

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

EINIGE PROBLEME DIE DURCH DIE EINTEILUNG EINES BÜNDELS
DER FLÄCHEN 2. GRADES IN ∞^1 BÜSCHEL SOLCHER FLÄCHEN
ENTSTANDEN SIND, I TEIL

VLASTA ŠČURIC-ČUDOVAN
Zagreb

Posebna otisak iz:
Rad Jugoslavenske akademije znanosti
i umjetnosti, Knjiga 403; Matematičke
znanosti, Svezak 2

ZAGREB 1983

EINIGE PROBLEME DIE DURCH DIE EINTEILUNG EINES BÜNDELS DER FLÄCHEN 2. GRADES IN ∞^1 BÜSCHEL SOLCHER FLÄCHEN ENTSTANDEN SIND, I TEIL

Vlasta Šćuric-Čudovan, Zagreb

Abstract. In the paper a number of problems, which result from the partition of a bundle of quadrics into a one-parametric family of pencils of quadrics, are formulated and solved.

A. GRUNDEIGENSCHAFTEN EINES FLÄCHENBÜNDELS

In einem projektiven Raum P^3 , der auf dem Modell des durch die Fernebene ergänzten euklidischen Raumes E^3 gebaut wird, sei ein allgemeines Flächenbündel $|F^2|$ der Flächen 2. Grades gegeben. Noch *Th. Reye* hat seine Grundeigenschaften in [9] dargestellt. Erinnern wir uns an einige von ihnen.

Ein Flächenbündel $|F^2|$ 2. Grades ist durch drei nicht in einem Flächenbüschel $|F^2|$ liegende Flächen 2. Grades bestimmt. Durch eine jede dieser ∞^2 Flächen des $|F^2|$ Bündels ist auch ihr Polarraum bestimmt, so dass einem $|F^2|$ Bündel auch ein Polarraumbündel (F^2 zugeordnet ist. Die ∞^2 Flächen des $|F^2|$ Bündels bilden auch ∞^2 Flächenbüschel und eine jede Fläche F^2 des $|F^2|$ Bündels befindet sich in ∞^1 Flächenbüschel $|F^2|$. Die Grundkurven 4. Ordnung dieser Flächenbüschel decken die Fläche F^2 und haben acht gemeinsame (assoziierte) Punkte, die auch gemeinsame Punkte aller Flächen dieses Bündels sind und bilden seine Grundpunkte.

Die Polarebenen eines beliebigen Punktes T bilden in Bezug auf die Polarräume einer jeden der Flächen des (F^2 Bündels ein Ebenenbündel. Der Scheitelpunkt T_k dieses Bündels ist der dem Punkt T , bezüglich des (F^2 Bündels, konjugiert zugeordnete Punkt. Die den Punkten einer beliebigen Geraden s , bezüglich des (F^2 Bündels konjugiert zugeordneten Punkte, bilden eine kubische Raumkurve s^3 .

Zwei beliebige Punkte R und S liegen auf genau einer Fläche des $|F^2|$ Bündels.

Die Scheitel-Mittelpunkt der Kegeläflachen des $|F^2|$ Bündels bilden eine Kernkurve k^6 6. Ordnung dieses Bündels. Die Kurve k^6 hat keine Doppelpunkte. Einem beliebigen Punkt $M \in k^6$ sind, bezüglich der ∞^2 Flächen des (F^2 Bündels, die Punkte einer Geraden m konjugiert zugeordnet. Diese Gerade m ist eine Trisekante der Kurve k^6 . Den Schnittpunkten M_n ($n = 1, 2, 3$) der Geraden m mit der Kurve k^6 sind auf diese Weise die Punkte der Trisekanten m_n ($n = 1, 2, 3$) der Kurve k^6 konjugiert zugeordnet. Diese Trisekanten enthalten den Punkt M .

Durch ein der $\infty^2 (F^2)$ Polarraumbüschel des (F^2 Bündels sind auch vier Komplexe bestimmt u. zw. der Reyesche tetraedrale Komplex oder der (TK) Komplex 2. Grades, der Majcensche Komplex oder der (MK) Komplex 3. Grades, der orientierte Ničesche Komplex oder der (VN) Komplex 8. Grades und der Normalenkomplex 8. Grades.

V. Niče untersuchte in seinen Arbeiten [2] [3], [6] und [8] einige Eigenschaften des (F^2 Bündels wie auch die Eigenschaften der durch ihn bestimmten Komplexe. Solche Untersuchungen können auf verschiedenen Grundlagen basieren. In den Arbeiten [6] und [8] sind z. B. einige Eigenschaften der einzelnen Komplexe des allgemeinen Bündels untersucht, wo aber das Bündel als das Ganze betrachtet wird, während in [4] ein spezielles Bündel untersucht ist, dem alle Büschel den gemeinsamen Polartetraeder haben.

Uns wird ein allgemeines Flächenbündel (F^2 interessieren, das aber in Gesamtheiten von ∞^1 Flächenbüschel $|F^2|$ geteilt wird. Ein beliebiger Punkt M der Kernkurve k^6 sei der Scheitel - und Mittelpunkt einer Singulärfläche d. h. einer Kegelfläche M^2 dieses Bündels. Eine beliebige Fläche des Bündels ordnet mit der Fläche M^2 ein Flächenbüschel $|F^2|$ und alle Flächen des $|F^2$ Bündels ordnen mit der Fläche M^2 eine Gesamtheit $|MF^2|$, die eine solche Reihe der ∞^1 Flächenbüschel $|F^2|$ bilden, deren einzige gemeinsame Fläche die Kegelfläche M^2 wird.

Ändert der Punkt M seine Stellung längs der Kurve k^6 , wird ein jedes Mal eine andere Gesamtheit $|MF^2|$ bestimmt. Da die Eigenschaften einer jeden solcher Gesamtheiten analoge sind, werden unsere Untersuchungen auf nur einer Gesamtheit $|MF^2|$ basieren.

Der Punkt $M \in k^6$ ist als der Scheitel - und Mittelpunkt der gemeinsamen Kegelfläche M^2 aller Büschel $|F|$ im $|MF^2|$, auch der gemeinsame Eckpunkt aller Polartetraeder der einzelnen Polarraumbüschel (F^2), so dass sich drei übrige Eckpunkte jedes einzelnen Tetraeders in derselben Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ befinden. Dies ist möglich, da die Gerade m die, dem Punkt M konjugiert-zugeordneten Punkt bezüglich der Polarräume jede der Flächen des (F^2 Bündels bilden. Eine beliebige Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ schneidet die Kernkurve k^6 ausser in drei Punkten M_n ($n = 1, 2, 3$) der Geraden m in noch drei Punkten, die die Eckpunkte des Polartetraeders eines bestimmten (F^2 Büschels im (MF^2) sind. Eine Ebene des Büschels $[m]$ ist die Ebene (M, m) , die einem singulären Flächenbüschel $|F_M^2|$ angehört. Alle Flächen dieses Büschels berühren die Ebene (M) im Punkt M und der erwähnte Polartetraeder wird in die zweifache Ebene (M, m) ausarten, während im Punkt M die zwei Eckpunkte dieses »Tetraeders« zusammenfallen. [9].

Eine jede Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ ist als die, dem Scheitelpunkt M gegenüberliegende Seitenebene des Polartetraeders, einem streng bestimmten Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) zugeordnet. Unter die Ebenen des Ebenenbüschels $[m]$ und die Büschel (F^2) im (MF^2) besteht deswegen eine bijektive Zuordnung. Da weiterhin eine beliebige Gerade s die Ebenen des Büschels $[m]$ in einer Punktreihe (s) durchstosst, besteht auch unter die Punkte dieser Reihe (s) und die Büschel (F^2) im (MF^2) eine bijektive Zuordnung, Aus diesem Grunde werden wir öfters die Gesamtheit der (F^2) Büschel im (MF^2) auch als eine Reihe der (F^2) Büschel im (MF^2) betrachten.

Die den Punkten der Geraden m , bezüglich der Kegelfläche M^2 zugeordneten Polarebenen, bilden ein Ebenenbüschel, dessen Achse eine Gerade m_k ist. Die Geraden m und m_k sind bezüglich der Kegelfläche M^2 konjugiert-zugeordneten

Geraden. Die Gerade m_k enthält den Punkt $M \in k^6$ und ist eine Unisekante dieser Kernkurve k^6

Auch hier sind durch die einzelnen Büschel (F^2) im (MF^2) vier erwähnte Komplexe bestimmt. Im I Teil dieser Arbeit werden die Strahlen des (TK) Komplexes und des (MK) Komplexes betrachtet und im II Teil werden die Strahlen des (VN) Komplexes untersucht. Wegen des Wunsches dass die Arbeit nicht zu breit wird, werden unsere Untersuchungen nur auf streng begrenzte Aufgaben gerichtet. Uns werden nur jene Strahlen der erwähnten Komplexe interessieren, die auf gewisse Weise dem Punkt M und den Punkten der Gerade m und m_k zugeordnet sind. Dabei wird immer von grössten Interesse sein, welchem Punkt ein einzelner Strahl zugeordnet ist und durch welches der ∞^1 Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) er bestimmt wird.

B. DER (TK) KOMPLEX

Durch ein beliebiges Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) ist ein bekannter Reyesche tetraedrale Komplex oder (TK) Komplex 2. Grades bestimmt. Ein dem beliebigen Punkt T zugeordneter Strahl t dieses Komplexes ist die Schnittgerade der, dem Punkt T bezüglich der Polarräume der Flächen des Büschels (F^2) zugeordneten Polarebenen. Eine solche Punkt-Strahl Zuordnung wird öfters durch

$$t = \varphi(T), (F^2)$$

bezeichnet. Dabei werden wir aber nicht streng folgerichtig sein.

