komplexes (MK), der in diesem Punkt T seinen Mittelpunkt hat durch dasselbe Büschel (F^2) bestimmt und parallel sind werden jene Strahlen des Komplexes (MK), deren Mittelpunkte längs der Geraden g_k liegen und welche durch das Büschel (F_{u1}^2) bestimmt sind, die Verbindungsgeraden der Punkte $G_k \in g_k$ mit dem Fernpunkt U_v sein. Diese Strahlen bilden dadurch ein Parallelenbüschel (U_v) in der Ebene (U_v, g_k). Eine Ausnahme bildet der Punkt G_s, da der ihm zugeordnete Strahl u des Komplexes (TK) in der Fernebene liegt und ein jeder seiner Punkte als sein Fernpunkt zu betrachten ist. Dadurch ist noch ein Büschel (G_s) von durch das Büschel (F_{u1}^2) bestimmten Strahlen des Komplexes (MK) in der Ebene (G_k, u) erhalten.

Die erwähnte, durch das Büschel (F_{u1}^2) bestimmte Singulärfläche entartet deshalb in zwei Strahlbüschel (U_v) und (G_s) in den Ebenen (U_v, g_k) und (G_s, u), während jene auf gleiche Weise bestimmte Fläche, deren Erzeugenden durch das Büschel (F_{u2}^2) bestimmt sind in die Büschel (U_s) und (G_u) in den Ebenen (U_s, g_k) und (G_u, u) zerfällt.

Diese singulären Flächen sind keine zerfallenen Kegelflächen, da sie aus je zwei Büscheln mit verschiedenen Scheitelpunkten bestehen. Da auf ihnen die zerfallene Grundkurve (g_k, u, G_vU_v, G_sU_s) des erwähnten Büschels der Quadriken liegt, gehören sie diesem Büschel an.

Alle jene Erzeugenden der Quadriken dieses Flächenbüschels, welche Strahlen des Komplexes (MK) sind, bilden eine Kongruenz (K_{gk}, MK) 1. Ordnung und 1. Klasse, da sie die Transversalen der Geraden g_k und u darstellen.

SATZ B 3. *Alle jene Strahlen des Komplexes (MK), die durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Mittelpunkte längs der Geraden g_k liegen,* *wobei von der Singularität des Punktes $M \in g_k$ abgesehen wird, ist die Vereinigungsmenge von unendlichen vielen Reguli, wobei von jedem hyperbolischen Parabolloid eines Büschels genau ein Regulus stammt. Die Grundkurve 4. Ordnung dieses Büschels zerfällt in vier Erzeugenden, von denen zwei als Strahlen des Komplexes (MK) die Verbindungsgeraden der Fernpunkte der Kurve g_k^2 mit den jeweils bezüglich des Bündels (F^2 konjugiert zugeordneten Punkten der Geraden g_k sind, während die Gerade g_k und die Ferngerade u der Ebene (M, g) dem anderen Regulus angehoren. Die beiden singulären Quadriken dieses Büschels zerfallen in je zwei Strahlbüschel mit verschiedenen Scheitelpunkten, von denen einer uneigentlich ist.*

SATZ B 4. *Die Strahlen des Komplexes (MK) aus dem Satz B 3 bilden eine Kongruenz (K_{gk}, MK) 1. Ordnung 1. Klasse. Diese Strahlen sind die Verbindungsgeraden der Punkte der Geraden g_k mit den Punkten der Ferngeraden u der Ebene (M, g).*

Die Strahlen des *Niče*schen orientierten Komplex, welche den Punkten der Geraden g und g_k zugeordnet sind und die durch die Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind, werden in einer anderen Arbeit betrachtet.

LITERATUR:

[1] *J. Majcen,* O jednoj posebnoj vrsti kubičnog kompleksa, Rad JAZU **155** (1903), 159—172.
[2] *V. Niče,* Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex, Rad JAZU **325** (1962), 107—125.
[3] *V. Niče* Novi prilozi Reyovim tetraedarnim kompleksima, Bull. Soc. math. phys. Serbie, **14** (1962), 125—130.
[4] *V. Niče,* Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik mat.-fiz. i astr., **18** (1963), 255—268.
[5] *V. Niče,* Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU **331** (1965), 145—172.
[6] *V. Niče,* Neue Beiträge zu den Eigenschaften eines Polarraumbündels, Glasnik mat. **4 (24)** (1969), 259—274.
[7] *Th. Reye,* Geometrie der Lage, Leipzig 1910.
[8] *V. Ščurić-Čudovan,* Singuläriteten des *Majcen*schen Strahlenkomplexes, Glasnik mat. **3 (23)** (1968), 117—139.
[9] *V. Ščurić-Čudovan,* Der orientierte *Niče*sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, I Teil, Rad JAZU **368** (1974), 151—205.
[10] *V. Ščurić-Čudovan,* Der orientierte *Niče*sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, II Teil, Rad JAZU **370** (1975), 57—91.
[11] *V. Ščurić-Čudovan,* Einige Probleme die durch die Einteilung eines Bündels der Flächen 2. Grades in ∞^1 Büschel solcher Flächen entstanden sind, I Teil, Rad JAZU **403** (1983), 33—54.
[12] *V. Ščurić-Čudovan,* Einige Probleme die durch die Einteilung eines Bündels der Flächen 2. Grades in ∞^1 Büschel solcher Flächen entstanden sind, II Teil, Rad JAZU **421** (1986), 135—163.

Angenommen in II. Abteilung
16. 6. 1987.