Auf diese Weise wird im Fall der Gesamtheit (MF^2) durch ein jedes (F^2) Büschel je ein Strahl des (TK) Komplexes bestimmt. Alle Strahlen

$$t = \varphi(T), |\forall (F^2) \subset (MF^2)|$$

liegen in einer Ebene, die die Polarebene des beliebigen Punktes T bezüglich der Kegelfläche M^2 ist und enthalten den Punkt T_k , der dem Punkt T , bezüglich des (F^2) Bündels konjugiertzugeordnete Punkt ist. Diese (TK) Strahlen bilden also ein Strahlbüschel (T_k). Auf solche allgemeinen Fälle werden wir aber verzichten.

a) Die dem Punkt M zugeordneten (TK) Komplexstrahlen

Es ist bekannt, dass die, einem beliebigen Eckpunkt A des Polartetraeders eines Büschels (F^2), zugeordneten Strahlen des (TK) Komplexes, allen Geraden jener Seitenebene dieses Tetraeders sind, die gegenüber des Punktes A liegt. Da der Punkt M der gemeinsame Eckpunkt von ∞^1 Polartetraeder der (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) ist und die dem Punkt M gegenüberliegenden Seitenebenen dieser Tetraeder das Ebenenbüschel $[m]$ bilden, folgt:

SATZ B1. *Jene (TK) Komplexstrahlen die durch die Büschelreihe (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmt werden und dem Punkt M zugeordnet sind, bilden einen singulären linearen Komplex mit der Leitgeraden m . Die durch ein (F^2) Büschel bestimmten Strahlen liegen in jener Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ die die Seitenebene des Polartetraeders dieses (F^2) Büschels ist und bilden eine Kongruenz (0., 1.).*

b) Die dem Punkten der Geraden m zugeordneten (TK) Komplexstrahlen

Ein beliebiger Punkt der Geraden m ist, wie bekannt, ein dem Punkt M bezüglich des (F^2) Bündels konjugierter Punkt. Es gilt deswegen

$$m = \varphi(M), |\forall (F^2) \subset (MF^2)|.$$

Dies hat zur Folge, dass der, einem beliebigen Punkt $T \in m$ zugeordnete Strahl $t = \varphi(T)$, den irgendein (F^2) Bündel aus (MF^2) ordnet, den Punkt M enthalten muss.

Die den Punkten der Geraden m zugeordneten (TK) Strahlen werden auf zwei Arten betrachtet werden.

Im ersten Fall werden wir jene, einem Punkt $T \in m$ zugeordneten und durch alle (F^2) im (MF^2) bestimmten (TK) Komplexstrahlen betrachten und im zweiten, werden jene (TK) Strahlen betrachtet, die je ein bestimmtes (F^2) Bündel der Gesamtheit (MF^2) ordnet und die der Punktreihe (m) zugeordnet sind. Auf diese Weise wird es ausführbar für einen jeden den Punkt M enthaltenden (TK) Strahl festzustellen, welchem Punkt der Geraden m er zugeordnet ist und durch welches der (F^2) Bündel im (MF^2) er bestimmt wird.

1. Einem beliebigen Punkt $T \in m$ wird die, bezüglich der Kegelfläche M^2 , zugeordnete Polarebene eine Ebene des Bündels $[m_k]$ sein, die auch als ein Träger eines Bündels (M) der (TK) Strahlen

$$t = \varphi(T), |\forall (F^2) \subset (MF^2)|$$

dienen wird.

Verändert der Punkt $T \in m$ längs der Geraden m seine Stellung, ändert sich auch die zugeordnete Polarebene des Ebenenbündels $[m]$ und die zugeordneten (TK) Strahlen bilden immer in ihr ein Bündel (M). Nehmen wir alle Punkte der Geraden m in Betracht, haben wir ein Strahlbündel $\{M\}$ erhalten, wobei immer bekannt wird, welchem Punkt $T \in m$ der betreffende Strahl zugeordnet ist.

Eine Ausnahme bilden doch die drei Punkte $M_n \in m \wedge M_n \in k^6$ ($n = 1, 2, 3$). Die zugeordneten Strahlen

$$m_n = \varphi(M_n), |\forall (F^2) \subset (MF^2)| \quad (n = 1, 2, 3)$$

bilden kein Strahlbündel da sie allen in dem Strahl m_n ($n = 1, 2, 3$) zusammenfallen. Dabei dürfen wir aber nicht vergessen, dass die Punkte der Kurve k^6 die Singulärpunkte in Bezug auf den (TK) Komplex sind und dass jedem der Punkte M_n ($n = 1, 2, 3$) ausser des Strahles m_n ($n = 1, 2, 3$) auch der ganze singuläre lineare Komplex der (TK) Strahlen mit der Leitgeraden m_n ($n = 1, 2, 3$) zugeordnet ist, so wie es für die, dem Punkt M zugeordneten (TK) Strahlen Geltung hat (Satz B1).

Dabei ist doch das Folgende evident: Fassen wir den Punkt M_n ($n = 1, 2, 3$) in erster Reihe als einen Punkt der Geraden m auf, dann sind die ihm durch alle (F^2) Bündel im (MF^2) zugeordneten Strahlen im Strahl m_n ($n = 1, 2, 3$) zusammengefallen; nehmen wir aber den Punkt M_n ($n = 1, 2, 3$) als einen Punkt der Kernkurve k^6 an, dann betrachten wir diesen Punkt auch als den gemeinsamen

Eckpunkt der ∞^1 Polartetraeder einer Gesamtheit $(M_n F^2)$ ($n = 1, 2, 3$) von je ∞^1 Büschel und die zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bilden den erwähnten singulären linearen Komplex. Da uns aber vorläufig keine Gesamtheit $(M_n F^2)$ ($n = 1, 2, 3$), sondern nur die Gesamtheit (MF^2) interessiert, wird nur

$$m_n = \varphi(M_n), \forall (F^2) \subset (MF^2) \quad (n = 1, 2, 3)$$

stattfinden.

2. Die der Punktreihe (m) zugeordneten (TK) Strahlen, die ein bestimmtes (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) ordnet, sind die Erzeugenden einer Kegelfläche 2. Grades die den Scheitelpunkt im Punkt M hat. Drei ihrer Erzeugenden sind die erwähnten Trisekanten m_n ($n = 1, 2, 3$) der Kernkurve k^6 . Auf der Kegelfläche liegt noch eine hervorgehobene Erzeugende u. zw. die Grade m_k . Dies folgt direkt aus Bb)1.

Tauschen wir das (F^2) Büschel im (MF^2) um, ändert sich auch die zugeordnete Kegelfläche, der die Erzeugenden (TK) Strahlen sind. Die vier erwähnte Erzeugenden bleiben aber immer dieselben. Daraus folgt, dass die den Punkten der Geraden m zugeordneten und durch die Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmten (TK) Strahlen die Erzeugenden eines Kegelflächenbüschels (M^2) sind. Der gemeinsame Scheitelpunkt dieser Kegelflächen liegt im Punkt M und die Büschelgrundkurve 4. Ordnung zerfällt in die Geraden m_n ($n = 1, 2, 3$) und m_k . Während der Strahl m_n ($n = 1, 2, 3$) demselben Punkt $M_n \in m$ zugeordnet und durch jeden der (F^2) Büschel im (MF^2) bestimmt ist, ist der Strahl m_k einem jeden der Punkte der Geraden m zugeordnet (ausschliesslich die Punkte M_n ($n = 1, 2, 3$)) und in jedem Fall durch ein anderes (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt.

SATZ B2. *Der Geraden m , bezüglich der Kegelfläche M^2 konjugiertzugeordnete Gerade m_k , ist ein ∞^1 -deutiges (TK) Komplexstrahl, der der Punktreihe (m) zugeordnet ist und durch die Reihe der (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt ist. Eine Ausnahme bilden dabei nur die Punkte $M_n \in m$ ($n = 1, 2, 3$).*

SATZ B3. *Jene (TK) Komplexstrahlen die durch die (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind und den Punkten der Geraden m zugeordnet sind bilden:*

a) *die Strahlen der Büschel (M) in den Ebenen des Ebenenbüschels $[m_k]$ u. zw. so, dass die einem Punkt der Geraden m zugeordneten und ein Strahlbüschel (M) bildenden (TK) Strahlen, durch alle (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind, bzw.*

b) *die ∞^1 Kegelflächen eines Flächenbüschels $|M^2|$ 2. Grades des gemeinsamen Scheitelpunktes M . Die Grundkurve 4. Ordnung dieses Büschels zerfällt in die Geraden m_1, m_2, m_3 und m_k so, dass die Erzeugenden derselben Kegelfläche durch ein (F^2) Büschel im (MF^2) bestimmt sind und den Punkten der Reihe (m) zugeordnet sind.*

SATZ B4. *Alle in Satz B3 erwähnten (TK) Strahlen bilden ein Strahlbüschel $\{M\}$. Jeder Strahl t dieses Bündels $\{M\}$ liegt also in einer Ebene des Ebenenbüschels $[m_k]$ und ist die Erzeugende einer Kegelfläche des $|M^2|$ Büschels. Angehörigkeit dem Büschel $[m_k]$ bestimmt, welchem Punkt der Geraden m dieser Strahl zugeordnet ist und Angehörigkeit der Kegelfläche, durch welches (F^2) Büschel im (MF^2) er bestimmt ist.*

Leicht ist auch zu behaupten, dass die, den Punkten der Geraden m , bezüglich des (F^2) Bündels konjugiertzugeordneten Punkte, solche Kurve 3. Ordnung

bilden, die in drei Geraden m_n ($n = 1, 2, 3$) zerfällt. Diese Geraden sind zwar den Punkten $M_n \in m$ ($n = 1, 2, 3$) konjugiertzugeordnet während allen übrigen Punkten der Geraden m der konjugiertzugeordnete Punkt der Punkt M ist, den auch die Geraden m_n ($n = 1, 2, 3$) enthalten.

c) Die den Punkten der Geraden m_k zugeordneten (TK) Komplexstrahlen

Es ist bekannt, dass jene (TK) Komplexstrahlen, die den Punkten jener Geraden a zugeordnet sind, die auch einen Eckpunkt z. B. A des Polartetraeders $ABCD$ eines (F^2) Büschels 2. Grades enthält, eine solche Fläche 2. Grades bilden, die in zwei Strahlbüschel zerfällt. Der Scheitelpunkt der beiden Büschel liegt in der Ebene (BCD) in jenem Punkt T , für dem

$$a = \varphi(T), (F^2)$$

Geltung hat. Dem Punkt $A \in a$ selbst, der primär als ein Punkt dieser Geraden a und erst sekundär als der Tetraedereckpunkt aufzufassen ist, ist der Strahlbüschel (T) in der Ebene (BDC) zugeordnet, während die allen übrigen Punkten $T_a \in a$ zugeordneten (TK) Strahlen den Büschel (T) in einer Ebene des Eckpunktes A bilden. Diese Ebene ist die gemeinsame Polarebene, die den Punkten $T_a \in a$, bezüglich jener Kegelfläche des (F^2) Büschels zugeordnet ist, welche den Scheitelpunkt im Punkt A hat. Es ist klar, dass der gemeinsame Strahl der erwähnten zwei Büschel (T) dem Punkt A zugeordnet ist.