Geodätische Fakultät
41000 Zagreb, Kačićeva 26
Jugoslawien

Nastavak istraživanja u skupu (MF^2) I. dio.
Kompleks (TK) i kompleks (MK)

Vlasta Ščurić-Čudovan

Sadržaj

Ovaj je rad nastavak mojih radova [11] i [12].

Sve kvadrike svežnja (F^2 razvrstane su u jednoparametarski skup (MF^2) pramenova (F^2), a zajednička ploha svih tih pramenova je stožac M^2 svežnja (F^2 s vrhom u točki $M \in k^6$.

Svakim od ∞^1 pramenova skupa (MF^2) određena su četiri kompleksa.

U poglavlju A obrađene su tvorevine što ih čine zrake kompleksa (TK) pridružene točkama po volji odabranog pravca g odnosno njemu s obzirom na stožac M^2 konjugirano pridruženog pravca $g_k \in M$, a određene su svim pramenovima (F^2) $\subset$ (MF^2).

Pokazuje se da su one zrake kompleksa (TK), koje su pridružene točkama pravca g i određene pramenovima (F^2) $\subset$ (MF^2), izvodnice jednog sustava izvodnica hiperboloida H^2. Svi ti hiperboloidi čine pramen $/H^2/$, a temejna krivulja k^4 4. reda tog pramena raspada se u pravac g_k i krivulju g^3 3. reda, koju čine točkama pravca g s obzirom na svežanj (F^2 konjugirano pridružene točke. Pramen $/H^2/$ sadrži samo dvije singularne plohe, kojima se vrhovi nalaze u sjecištima T_{ki} ($i = 1, 2$) pravca g_k i krivulje g^3. Ti su stošci određeni s ona dva pramena (F_i^2) $\subset$ (MF^2) ($i = 1, 2$), koji određuju pravac g_k kao zraku kompleksa (TK) pridruženu sjecištima T_i ($i = 1, 2$) pravca g i one krivulje g_k^2 2. reda, koju čine točkama pravca g_k, s obzirom na svežanj (F^2 konjugirano pridružene točke.

Poznato je da bilo koja ravnina dira tri kvadrike nekog pramena kvadrika.

Po volji odabrana ravnina pramena [g_k] dira sve plohe pramena $/H^2/$, a niz dirališta nalazi se na pravcu g_k. Iznimku čine one dvije ravnine tog pramena, koje sadrže tangentu d_1 odn. d_2 krivulje g^3 u točkama T_{k1} odn. T_{k2}, jer one diraju sve kvadrike pramena $/H^2/$ upravo u tim točkama.

Zrake kompleksa (TK) određene svim pramenovima (F^2) $\subset$ (MF^2) i pridružene točkama pravca g_k, pri čemu je točka $M \in g_k$ smatrana njegovom regularnom točkom, leže u ravnini (M, g), koja se podudara s ravninom konike g_k^2. Bilo koji pravac ravnine (M, g) dvostruka je zraka kompleksa (TK) pridružena dvjema točkama pravca g_k i određena s dva pramena (F^2) $\subset$ (MF^2). Jedno od sjecišta svake zrake s krivuljom g_k^2 pokazuje kojoj je točki pravca g_k ta zraka pridružena, a drugo sjecište pokazuje, kojim je pramenom (F^2) ona određena i to na temelju pridruženosti točaka nizova (g_k) i (g_k^2) s obzirom na svežanj (F^2 odnosno na temelju sjecišta ravnine pramen [m] s krivuljom g_k^2.

Sve zrake kompleksa (TK) koje čine neki pramen (G) $G \in g_k^2$ u ravnini (M, g), možemo shvatiti da su pridružene ili jednoj točki $G_k \in g_k$ i određene svim pramenovima (F^2) $\subset$ (MF^2) ili su one određene jednim pramenom (F^2) $\subset$ (MF^2) i pridružene svim točkama $G_k \in g_k$.

U poglavlju B obrađene su tvorevine što ih čine zrake kompleksa (MK), ako se njihove središnje točke nalaze na pravcu g odnosno na pravcu g_k, a određene su svim pramenovima (F^2) $\subset$ (MF^2).

Pokazuje se, da one zrake kompleksa (MK), kojima se središnje točke nalaze na po volji odabranom pravcu g, a određene su jednim pramenom $(F^2) \subset (MF^2)$, čine izvodnice pravčaste plohe 3. stupnja, kojoj je pravac g jednostruka ravnalica. Svim pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$ određene takve plohe ne čine pramen, jer sve one sadrže osim pravca g još samo tri zajednička pravca. Sve spomenute zrake kompleksa (MK) određuju kongruenciju (K_g, MK) 2. reda i 1. razreda.

Zrake kompleksa (MK), kojima se središnje točke nalaze na pravcu g_k, pri čemu je točka $M \in g_k$ smatrana njegovom regularnom točkom, a određene su jednim pramenom $(F^2) \subset (MF^2)$, određuju jedan sustav izvodnica hiperboličkog paraboloida. Svim pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$ određeni hiperbolički paraboloidi čine takav pramen, kojemu se temeljna krivulja 4. reda raspada u četiri pravca. Dvije singularne plohe tog pramena raspadaju se u po dva pramena zraka s različitim vrhovima, od kojih se jedan nalazi u beskonačno dalekoj ravnini.

Sve zrake kompleksa (MK) koje čine po jedan sustav izvodnica pramena hiperboličkih paraboloida, određuju kongruenciju (K_{gk}, MK) 1. reda i 1. razreda, budući da su one spojnice točaka pravca g_k s točkama beskonačno dalekog pravca u ravnine (M, g).

Primljeno u II. razredu
16. 6. 1987.