Da auch die Gerade m_k den Punkt M enthält, der wie bekannt, der gemeinsame Eckpunkt aller ∞^1 Polartetraeder der (F^2) Büschel im (MF^2) ist, folgt auf Grund des eben erwähnten, dass jene Rolle, die im (F^2) Büschel die beschriebene Gerade a spielt, in der Gesamtheit (MF^2) die Gerade m_k annimmt.

Die den Punkten der Geraden m_k , bezüglich der Kegelfläche M^2 , zugeordnete gemeinsame Polarebene, ist die Ebene (M, m) . Daraus folgt gleich, dass die den Punkten $T_k \in m_k$ zugeordneten Strahlen $t_k = \varphi(T_k)$, die ein beliebiger (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) ordnet, in der Ebene (M, m) liegen müssen und ein solches Strahlbüschel bilden, das den Scheitelpunkt auf der Geraden m hat. Dabei ist der Punkt $M \in m_k$ als ein regulärer Punkt dieser Geraden aufzufassen.

Durch ein beliebiges Büschel (F_1^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmte Strahlen

$$t_1 = \varphi(T_k) \text{ für alle } T_k \in m_k,$$

bilden in der Ebene (M, m) ein Strahlbüschel (T_1) . Der Punkt $T_1 \in m$ ist ein solches dass für ihm

$$m_k = \varphi(T_1), (F_1^2)$$

Geltung hat.

Alle dem Punkt $M \in m_k$ zugeordneten und durch das (F_1^2) Büschel bestimmten (TK) Strahlen bilden, wie schon erwähnt, ein Strahlbüschel (T_1) in jener Ebene des Büschels $[m]$, die auch dem Punkt M gegenüberliegende Seitenebene jenes Polartetraeders ist, dessen das (F_1^2) Büschel verordnet.

Wählen wir ein anderes Büschel (F_2^2) der Gesamtheit (MF^2) aus, dann bilden die zugeordneten Strahlen

$$t_2 = \varphi(T_k), (F_2^2) \text{ für alle } T_k \in m_k$$

ein neues Büschel (T_2) ($T_2 \in m$) in der Ebene (M, m) und auch ein neues Büschel (T_2) in jener Ebene des Büschels $[m]$, die die Seitenebene dem Büschel (F_2^2) zugeordnetes Polartetraeders ist. Auf Grund des Satzes B3a) ist dabei $T_1 \neq T_2$.

Analoge Folgerungen gelten auch für irgendein Büschel (F_1^2) der Gesamtheit (MF^2) .

Bestimmen wir noch die Kurve 3. Ordnung, die den Punkten der Geraden m_k , bezüglich des (F^2) Bündels, konjugiertzugeordneten Punkte bilden. Wie bekannt, bilden solche, dem Punkt $M \in m_k$ konjugiertzugeordneten Punkte die Gerade m .

Einem beliebigen Punkt $T_k \in m_k$ ist jener Punkt der Ebene (M, m) konjugiert, in dem sich die diesem Punkt zugeordneten (TK) Strahlen der Büschel (T_1) und (T_2) schneiden, weil diesen Punkt auch andere dem Punkt T_k zugeordneten und durch (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmten (TK) Strahlen enthalten. Der Punktreihe (T_k) ($T_k \in m_k$) zugeordnete Strahlen der Büschel (T_1) und (T_2) schneiden sich wegen der bijektiven Zuordnung und auf Grund des Chasleschen Korrespondenzprinzipes in den Punkten einer Kurve 2. Ordnung, die auch in zwei Geraden zerfallen kann. Dies geschieht dann, wenn der, demselben Punkt zugeordnete Strahl eines Strahlbüschels den Scheitelpunkt des anderen Büschels enthält und umgekehrt. In unserem Fall ist dies für den Punkt $M \in m_k$ stattgefunden. Die übrigen zugeordneten (TK) Strahlen der Büschel (T_1) und (T_2) und damit auch der anderen Büschel (T_r) , ($T_r \in m$), schneiden sich deswegen längs einer Geraden k in der Ebene (M, m) . Diese Gerade k ist also die Gesamtheit der, den Punkten der Geraden m_k bezüglich der (F^2) Büschel im (MF^2) konjugiertzugeordneten Punkte. Keine Ausnahme bildet dabei auch der Punkt $M \in m_k$, da ihm der Schnittpunkt der Geraden m und k konjugiertzugeordnet ist.

Die Gerade k ist keine den Punkt M enthaltende Gerade. Enthälte sie diesen Punkt, dann müsste ein Punkt $T_s \in m_k$ bestehen, dem die zugeordneten und durch ein jedes (F^2) Büschel im (MF^2) bestimmten (TK) Strahlen sich im Punkt M schneiden müssten. Sollte aber ein Strahl z. B. t_1 des Büschels (T_1) , der durch das Büschel (F_1^2) bestimmt ist, den Punkt M enthalten, müsste er dem Schnittpunkt der Geraden m_k mit jener Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ zugeordnet sein, die Seitenebene des Polartetraeders des (F_1^2) Büschels ist. Wie bekannt, schneiden die Ebenen des Büschels $[m]$ die Gerade m_k in einer Punktreihe, so dass eine bijektive Zuordnung unter der Punktreihe (m_k) , der Ebenen des Ebenenbüschels $[m]$ und der Reihe der (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) besteht. Daraus folgt, dass jene, den Punkt M enthaltenden (TK) Strahlen, die den Punkten der Geraden m_k zugeordnet sind, ein Strahlbüschel (M) in der Ebene (M, m) bilden. Dabei ist ein jeder Strahl durch ein anderes und vollkommen bestimmtes (F^2) Büschel aus (MF^2) bestimmt. Es kann also kein erwähnter Punkt $T_s \in m_k$ stattfinden, der dem Punkt M bezüglich des (F^2) Bündels konjugiertzugeordnet ist und die Gerade k kann den Punkt M nicht enthalten, wie behauptet.

SATZ B5. *Die den Punkten der Geraden m_k bezüglich des (F^2) Bündels konjugiertzugeordneten Punkte bilden eine in der Ebene (M, m) liegende Kurve 3. Ordnung, die in eine den Punkt M nicht enthaltende Gerade k und in die zweideutige Gerade m zerfällt. Jeder Punkt der Geraden m ist dem Punkt M konjugiertzugeordnet und auch der »Schnittpunkt« der inzidenten, dem Punkt M zugeordneten (TK) Strahlen, die die (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) ordnen.*

SATZ B6. Die einem beliebigen Punkt $T_k \in m_k$ zugeordneten (TK) Strahlen, die ein jedes der (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) ordnet, bilden ein Strahlbüschel in der Ebene (M, m) , so dass der Scheitelpunkt dieses Büschels in jenem Punkt der Geraden k liegt, der dem Punkt T_k bezüglich des (F^2) Bündels konjugiertzugeordnet ist

SATZ B7. Die den Punkten der Geraden m_k zugeordneten und durch die Reihe der (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmten (TK) Komplexstrahlen, bilden solche Strahlbüschel in der Ebene (M, m) , deren Scheitelpunkte eine Reihe (m) bilden, während dem Punkt $M \in m_k$ selbst, solche zugeordneten Strahlen in jeder Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ je ein Strahlbüschel bilden. Die Scheitelpunkte auch dieser Büschel liegen längs der Geraden m .

Auf Grund der Sätze B5, B6 und B7 folgt:

SATZ B8. Eine beliebige in der Ebene (M, m) liegende Gerade s ($s \not\equiv m$ und $s \not\equiv k$) ist ein (TK) Komplexstrahl. Sein Schnittpunkt mit der Geraden k ordnet welchem Punkt der Geraden m_k dieser Strahl zugeordnet ist und sein Schnittpunkt mit der Geraden m zeigt durch welches der (F^2) Büschel im (MF^2) als ein (TK) Komplexstrahl bestimmt ist.

Eine Ausnahme davon bilden die Strahlen der Büschel (M_n) ($n = 1, 2, 3$), $M_n \in m$. Für einen jeden dieser Strahlen ist es auf Grund des Satzes B8. möglich zu bestimmen, welchem Punkt der Geraden m_k er zugeordnet ist, nicht aber auch welches der (F^2) Büschel im (MF^2) ihn bestimmt.

Erwähnen wir schon jetzt, dass die, den Punkt M_n ($n = 1, 2, 3$) ($M_n \in m \wedge M_n \in k^6$) enthaltenden und in der Ebene (M, m) liegenden (TK) Strahlen noch eine gewisse Menge ausserordentlicher Eigenschaften haben, wie dies in Satz B14 dargestellt wird.

Für nachfolgende Untersuchungen des Ničeschen orientierten Komplexes sollen wir feststellen

d) Noch einige Tatsachen über den (TK) Komplex

Eine beliebige den Punkt M enthaltende Gerade r kann man als einen solchen (TK) Komplexstrahl aufzufassen, der durch ein jedes (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt wird. Die Gerade r ist deshalb ein ∞^1 -deutiger Strahl dieses Komplexes, den die Gesamtheit (MF^2) ordnet, bezüglich eines (F^2) Büschels aber eindeutig ist.

Ein solcher, den Punkt M enthaltende (TK) Strahl r wird durch ein bestimmtes Büschel (F_n^2) der Gesamtheit (MF^2) genau dann verordnet, wenn er einem Punkt T_1 zugeordnet wird, der in jener Ebene des Büschels $[m]$ liegt, die die Seitenebene des Polartetraeders des (F_1^2) Büschels ist. Nehmen wir anstatt des (F^2) irgend ein anderes Büschel (F_n^2) ($n = 2, 3, 4, \dots$) der Gesamtheit (MF^2) in Betracht, wird in der betreffenden Ebene des Büschels $[m]$ ein solcher Punkt T_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) liegen, für dem

$$r = \varphi(T_n), (F_n^2)$$

Geltung hat.

Es stellt sich die Frage, was ist die Gesamtheit jener Punkte T_n , deren zugeordnete (TK) Strahlen in Strahl r fallen.

Auf Grund des Satzes B3. folgt, dass ein streng bestimmter Punkt $T \in m$ besteht, für dem $r = \varphi(T)$ durch ein bestimmtes (F^2) der Gesamtheit (MF^2)

Geltung hat. Die gesuchte Gesamtheit muss deshalb den Punkt $T \in m$ enthalten und eine solche sein dass in jeder Ebene des Büschels $[m]$ noch je ein ihrer Punkte T_n liegt. Dies ist nur dann möglich, wenn die Punkte T_n einen Kegelschnitt r^2 bilden, den die Gerade m im Punkt T schneidet. Dieser Kegelschnitt liegt in jener Ebene R des Punktes M , die die gemeinsame, den Punkten der Geraden r zugeordnete Polarebene bezüglich der Kegelfläche M^2 ist.

SATZ B9. Eine beliebige den Punkt M enthaltende Gerade r ist ein ∞^1 -deutiger Strahl des (TK) Komplexes, der den Punkten eines, die Gerade m schneidenden Kegelschnittes zugeordnet ist und den die Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) ordnen.

Daraus folgt weiterhin:

SATZ B10. Die den Punkten einer, den Punkt M enthaltender Geraden r , bezüglich des (F^2 Bündels konjugiertzugeordneten Punkte, bilden eine Kurve 3. Ordnung, die in einen Kegelschnitt r^2 und in die Gerade m zerfällt. Die Ebene des Kegelschnittes r^2 ist die gemeinsame Polarebene, die den Punkten der Geraden r bezüglich der Kegelfläche M^2 zugeordnet ist und den Punkt M enthält. Der Kegelschnitt r^2 enthält fünf Punkte der Kernkurve k^6 6. Ordnung, durch die er vollkommen bestimmt ist.

Die Ebene R des Kegelschnittes r^2 schneidet nämlich die Kernkurve k^6 6. Ordnung in sechs Punkten von deren ein der Punkt M ist und die übrigen fünf auf dem Kegelschnitt r^2 liegen. Dies werden wir auf indirekte Weise feststellen.

Auf Grund des Satzes B10. ist uns bekannt, dass unter den Punktreihen (r) und (r^2) eine bijektive Zuordnung besteht, während dem Punkt $M \in r$ selbst, die konjugiertzugeordneten Punkte die Gerade m bilden. Die den Punkten dieser, in die Kurve r^2 und in die Gerade m zerfallener Kurve 3. Ordnung, konjugiertzugeordneten und bezüglich des (F^2 Bündels bestimmten Punkte, sollen eine Kurve 9. Ordnung bilden. Dabei muss aber die erwähnte Zuordnung unter den Punkten der Reihen (r) und (r^2) erhalten sein. Dies ist aber nur in jenen Fall möglich, wenn diese Kurve 3. Ordnung acht solche Punkte enthält, denen die bezüglich (F^2 konjugiertzugeordneten Punkte, acht die Gerade r schneidende Geraden bilden. Eine solche Eigenschaft haben nur die Punkte der Kernkurve k^6 .

Die dem Punkt M bezüglich des (F^2 Bündels konjugiertzugeordneten Punkte bilden wie bekannt, die Gerade m , die auch drei Punkte M_n ($n = 1, 2, 3$) enthält und die diesen Punkten, bezüglich des (F^2 Bündels konjugiertzugeordneten Punkte, bilden die Geraden m_n ($n = 1, 2, 3$), die den Punkt M enthalten und dadurch die Gerade r schneiden.

Alle den Punkten der Kernkurve k^6 , bezüglich des (F^2 Bündels konjugiertzugeordneten Punkte bilden die Trisekanten dieser Kurve und ordnen eine Regelfläche 8. Grades. [3]. Die Gerade r durchdringt diese Fläche in acht Punkten von deren drei im Punkt $M \in r$ liegen. Die übrigen fünf Schnittpunkte sind jenen Punkten der Kurve r^2 konjugiertzugeordnet, die die gemeinsamen Punkte der Kurven r^2 und k^6 sind.

Ein beliebiger Punkt $L_1 \in r$ der in jener Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ liegt, die die Seitenebene des Polartetraeders eines (F_1^2) Büschels der Gesamtheit (MF^2) ist, hat bezüglich des (F^2 Bündels, einen konjugiertzugeordneten Punkt $T_1 \in r^2$. Dies bedeutet, dass der Strahl

$$t_1 = \varphi(L_1), (F_1^2)$$

die Punkte T_1 und M enthalten muss und dadurch in der Ebene R liegen soll.

Die Gerade t_1 schneidet aber die Kurve r^2 in noch einem Punkt T_2 . Dies hat zur Folge, dass auf der Geraden r noch ein Punkt L_2 liegen muss, für den

$$t_1 \equiv t_2 = \varphi(T_2), (F_2^2) \subset (MF^2)$$

Geltung hat.

Es ist klar, dass die Punkte L_1 und L_2 der Geraden r , die Schnittpunkte dieser Geraden mit jener Kurve t^2 sind, deren Punkte den Punkten der Geraden $t_1 \equiv t_2$ konjugiertzugeordnete Punkte bezüglich des (F^2) Bündels sind.

Eine beliebige Gerade des Büschels (M) in der Ebene R ist deshalb ein solcher (TK) Komplexstrahl, der durch zwei verschiedene Büschel im (MF^2) bestimmt ist und zu den zwei verschiedenen Punkten der Geraden r zugeordnet ist.

SATZ B11. *Auf einer beliebigen den Punkt M enthaltenden Geraden liegen zwei solche Punkte, denen zugeordnete und durch zwei verschiedene (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmte (TK) Komplexstrahlen zusammenfallen und wieder eine den Punkt M enthaltende Gerade bilden.*

Weiterhin ist bekannt, dass die den Punkten einer Ebene, bezüglich des (F^2) Bündels konjugiertzugeordneten Punkte, eine Fläche 3. Ordnung bilden. Auch die den Punkten der Ebene (M, m) konjugiertzugeordneten Punkte bilden eine Fläche $(M, m)_k^3$ 3. Ordnung. Auf dieser Fläche liegt die Gerade m_k als eine Gesamtheit jener Punkte, die den Punkten der Geraden k konjugiertzugeordnet sind und noch sechs Geraden, die den Schnittpunkten der Ebene (M, m) mit der Kernkurve k^6 konjugiertzugeordnete Punkte bilden. Vier dieser Geraden sind die schon gut bekannten Geraden m_1, m_2, m_3 und m .

Einem beliebigen Punkt C der Ebene (M, m) ist bezüglich des (F^2) Bündels ein Punkt C_k der Fläche $(M, m)_k^3$ zugeordnet. Auf Grund des Satzes B8. wissen wir, dass der Punkt C der Scheitelpunkt eines Büschels (C) der (TK) Strahlen in der Ebene (M, m) ist. Ein beliebiger Strahl c_1 dieses Büschels (C) ist dem bestimmten Punkt $C_1 \in m_k$ bezüglich des bestimmten Büschels $(F^2) \subset (MF^2)$ zugeordnet. Dies bedeutet, dass auch der, dem Punkt C zugeordnete und durch das (F^2) Büschel bestimmte (TK) Strahl ausser des Punktes C_k noch den Punkt $C_1 \in m_k$ enthalten muss. Dabei ist den Punkt C als einen Punkt der Geraden c_1 aufzufassen. Da auf Grund des Satzes B8. eine bijektive Zuordnung unter den Strahlen des Büschels (C) und den Büscheln (F^2) der Reihe (MF^2) und auch unter den Strahlen des Büschels (C) und den Punkten der Reihe (m_k) besteht, wird dem Punkt C , wenn ihn als einen Punkt eines anderen Strahles c_2 des Büschels (C) aufzufassen ist, ein neuer den Punkt C_k enthaltender (TK) Komplexstrahl zugeordnet, der den Strahl m_k in jenem Punkt C_2 schneidet, für dem

$$c_2 = \varphi(C_2), (F_2^2)$$

Geltung hat.

Auf Grund dessen folgt:

SATZ B12. *Die einem Punkt C der Ebene (M, m) zugeordneten und durch die (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmten (TK) Komplexstrahlen bilden ein Strahlbüschel (C_k) in der Ebene (C_k, m_k) , wobei die Punkte C und C_k die konjugiertzugeordneten Punkte bezüglich des (F^2) Bündels sind. Ein beliebiger Strahl des Büschels (C_k) ist durch ein streng bestimmtes Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) festgesetzt.*

Nehmen wir alle Punkte der Ebene (M, m) in Betracht, bilden die diesen Punkten auf die beschriebene Weise zugeordneten (TK) Strahlen, die alle Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) ordnen, einen singulären linearen Komplex mit der Leitgeraden m_k , während die, dem Punkt M selbst zugeordneten (TK) Strahlen einen anderen linearen singulären Komplex mit der Leitgeraden m bilden. (Satz B1).

Uns interessiert, ob ein beliebiger Strahl des ersten dieser Komplexe einfach oder mehrfach ist.

Wie bekannt, der einem beliebigen Punkt $C_1 \in m_k$, bezüglich des (F^2) Bündels konjugiertzugeordnete Punkt ist ein Punkt $C_{1k} \in k$. Die Strahlen

$$t_r = \varphi(C_1) / \forall (F_r^2) \subset (MF^2)$$

bilden ein (C_{1k}) Büschel in der Ebene (M, m) , wobei einen jeden Strahl t_r dieses Büschels (C_{1k}) ein bestimmtes Büschel (F_r^2) der Gesamtheit (MF^2) ordnet. Die den Punkten eines Strahles t_1 des Strahlbüschels (C_{1k}) konjugiertzugeordneten Punkte bilden eine Kurve t_1^3 3. Ordnung, die auch den Punkt $C_1 \in m_k$ enthält. Jene (TK) Strahlen die den Punkten der Geraden t_1 zugeordnet sind und durch das Büschel (F_1^2) bestimmt sind, bilden die Erzeugenden einer Kegelfläche (C_1, t_1^3) 2. Grades, die den Scheitelpunkt im Punkt C_1 hat.

Ist anstatt des Strahles t_1 irgend ein anderer Strahl t_r des Büschels (C_{1k}) in Betracht genommen, werden auf die analoge Weise die Erzeugenden einer anderen Kegelfläche (C_1, t_r^3) 2. Grades bestimmt, die das (F_r^2) Büschel der Reihe (MF^2) ordnet. Berücksichtigen wir alle Strahlen des Büschels (C_{1k}) der Ebene (M, m) , sind damit auch alle Punkte dieser Ebene in Betracht genommen, so dass unter den Geraden des Büschels (C_{1k}) und den Büscheln (F^2) der Reihe (MF^2) eine bijektive Zuordnung besteht.

Der Punkt $C_1 \in m_k$ ist der Scheitelpunkt von ∞^1 Kegelflächen 2. Grades von denen sich je zwei in vier Erzeugenden durchdringen. Diese Flächen bilden doch kein Büschel und ein beliebiger, den Punkt C_1 enthaltende (TK) Komplexstrahl ist mindestens zu zwei verschiedenen Punkten der Ebene (M, m) zugeordnet und durch zwei verschiedenen Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmt. Da es sich hier doch um genau zwei verschiedene Punkte handelt, folgt auf Grund der Tatsache, dass eine jede Gerade des Punktes C_1 die erwähnte Fläche $(M, m)_k^3$ 3. Ordnung ausser im Punkt C_1 in noch genau zwei Punkten durchsetzt.

Da die analogen Folgerungen für ein beliebiges Punkt der Geraden m_k Geltung haben, folgt:

SATZ B13. Eine beliebige die Gerade m_k schneidende Gerade c ist ein solcher zweifacher (TK) Komplexstrahl, der zu zwei verschiedenen Punkten der Ebene (M, m) zugeordnet ist und durch zwei verschiedene Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmt ist. Einen beliebigen Punkt der Geraden m_k enthalten je vier solche Geraden c , die durch dieselben zwei Büschel aus (MF^2) bestimmt sind.

Für weitere Untersuchungen ist auch die Gerade

$$m_n = \varphi(M_n), / \forall (F^2) \subset (MF^2) / M_n \in m \wedge M_n \in k^6, (n = 1, 2, 3)^{1)}$$

interessant. Diese Gerade ist, wie bekannt, auch eine Trisekante der Kernkurve k^6 .

¹⁾ Bis Ende dieser Abteilung B soll stets beim Index n ($n = 1, 2, 3$) stehen.

Da die Gerade m_n auch den Punkt M enthält, der der gemeinsame Eckpunkt aller Polartetraeder der Gesamtheit (MF^2) ist, bilden auch die den Punkten dieser Geraden m_n zugeordneten (TK) Strahlen, die ein jeder der Büschel (F^2) der Reihe (MF^2) ordnet, zwei Strahlbüschel (M_n) . Die Ebene eines dieser Büschel, den die, dem Punkt $M \in m_n$ zugeordneten (TK) Strahlen bilden, ist eine schon gut bekannte Ebene des Ebenenbüschels $[m]$, die das betreffende (F^2) Büschel ordnet. Solche Strahlen werden uns jetzt nicht interessieren.

Die Ebene G_n des anderen Strahlbüschels (M_n) ist eine den Punkten der Geraden m_n bezüglich der Kegelfläche M^2 polarzugeordnete und den Punkt M enthaltende Ebene, die die Gerade m im Punkt M_n schneidet. In dieser Ebene werden deswegen auch alle den Punkten der Geraden m_n zugeordneten (TK) Komplexstrahlen liegen, die alle (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) ordnen. Ein jeder dieser Strahlen ist als ein (TK) Strahl ∞^1 -deutig.

Man kann die Frage stellen, ist ein beliebiger Strahl des Büschels (M_n) in der Ebene G_n einem Punkt der Geraden m_n zugeordnet und durch alle (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt oder ist dieser Strahl der Punktreihe (m_n) zugeordnet und durch die Reihe der Büschel aus (MF^2) bestimmt. Es wird gezeigt, dass beides stattgefunden werden.

Denen von Punkt M verschiedenen Schnittpunkten M_{n1} und M_{n2} der Geraden m_n mit der Kernkurve k^6 , sind zwei (TK) Komplexstrahlen m_{n1} und m_{n2} in der Ebene G_n zugeordnet. Diese Strahlen enthalten den Punkt M_n , sind als (TK) Strahlen durch *alle* Büschel (F^2) im (MF^2) bestimmt und enthalten die, den Punkten M_{n1} und M_{n2} bezüglich des (F^2) Bündels konjugiertzugeordneten Punkte.

Jeder der übrigen Strahlen des Büschels (M_n) in der Ebene G_n ist als (TK) Komplexstrahl der Punktreihe (m_n) zugeordnet und durch die Büschelreihe der Gesamtheit (MF^2) bestimmt. So ist z. B. der Strahl M_nM ein ∞^1 -deutiger (TK) Komplexstrahl, der der Punktreihe (m_n) zugeordnet ist. Die Ebenen des Büschels $[m]$ schneiden, wie bekannt, die Gerade m_n in einer Punktreihe (m_n) , die bijektiv zur Büschelreihe der Gesamtheit (MF^2) ist. Einem beliebigen Punkt T der Geraden m_n ist der zugeordnete (TK) Komplexstrahl in die Gerade M_nM gefallen und durch jenes Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) verordnet, dem auch die, den Punkt T enthaltende Tetraederseitebene (T, m) zugeordnet ist. Eine Ausnahme bilden nur die Punkte M, M_{n1} und M_{n2} der Geraden m_n , die auch die Punkte der Kernkurve k^6 sind.

Die dem Punkt $M \in m_n$ zugeordneten (TK) Komplexstrahlen fallen nicht zusammen, bilden aber ein Strahlbüschel (M_n) in der Ebene G_n u. zw. so, dass der durch ein (F^2) Büschel bestimmte Strahl $t_r = \varphi(M)$ in die Schnittgerade der Ebene G_n mit jener Ebene des Büschels $[m]$ fällt, die dem Eckpunkt M gegenüberliegende Seitenebene jenes Polartetraeders ist, den das Büschel (F^2) verordnet.

Die einem beliebigen Punkt $T \in m_n$ zugeordneten und durch die Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) verordneten (TK) Komplexstrahlen, bilden ein Strahlbüschel (M_n) in der Ebene G_n , wie dies auch in allgemeinem Fall bekannt wird.

SATZ B14. *Die den Punkten der Geraden m_n , die auch die Trisekante der Kernkurve k^6 und auch ein dem Punkt $M_n \in m$ bezüglich aller Büschel der Gesamtheit (MF^2) zugeordneter (TK) Komplexstrahl ist, zugeordneten (TK) Strahlen bilden ein Strahlbüschel (M_n) in einer Ebene G_n . Diese den Punkt M enthaltende*

Ebene ist die gemeinsame Polarebene, die den Punkten der Geraden m_n bezüglich der Kegelfläche M^2 zugeordnet ist.

Diese Zuordnung ist eine solche, dass:

a) Eine beliebige Gerade t des Büschels (M_n) ein ∞^1 -deutiger (TK) Komplexstrahl ist, der der Punktreihe (m_n) zugeordnet und durch die Büschelreihe (MF^2) verordnet ist, u. zw. so, dass die Punkte der Reihe (m_n) und die Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) in einer bijektiven Zuordnung stehen.

b) Die einem beliebigen Punkt $T \in m_n$ zugeordneten (TK) Komplexstrahlen, die die Reihe der (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) verordnet, ein Strahlbüschel (M_n) bilden. Eine Ausnahme geben nur die Schnittpunkte M_{n1} und M_{n2} der Geraden m_n mit der Kernkurve k^6 , da die ihnen zugeordneten (TK) Komplexstrahlen, die alle Büschel der Gesamtheit (MF^2) verordnen, in die Geraden m_{n1} und m_{n2} fallen.

c) Durch ein beliebiges Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) sind die, den Punkten der Geraden m_n ein Büschel (M_n) bildenden (TK) Strahlen in der Ebene G_n zugeordnet; dabei ist aber den Punkt M als einen regulären Punkt der Geraden m_n zu betrachten.

C. DER (MK) KOMPLEX

Der Majcensche Komplex oder der (MK) Komplex, den ein (F^2) Büschel verordnet, ist durch eine solche Gesamtheit der Geraden gebildet, die je eine Fläche des $|F^2|$ Büschels im Unendlichen berühren. [1], [10]. Der andere der zwei Berührungspunkte einer jeden dieser (MK) Komplexstrahlen ist ein eigentlicher Punkt und ist als *Mittelpunkt* des (MK) Strahles genannt. Ein beliebiger Raumpunkt ist der Mittelpunkt eines (MK) Strahles. Ein beliebiger Fernpunkt ist der Scheitelpunkt eines Büschels der gleichlaufenden (MK) Strahlen. Die einen beliebigen Raumpunkt enthaltenden (MK) Strahlen bilden, wie bekannt, eine Kegelfläche 3. Grades und die Mittelpunkte dieser Strahlen bilden eine Raumkurve 4. Ordnung. Der (MK) Komplex ist deshalb 3. Grades.

Ein (TK) Strahl und ein (MK) Strahl, die demselben Raumpunkt zugeordnet sind, sind auch untereinander parallel.

Betrachten wir aber die Gesamtheit (MF^2) , dann ist durch ein jedes (F^2) Büschel dieser Gesamtheit ein (MK) Komplex bestimmt. Uns werden vorläufig jene seiner Strahlen interessieren, deren Mittelpunkte sich im Punkt M bzw. auf der Geraden m und m_k befinden. Die Ursache für eine solche Untersuchungsverengung ist dieselbe, wie es beim (TK) Komplex stattgefunden hat.

a) Die dem Punkt M zugeordneten (MK) Komplexstrahlen

In [10] wurde es gezeigt, dass jene (MK) Komplexstrahlen die einem Scheitelpunkt z. B. A der Singulär-Kegelfläche des $|F^2|$ Büschels enthalten, wobei der Punkt A der Eckpunkt des zugeordneten Polartetraeders $ABCD$ dieses (F^2) Büschels ist, eine solche Kegelfläche 3. Grades bilden, die in eine Kegelfläche 2. Grades mit dem Scheitelpunkt im Punkt A und in ein Strahlbüschel (A) zerfällt. Die Erzeugenden dieser Kegelfläche übereinstimmen mit den Erzeugenden der erwähnten Kegelfläche des $|F^2|$ Büschels und die Mittelpunkte dieser (MK) Strahlen halbieren die Strecke die auf den Erzeugenden von der Grundkurve k^4 4. Ordnung des $|F^2|$ Büschels bestimmt wird. Solche Mittelpunkte bilden eine neue Kurve 4. Ordnung. Jene den Büschel (A) bildenden (MK) Strahlen

liegen in einer Ebene, die parallel mit der Ebene (BCD) ist und die Mittelpunkte dieser Strahlen liegen im Punkt A .

Im Fall der Gesamtheit (MF^2) ist, wie bekannt, die Kegelfläche M^2 die gemeinsame Fläche aller ihren (F^2) Büschel und der Punkt $M \in k^6$ ist der gemeinsame Eckpunkt von ∞^1 Polartetraeder, während die dem Eckpunkt M gegenüberliegenden Seitenebenen dieser Tetraeder ein Ebenenbüschel $[m]$ bilden.

Eine beliebige Erzeugende der Kegelfläche M^2 ist deshalb, als ein (MK) Komplexstrahl, durch ein jedes dieser (F^2) Büschel bestimmt und als solcher ∞^1 -deutig ist. Da alle Grundkurven k^4 der Reihe der Büschel (F^2) im (MF^2) die Kegelfläche M^2 decken, ist es leicht zu beweisen, dass auch die Mittelpunktkurven 4. Ordnung dieser (MK) Strahlen die Fläche M^2 decken.

Jene, durch die Gesamtheit (MF^2) bestimmten (MK) Komplexstrahlen, deren Mittelpunkte sich im Punkt M befinden, bilden ein Bündel $\{M\}$. Die durch ein (F^2) Büschel verordneten (MK) Strahlen liegen in einer den Punkt M enthaltenden Ebene, die parallel mit jener Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ liegt, die als die Polartetraederseitebene diesem (F^2) Büschel angehört. Der Punkt M selbst ist als der Mittelpunkt dieser Strahlen ∞^2 -deutig.

SATZ C1. *Jene, den Punkt M enthaltenden (MK) Komplexstrahlen, die durch die Reihe der Büschel (F^2) im (MF^2) verordnet sind bilden:*

a) *eine Kegelfläche 2. Grades der ∞^1 -deutigen Strahlen, deren Erzeugenden mit den Erzeugenden der Kegelfläche M^2 des (F^2) Bündels übereinstimmen; die Mittelpunkte dieser Strahlen, die durch je ein Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind, bilden auf der Fläche M^2 eine Kurve 4. Ordnung und alle solchen Mittelpunktkurven überdecken die Fläche M^2*

b) *ein Bündel $\{M\}$ solcher Strahlen, die im Punkt M den Mittelpunkt haben, wobei jene Strahlen die je ein (F^2) Büschel verordnet ein Strahlbüschel (M) bilden. Die Ebene dieses Büschels ist mit jener Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ parallel, die auch die Tetraederseitebene des betreffenden (F^2) Büschels ist.*

b) Die (MK) Komplexstrahlen mit den Mittelpunkten auf der Geraden m

Es ist bekannt, dass die den Punkten $T \in m$, durch ein Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmten (TK) Strahlen, eine Kegelfläche des Scheitelpunktes M bilden (Satz B3 b)). Da jene (MK) Strahlen, die durch dasselbe (F^2) Büschel bestimmt sind und deren Mittelpunkte auf der Geraden m liegen, mit den Erzeugenden dieser Kegelfläche parallel sind, folgt auf Grund des bekannten Chaslesschen Korrespondenzprinzippes, dass solche (MK) Strahlen eine Regelfläche (mMK) 3. Grades bilden, der die Gerade m eine einfache Leitgerade ist. Die Erzeugenden dieser Fläche sind nämlich die Verbindungsgeraden der Punkte der Geraden m mit den ihnen bijektiv zugeordneten Punkten jener Fernkurve 2. Ordnung, die die Fernpunkte der erwähnten (TK) Strahlen bilden. Nehmen wir aber alle Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) in Betracht, bilden die zugeordneten (TK) Strahlen die Erzeugenden des bekannten Kegelflächenbüschels (M^2) , dem die Grundkurve 4. Ordnung in die Geraden m_1, m_2, m_3 und m_k zerfällt. Daraus folgt, dass alle auf die beschriebene Weise bestimmten Flächen (mMK) eine Gesamtheit solcher Flächen 3. Grades bilden deren drei gemeinsame Erzeugenden die Verbindungsgeraden der Punkte $M_n \in m$ ($n = 1, 2, 3$) mit den Fernpunkten der zugeordneten Geraden m_n ($n = 1, 2, 3$) sind, während die Gerade m die einfache Leitgerade einer jeden dieser Flächen (mMK) ist.

Die Gerade m_k ist, wie bekannt, ein solcher (TK) Strahl, der einem jeden Punkt der Geraden m zugeordnet ist, jedesmal aber durch ein anderes (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt ist (s. Bb)). Dies bedeutet weiterhin, dass sich auf jeder der Flächen (mMK) eine solche Erzeugende befindet, die die Verbindungsgerade eines Punktes der Geraden m mit dem Fernpunkt E_m der Geraden m_k ist. Alle solchen (MK) Strahlen bilden ein Büschel (E_m) der gleichlaufenden Strahlen in der Ebene (E_m, m).

Daraus folgt, dass alle solchen (MK) Komplexstrahlen, die die Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmen und deren Mittelpunkte auf der Geraden m liegen, eine Kongruenz ($K_m MK$) bilden.

Um die Ordnung und Klasse dieser Kongruenz bestimmen zu können, erinnern wir uns noch einmal, dass die *einem* beliebigen Punkt $T \in m$ zugeordneten (TK) Komplexstrahlen, die durch *alle* Büschel (F^2) im (MF^2) bestimmt sind, ein Strahlbüschel (T) in einer Ebene des Ebenenbüschels [m_k] bilden (Satz B3a)). Dies bedeutet, dass auch jene (MK) Strahlen, die im Punkt $T \in m$ ihren Mittelpunkt haben, ein in jener Ebene liegendes Strahlbüschel (T) bilden, die parallel mit der erwähnten Ebene des Büschels [m_k] ist.

Eine beliebige Ebene schneidet die Gerade m in einem Punkt T und das erwähnte zugeordnete Büschel (T) der (MK) Strahlen, in *einem* seiner Strahlen. Die gesuchte Kongruenz hat also die Klasse ein.

Die Ordnung der Kongruenz ist durch die Anzahl einen beliebigen Raumpunkt R enthaltender Strahlen bestimmt. Um ein den Punkt R enthaltender (MK) Komplexstrahl der Kongruenz ($K_m MK$) angehören könnte, muss sein Mittelpunkt auf der Geraden m liegen. Uns interessieren deshalb nur die, in der Ebene (R, m) liegenden (MK) Strahlen, die auch dem Büschel (R) angehören. Die Ebene (R, m) schneidet jede der Ebenen des Büschels [m_k] in einer Geraden, was weiterhin bedeutet, dass sie auch jede Ferngerade dieser Ebenen in je einem Punkt schneidet. Auf Grund des Satzes B3a) folgt, dass die Punkte der Reihe (m) und die Punkte der Ferngeraden der Ebene (R, m) in einer bijektiven Zuordnung sind. Da weiterhin ein (TK) Strahl und ein (MK) Strahl, die demselben Raumpunkt zugeordnet sind, auch untereinander parallel sind folgt, dass die Verbindungsgeraden der zugeordneten Punkte der erwähnten Reihen 1. Ordnung die (MK) Komplexstrahlen sind. Auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzippes, hüllen sie allen eine Kurve e^2 2. Klasse in der Ebene (R, m) ein. Daraus folgt, dass den Punkt R zwei solche Strahlen enthalten und die Ordnung der Kongruenz ($K_m MK$) gleich zwei ist.

Die Kurve e^2 2. Klasse bilden je zwei solche (MK) Strahlen, die dasselbe Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) ordnet. Die Ebene (R, m) schneidet nämlich die Fernkurve jeder der Kegelflächen des Büschels (M^2) (Satz B3b)) in je zwei Punkten, die auch die Fernpunkte der erwähnten (MK) Strahlen sind. Je zwei (MK) Strahlen die dasselbe Büschel (F^2) verordnet, schneiden sich in einem Punkt S in der Ebene (R, m). Ein solcher Punkt S ist aber in allgemeinem von dem beliebigen Punkt R der Ebene (R, m) verschieden. Daraus folgt, dass je zwei den Punkt R enthaltende (MK) Strahlen der Kongruenz ($K_m MK$) in allgemeinen durch zwei verschiedene Büschel (F^2) im (MF^2) bestimmt sind.

SATZ C2. *Jene (MK) Komplexstrahlen, die durch die Reihe der Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind und deren Mittelpunkte auf der Geraden m liegen, bilden eine Kongruenz ($K_m MK$) 2. Ordnung und 1. Klasse. Diese Kongruenz ist durch ∞^1 Flächen 3. Grades gebildet, u. zw. so, dass eine jede dieser Flächen durch*

ein Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmt ist. Die einfache Leitgerade einer jeden dieser Flächen ist die Gerade m und ihre gemeinsamen Erzeugenden sind die Verbindungsgeraden der Punkte $M_n \in m$ mit den Fernpunkten der Geraden m_n ($n = 1, 2, 3$).

c) **Die (MK) Komplexstrahlen mit den Mittelpunkten auf der Geraden m_k**

Die den Punkten der Geraden m_k zugeordneten und durch ein beliebiges Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmten (TK) Komplexstrahlen bilden, wie bekannt, eine Kegelfläche 2. Grades, die in zwei Strahlbüschel zerfällt und deren Scheitelpunkt in einem bestimmten Punkt $T_m \in m$ liegt. Dabei bilden jene, dem Punkt $M \in m_k$ zugeordneten (TK) Strahlen ein Strahlbüschel (T_m) in jener Ebene des Ebenenbüschels $[m]$, die auch die Seitenebene des, dem Büschel (F^2) zugeordneten Polartetraeders ist. Allen anderen Punkten der Geraden m_k , einschliessend auch den Punkt M als einen regulären Punkt, bilden die zugeordneten (TK) Strahlen das Strahlbüschel (T_m) in der Ebene (M, m) (Satz B7).

Da über jene, dem Punkt $M \in k^6$ zugeordneten (TK) — und (MK) Komplexstrahlen in *a*) gesprochen wurde, werden uns vorläufig nur jene in der Ebene (M, m) liegenden (TK) Strahlen interessieren. Die Fernpunkte dieser Strahlen liegen in der Ferngeraden n der Ebene (M, m). Diese Punkte sind die Fernpunkte jener, durch das Büschel (F^2) bestimmten (MK) Strahlen, deren Mittelpunkte längs der Geraden m_k liegen. Unter die Punktreihen (m_k) und (n) besteht auf diese Weise eine bijektive Zuordnung und auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzips folgt, dass jene (MK) Komplexstrahlen, die die Verbindungsgeraden so zugeordneter Punkte sind, einem Regulus des hyperbolischen Paraboloides bilden. Die zwei Erzeugenden des anderen Reguli sind die Geraden n und m_k .

Nehmen wir anstatt des erwähnten Büschels (F^2) ein anderes Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) an, wird sich zwar die Zuordnung unter die Punkte der Geraden n und m_k ändern, bleibt aber bijektiv und die Verbindungsgeraden auch solcher Punkte werden einen Regulus eines neuen hyperbolischen Paraboloides bilden. In Bb) wurde nämlich gezeigt, dass die einem beliebigen Punkt $T \in m_k$ zugeordneten (TK) Strahlen die ein jedes der Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) verordnet, ein Strahlbüschel (K) solcher Strahlen in der Ebene (M, m) bilden, wo $K \in k$ ist. Dies bedeutet weiterhin, dass derselbe Punkt $T \in m_k$ der Mittelpunkt eines Büschels (T) jener in der Ebene (T, n) liegenden (MK) Strahlen ist, deren jeder Strahl durch ein anderes Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmt ist.

Eine Ausnahme bildet nur der Punkt $M \in m_k$, da für ihm immer

$$m = \varphi(M), |\forall (F^2) \subset (MF^2)|$$

Geltung hat. Die Verbindungsgerade des Fernpunktes S_m der Geraden m mit dem Punkt M ist ein solcher (MK) Strahl, den ein jeder der Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) ordnet. Er ist deshalb noch eine gemeinsame Erzeugende aller hyperbolischen Paraboloides, die auf die beschriebene Weise alle Büschel (F^2) im (MF^2) verordnen.

Noch ein Punkt der Geraden m_k hat als der Mittelpunkt der (MK) Strahlen eine Sonderstellung. Auf der Geraden m_k muss ein solcher Punkt T_k liegen, dem

der, bezüglich des (F^2 Bündels konjugiertzugeordnete Punkt, im Fernpunkt K_n der Geraden k liegt. Dies bedeutet, dass alle Strahlen

$$t = \varphi(T_k), \forall (F^2) \subset (MF^2), T_k \in m_k$$

ein Büschel (K_n) in der Ebene (M, m) bilden, während der Punkt K_n der gemeinsame Fernpunkt aller diesen parallelen (TK) Strahlen ist. Jene (MK) Strahlen, die seinen Mittelpunkt im Punkt $T_k \in m_k$ haben, haben deshalb auch den gemeinsamen Fernpunkt im Punkt K_n , was bedeutet, dass alle solchen Strahlen in die Verbindungsgerade $T_k K_n$ fallen. Diese Gerade ist die vierte gemeinsame Erzeugende aller ∞^1 hyperbolischen Paraboloiden, deren einen Regulus jene (MK) Strahlen bilden, die die Mittelpunkte auf der Geraden m_k haben und die durch alle (F^2) Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind.

Alle diesen hyperbolischen Paraboloiden bilden deshalb ein Büschel der Flächen 2. Grades, dem die Grundkurve k^4 4. Ordnung in vier Erzeugende: $n, m_k; MS_m$ und $T_k K_n$ zerfällt, von denen je zwei demselben Regulus angehören.

Die Erzeugenden dieser Paraboloiden bilden eine Kongruenz 1. Ordnung und 1. Klasse, was direkt aus der Tatsache folgt, dass diese Flächen ein Büschel 2. Grades bilden.

Daraus folgt:

SATZ C3. Die durch die Reihe der Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmten (MK) Komplexstrahlen, deren Mittelpunkte längs der Geraden m_k liegen, bilden eine Kongruenz, die zerfällt in:

- a) eine Kongruenz (1., 0.) der Strahlen aus den Satz C1b)
- b) eine Kongruenz (1., 1.) jener Strahlen, die die Transversalen der Geraden n und m_k sind, wobei die Gerade n die Ferngerade der Ebene (M, m) ist.

SATZ C4. Die (MK) Komplexstrahlen aus den Satz C3b) sind die Erzeugenden je eines Regulus ein Büschel bildenden hyperbolischen Paraboloiden. Die Grundkurve dieses Büschels zerfällt in vier Erzeugenden von denen zwei u. zw. m_k und n dem anderen Regulus angehören.

Weitere Untersuchungen in der Gesamtheit (MF^2) werden den Ničeschen orientierten Strahlkomplex betrachten und werden im II Teil ausgeführt.

LITERATUR:

- [1] J. Majcen, O jednoj posebnoj vrsti kubičnog kompleksa, Rad JAZU 155 (1903), 159—172.
- [2] V. Niče, Površine četvrtog reda kao geometrijsko mjesto dirališta pramena ravnina i svežnja površina drugog reda, Rad JAZU 271 (1941), 67—76.
- [3] V. Niče, O svežnju ploha 2. reda, Rad JAZU 274 (1942), 163—169.
- [4] V. Niče, Ein Beitrag zum F^2 - Bündel mit Polartetraeder, Glasnik mat.-fiz. i astr. 15 (1960), 179—188.
- [5] V. Niče, Beiträge zum Büschel der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe, Rad JAZU 325 (1961), 27—48.
- [6] V. Niče, Über neue Eigenschaften der Büschel und der Bündel polarer Räume, Glasnik mat.-fiz. i astr. 17 (1962), 189—204.
- [7] V. Niče, Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex, Rad JAZU 325 (1962), 107—125.

- [8] *V. Niče*, Neue Beiträge zu den Eigenschaften eines Polarraumbündels, *Glasnik matematički* **4** (24) (1969), 259—274.
- [9] *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, Abt. III, 1910.
- [10] *V. Ščurić-Čudovan*, Singularitäten des Majcenschen Strahlenkomplexes, *Glasnik matem.* **3** (23) (1968), 117—139.

Angenommen in II. Abteilung
28. 4. 1982.

Neki problemi nastali razvrstavanjem svežnja ploha 2. stupnja u ∞^1 pramenova takvih ploha, I dio

Vlasta Ščurić - Čudovan, Zagreb

Sadržaj

Istaknimo neka od osnovnih svojstava svežnja $|F^2|$ ploha 2. stupnja koja je istražio još *Th. Reye* u [9].

Svežanj ploha 2. stupnja određen je s tri njegove plohe koje ne leže u istom pramenu. Svakom od ∞^2 ploha 2. stupnja svežnja $|F^2|$ određen je i njezin polarni prostor, pa je svežnjem $|F^2|$ određen i svežanj polarnih prostora (F^2 tih ploha). ∞^2 ploha svežnja određuje ∞^2 pramenova $|F^2|$ ploha 2. stupnja, a svaka se ploha F^2 svežnja nalazi u ∞^1 pramenova $|F^2|$. Temeljne krivulje tih ∞^1 pramenova prekrivaju plohu F^2 i imaju osam zajedničkih (asociranih) točaka, koje su zajedničke za sve plohe svežnja.

Središta-vrhovi svih stožaca svežnja $|F^2|$ leže na prostornoj krivulji k^6 6. reda, koju čine i glavne točke svih pramenova polarnih prostora (F^2) sadržanih u svežnju (F^2). Bilo kojoj točki $M \in k^6$ konjugirane su s obzirom na ∞^2 ploha svežnja točke neke zrake m koja je trisekanta krivulje k^6 . Sjecištima M_n ($n = 1, 2, 3$) zrake m i krivulje k^6 pridružene trisekante m_n ($n = 1, 2, 3$) sadrže točku M .

U radu je promatran općenit svežanj $|F^2|$, shvaćen kao skup od ∞^1 pramenova $|F^2|$. Bilo koja točka M krivulje k^6 vrh je i središte singularne plohe, tj. nekog stošca M^2 tog svežnja. Bilo koja ploha svežnja $|F^2|$ određuje sa stošcem M^2 jedan pramen $|F^2|$, a sve plohe svežnja $|F^2|$ određuju skup $|MF^2|$, kojeg čini niz od ∞^1 pramenova $|F^2|$ kojima je zajednička ploha stožac M^2 .

Istraživanja se vrše u jednom takvom skupu $|MF^2|$. Posve je jasno da su unatoč ograničenju na ∞^1 pramenova $|F^2|$ unutar skupa $|MF^2|$ mogućnosti pristupa problemu kao i sadržaju istraživanja vrlo velika, pa su se istraživanja usmjerila na strogo određene zadatke.

Točka $M \in k^6$ je kao vrh zajedničkog stošca svih ∞^1 pramenova $|F^2|$ skupa $|MF^2|$ ujedno i zajednički vrh njima pridruženih autopolarnih tetraedara. Po tri preostala vrha pojedinog tetraedra nalaze se u istoj ravnini pramena $[m]$. Znamo naime da su točke pravca m konjugirane točki M s obzirom na polarni prostor svake od ploha svežnja (F^2). Bilo koja ravnina pramena $[m]$ siječe krivulju k^6 u tri točke M_n ($n = 1, 2, 3$) na pravcu m i u tri vrha tetraedra nekog određenog pramena (F^2). Jedna ravnina tog pramena $[m]$ je i ravnina (M, m) pridružena singularnom pramenu (F_M^2) takvih ploha, koje sve diraju ravninu (M, m) u točki M . Autopolarni tetraedar tog pramena raspada se u dvostruku ravninu (M, m) , dok u sam vrh M padaju dva vrha tog tetraedra.

Točkama pravca m , s obzirom na stožac M^2 , pridružene polarne ravnine određuju pramen ravnina kojima je os pravac m_k konjugiran pravcu m s obzirom na isti stožac. Pravac m_k sadrži točku $M \in k^6$ i unisekanta je krivulje k^6 .

Svakim od pramenova (F^2) skupa (MF^2) određena su i četiri kompleksa: tetraedarski kompleks ili kompleks (TK) 2. stupnja, *Majcenov* kompleks ili kompleks (MK) 3. stupnja, orijentirani Ničevov kompleks ili kompleks (VN) 8. stupnja te kompleks normala 8. stupnja.

Kako su iz literature poznata mnoga svojstva pojedinih kompleksa, bilo je interesantno istražiti svojstva tih kompleksa bazirana na skupu (MF^2). Jasno je da su općenita istraživanja i u skupu od ∞^1 pramenova još uvijek toliko opširna da se u radu nužno moralo ograničiti na samo neke probleme. U I dijelu rada istražuje se kompleks (TK) i kompleks (MK), a u II dijelu rada kompleks (VN). Zasad nas interesiraju zrake tih kompleksa koje su na određeni način pridružene točki M , odnosno točkama pravaca m i m_k . Pri tim je istraživanjima posebna pažnja usmjerena na to da se za bilo koju zraku spomenutih kompleksa utvrdi kojim je pramenom iz skupa (MF^2) ona određena i kojoj je točki pridružena.

KOMPLEX (TK)

Nekoj točki T pridružena zraka kompleksa (TK) određena jednim pramenom (F^2) presječna je polarnih ravnina pridruženih točki T s obzirom na polarne prostore ploha pramena (F^2).

Radi li se o skupu (MF^2), svakim je njegovim pramenom (F^2) određena jedna zraka kompleksa (TK) pridružena istoj točki T .

U prvom nas redu interesiraju *zrake kompleksa (TK) pridružene točki $M \in k^6$* . Pokazuje se da sve takve zrake, određene nizom (F^2) skupa (MF^2), čine singularni linearni kompleks s ravnalicom m . Pri tome zrake određene jednim pramenom (F^2) leže u jednoj ravnini pramena [m].

Točkama pravca m pridružene zrake kompleksa (TK) promatrat ćemo na dva načina.

Bilo kojoj točki $T \in m$ pridružena je s obzirom na stožac M^2 polarna ravnina iz pramena [m_k]. Ona je nosilac pramena (M) zraka kompleksa (TK) pridruženih točki T i određenih svakim od pramenova (F^2) skupa (MF^2). Uzmemo li u obzir sve točke pravca m , dobili smo snop $\{M\}$ zraka kompleksa (TK), pri čemu uvijek znamo kojoj točki $T \in m$ je pridružena dotična zraka.

Točkama pravca m pridružene zrake kompleksa (TK), određene *jednim* pramenom (F^2) skupa (MF^2), izvodnice su stošca 2. stupnja s vrhom u točki M . Tri izvodnice tog stošca su trisekante $m_n \in k^6 \wedge M_n \in m$ ($n = 1, 2, 3$). Na stošcu leži još jedna istaknuta izvodnica, i to pravac m_k , što slijedi neposredno iz prethodnog stavka. Promjenom pramena (F^2) skupa (MF^2) mijenja se i stožac 2. stupnja zraka kompleksa (TK) s vrhom u točki M , ali četiri spomenute izvodnice ostaju na njemu nepromijenjene. Odavde odmah slijedi da točkama pravca m pridružene zrake kompleksa (TK), određene nizom pramenova (F^2) skupa (MF^2), čine izvodnice jednog pramena stožaca (M^2) 2. stupnja sa zajedničkim vrhom u točki M . Temeljna krivulja 4. reda tog pramena raspada se u pravce m_n ($n = 1, 2, 3$) i pravac m_k . Dok su zrake m_n pridružene točkama $M_n \in m$ ($n = 1, 2, 3$) i određene *svakim* od pramenova (F^2) skupa (MF^2), zraka m_k je pridružena *svakoj* od točaka pravca m , i to svaki puta *drugim* pramenom (F^2).

Bilo koji pravac r vrha M je prema tome zraka kompleksa (TK) pridružena točno određenoj točki $T \in m$ i određena točno određenim pramenom (F^2) skupa (MF^2).

Poznato je međutim da je bilo koji pravac koji sadrži jedan vrh autopolarnog tetraedra ujedno i zraka kompleksa (TK) pridružena jednoj točki tom vrhu nasuprotne ravnine tetraedra. Kako je točka M zajednički vrh ∞^1 autopolarnih tetraedara skupa (MF^2), to je i pravac r ∞^1 -značna zraka kompleksa (TK) određena tim skupom, ali jednoznačna s obzirom na jedan pramen (F^2) skupa (MF^2). Pokazuje se da je skup točaka kojima je pridružena zraka r kao ∞^1 -značna zraka kompleksa (TK), neka konika r^2 koja leži u zajedničkoj polarnoj ravnini pridruženoj točkama pravca r s obzirom na stožac M^2 i siječe pravac m u točki T . Konika r^2 sadrži 5 točaka krivulje k^6 koje je u potpunosti određuju.

Točkama pravca r konjugirane točke s obzirom na svežanj (F^2 određuju krivulju 3. reda koja se raspada u koniku r^2 i pravac m .

Točkama pravca m_k konjugirane točke s obzirom na plohe svežnja (F^2 čine krivulju 3. reda, koja se raspada u neki pravac k ravnine (M, m) i u dvostruki pravac m . Pri tome je svaka točka pravca m konjugirana točki M , ali je ujedno i »sjecište« incidentnih zraka kompleksa (TK) pridruženih točki M i određenih pramenovima (F^2) skupa (MF^2). Bilo kojoj točki T_k pravca m_k pridružene zrake kompleksa (TK), određene nizom (F^2) skupa (MF^2) čine pramen zraka u ravnini (M, m), s vrhom u onoj točki $T \in k$ koja je konjugirana točki T_k s obzirom na svežanj (F^2).

Točkama pravca m_k pridružene zrake kompleksa (TK), određene jednim od pramenova (F^2) skupa (MF^2), određuju pramen zraka u ravnini (M, m) s vrhom na pravcu m i još jedan pramen istog vrha pridružen točki $M \in m_k$ u onoj ravnini autopolarnog tetraedra tog pramena (F^2) koja je nasuprotna vrhu M . Nizom pramenova (F^2) skupa (MF^2) određene zrake kompleksa (TK), koje su pridružene točkama pravca m_k , čine pramenove u ravnini (M, m) kojima vrhovi čine niz (m), dok samoj točki $M \in m_k$ pridružene zrake kompleksa (TK) čine po jedan pramen u svakoj od ravnina pramena [m], pri čemu se točka M smatra u prvom redu točkom pravca m_k .

Bilo koji pravac s ($s \equiv m \wedge s \equiv k$) ravnine (M, m) zraka je kompleksa (TK). Njzino sjecište s pravcem k određuje kojoj točki pravca m_k je pridružena, a sjecište s pravcem m pokazuje kojim od pramenova (F^2) skupa (MF^2) je ona određena.

Nadalje se pokazuje da zrake kompleksa (TK) pridružene nekoj točki C ravnine (M, m) čine pramen zraka (C_k) u ravnini (C_k, m_k), pri čemu su točke C i C_k konjugirane s obzirom na svežanj (F^2). Bilo koja zraka pramena (C_k) određena je točno jednim pramenom (F^2) skupa (MF^2). Uzmemo li u obzir sve točke ravnine (M, m), osim same točke M , tada njima na opisani način pridružene zrake kompleksa (TK), određene nizom pramenova (F^2) skupa (MF^2), čine singularni linearni kompleks s ravnalicom m_k . Kod toga je bilo koji pravac c koji siječe pravac m_k takva dvostruka zraka kompleksa (TK) koja je pridružena dvjema različitim točkama ravnine (M, m) i određena različitim pramenovima iz skupa (MF^2). Po četiri takva pravca c određena s ista dva pramena (F^2) iz skupa (MF^2) sijeku se u istoj točki pravca m_k .

KOMPLEKS (MK)

Majcenov kompleks ili kompleks (MK), određen jednim pramenom (F^2), skup je takvih pravaca koji po jednu plohu pramena $|F^2|$ diraju beskonačno daleko.

Drugo od dvaju dirališta svake zrake kompleksa (MK) s nekom plohom pramena $|F^2|$ središnja je točka te zrake. Bilo kojoj točki kao središnjoj pridružena je s obzirom na dani pramen (F^2) jedna zraka kompleksa (MK). Zraka kompleksa (TK) i zraka kompleksa (MK), koje su pridružene istoj točki prostora, međusobno su usporedne.

U radu su istraživane one zrake kompleksa (MK), određene pramenovima skupa (MF^2), koje su na određeni način pridružene točki $M \in k^6$ te pravcima m i m_k .

Pokazuje se da zrake kompleksa (MK) određene nizom pramenova (F^2) skupa (MF^2) koje *sadrže točku* $M \in k^6$ čine:

a) stožac 2. stupnja ∞^1 -zračnih zraka kojemu se izvodnice podudaraju s izvodnicama stošca M^2 svežnja (F^2 ; središnje točke tih zraka određene po jednim pramenom (F^2) čine na tom stošcu krivulju 4. reda, a sve one prekrivaju stožac M^2 i

b) snop $\{M\}$ takvih zraka koje u točki M imaju središnju točku, pri čemu zrake određene istim pramenom (F^2) čine pramen (M) u po jednoj ravnini usporednoj s pravcem m .

Zrake kompleksa (MK) određene jednim pramenom (F^2) skupa (MF^2), kojima se *središnje točke* nalaze na pravcu m izvodnice su neke plohe 3. stupnja. Te su izvodnice spojnice bijektivno pridruženih točaka pravca m i točaka one beskonačno daleke krivulje 2. reda u kojoj beskonačno daleka ravnina siječe pramenom (F^2) određeni stožac pramena (M^2). Nizom pramenova (F^2) skupa (MF^2) određene zrake kompleksa (MK) kojima se središnje točke nalaze na pravcu m , čine skup od ∞^1 ploha 3. stupnja. Jednostruka ravnalica svake od tih ploha je pravac m , dok su im zajedničke izvodnice spojnice točaka $M_n \in m$ ($n = 1, 2, 3$) s beskonačno dalekim točkama pravaca m_n ($n = 1, 2, 3$). Sve takve zrake kompleksa (MK) kojima se središnje točke nalaze na pravcu m , određuju kongruenciju 2. reda i 1. razreda.

Zrake kompleksa (MK) određene jednim pramenom (F^2) skupa (MF^2), kojima se *središnje točke* nalaze na pravcu m_k , izvodnice su jednog regulusa hiperboličkog paraboloida s ravnalicama m_k i n , pri čemu je pravac n beskonačno daleki pravac ravnine (M, m). Nizom pramenova (F^2) skupa (MF^2) određene zrake kompleksa (MK), kojima se središnje točke nalaze na pravcu m_k , čine po jedan regulus pramena hiperboličkih paraboloida, kojima se temeljna krivulja raspada u četiri izvodnice, od kojih dvije, i to m_k i n , pripadaju drugom regulusu.

Sve zrake kompleksa (MK) kojima se središnje točke nalaze duž pravca m_k čine kongruenciju 2. reda i 1. razreda, koja se raspada u kongruenciju (1., 0.), tj. snop zraka $\{M\}$, i kongruenciju (1., 1.), koju čine izvodnice hiperboličkih paraboloida.

Dalja istraživanja u skupu (MF^2) odnosit će se na Ničeov orijentirani kompleks i bit će prikazana u II dijelu rada.

Primljeno u II razredu
28. 4. 1982.