JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI
I UMJETNOSTI

VLASTA ŠČURIĆ-ČUDOVAN

DAS (F_k^2) FLÄCHENBÜSCHEL UND EINE MÖGLICHKEIT DES EINTAUCHENS DES (MK) IN DEN (VN) KOMPLEX

PRAMEN PLOHA (F_k^2) I JEDNA MOGUĆNOST URANJANJA (MK) U (VN) KOMPLEKS

ZAGREB

1977

Vlasta Ščurić-Čudovan

DAS $/F_k^2/$ FLÄCHENBÜSCHEL UND EINE MÖGLICHKEIT DES EINTAUCHENS DES (MK) IN DEN (VN) KOMPLEX

1. DAS FLÄCHENBÜSCHEL $/F_k^2/$

In einem projektiven Raum P^3, der auf dem Modell des durch die Fernebene ergänzten euklidischen Raumes E^3 gebaut wird, ist ein solcher Flächenbüschel $/F_k^2/$ 2. Grades gegeben, das genau eine Kugel als die einzige Rotationsfläche enthält. Die reelle Grundkurve k^4 4. Grades dieses Büschels ist als die Durchstosskurve der Kugel mit irgendeiner Fläche dieses Büschels erhalten. Da jede Fläche des Büschels $/F_k^2/$ ihren Polarraum bestimmt, ist durch diesen Flächenbüschel auch sein Polarraumbüschel (F_k^2) gegeben.

Uns interresieren in erster Reihe die Unterschiede zwischen das Flächenbüschel $/F_k^2/$ und eines allgemeinen Flächenbüschels $/F^2/$, das weder eine Kugel noch mehr als zwei Rotationsflächen enthält.

Die wichtigsten Unterschiede sind in der Fernebene zu bemerken. Wie bekannt, schneidet die Fernebene das Flächenbüschel $/F^2/$ in einem Kurvenbüschel f^2 2. Grades, und die Kugel im absoluten Kegelschnitt, während das Flächenbüschel $/F_k^2/$ durch die Fernebene in einem solchen Fernkurvenbüschel f_k^2 2. Grades geschnitten wird, das auch den absoluten Kegelschnitt enthält. Daraus folgt, dass auch die vier Grundpunkte N_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ des Kurvenbüschels f_k^2 auf dem absoluten Kegelschnitte liegen und je zwei von deren konjugiertimaginär sind. Die reellen Verbindungsgeraden $N_1 N_2$ und $N_3 N_4$ dieser konjugiertimaginären Punkte sind die Fernerzeugenden des einzigen hyperbolischen Paraboloides des Büschels $/F_k^2/$, und der reelle Mittelpunkt Y dieser Fläche liegt im Schnittpunkt dieser Erzeugenden. Die übrigen zwei Flächen des $/F_k^2/$ Büschels mit den Fernmittelpunkten U und V sind die Paraboloide und ihre imaginären Ferngeraden sind die konjugiertimaginären Geraden erster Art.

Es ist weiterhin bekannt, dass man eine Fläche 2. Grades die keine Rotationsfläche ist, mit zwei Parallelebenenbüscheln in Kreisen schneiden kann. Wenn es um ein Flächenbüschel $/F^2/$ geht, sind die Richtungslagen dieser Parallelebenen für jede Fläche dieses Büschels verschieden.

Jede Ebene des Ebenenbüschels $[N_1 N_2]$ bzw. $[N_3 N_4]$ schneidet indessen das Flächenbüschel $/F_k^2/$ in einem Kreisbüschel, da jede Schnittkurve jeder der Flächen dieses Flächenbüschels die absoluten Punkte seiner Ebene enthält. [4]. Die Ebenen des Büschels $[N_1 N_2]$ bzw. $[N_3 N_4]$ sind als Berührebenen des hyperbolischen Paraboloides mit den Berührpunkten längs seiner Fernerzeugenden $N_1 N_2$ bzw. $N_3 N_4$ aufzufassen, da wie bekannt, die Reihe der Berührpunkte und das Büschel der Berührebenen projektiv sind. (Berührkorrelation).

Eine beliebige Ebene z. B. des Büscles $[N_1 N_2]$ schneidet also das Flächenbüschel $/F_k^2/$ in einem Kreisbüschel und alle Mittelpunkte dieser Kreise liegen längs einer Geraden r die senkrecht auf jene Erzeugende i des hyperbolischen Paraboloides ist, die in der betreffenden Ebene liegt. Diese Ebene schneidet nämlich auch das hyperbolische Paraboloid des $/F_k^2/$ Büschels in einem Kreis, der in die erwähnte Erzeugende i und in die Fernerzeugende $N_1 N_2$ zerfällt. Da die Geraden r und i senkrecht stehen, folgt, dass die Fernpunkte dieser Geraden konjugiert bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind.

Um die Gesamtheit der Mittelpunkte aller Schnittkreise in den Ebenen des Büschels $[N_1 N_2]$ zu bestimmen, muss man die Gesamtheit aller Geraden r in diesen Ebenen ordnen. Jede Gerade r enthält den Mittelpunkt jenes Schnittkreises, in dem die betreffende Ebene die Kugel schneidet. Da die Kugel mit untereinander parallelen Ebenen des Büschels $[N_1 N_2]$ in jenen Kreisen geschnitten wird, die die Mittelpunkte auf einer Geraden s haben, die senkrecht auf diese Ebenen steht, folgt, dass der Fernpunkt der Geraden s ein Pol der Polare $N_1 N_2$ bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist. Da weiterhin die Gerade s auch den Mittelpunkt der Kugel enthalten muss, ist die Lage dieser Geraden vollkommen bestimmt und jede der Ebenen des Büschels $[N_1 N_2]$ enthält je einen Punkt der Geraden s. Daraus folgt, dass die Geraden r die Verbindungsgeraden ein-eindeutig zugeordneten Punktereihen auf der Geraden s und $N_1 N_2$ sind, so dass ihr Erzeugniss ein Regulus des hyperbolischen Paraboloides H_1 ist, während die Geraden s und $N_1 N_2$ zum ergänzenden Regulus gehören.

Das Analoge kann man auch für das Parallelebenenschnittbüschel $[N_3 N_4]$ durchführen und damit ist ein neues hyperbolisches Paraboloid H_2 bestimmt.

Es ist ganz klar, dass die Flächenmittelpunktraumkurve k_c^3 3. Ordnung des Büschels $/F_k^2/$ auf beiden hyperbolischen Paraboloiden H_1 und H_2 liegt, so dass die Durchdringskurve 4. Ordnung dieser Flächen in die Kurve k_c^3 3. Ordnung, mit den Fernpunkten U, V und Y, und in noch eine Gerade zerfällt. Wo liegt nun diese Gerade?

Dem Fernpunkt Y des hyperbolischen Paraboloides aus dem $/F_k^2/$ Büschel, ist als dem Berührpunkt bezüglich dieses Paraboloides die Fernebene zugeordnet, die dem Ebenenbüschel $[N_1 N_2]$ als auch dem $[N_3 N_4]$ angehört. Da die Fernpunkte U, V und Y die Eckpunkte des Polardreieckes des Schnittkurvenbüschels f_k^2 sind und auf Grund der eben gezeigten Erzeugung der Geraden r, die die Gesamtheit der Mittelpunkte der Schnittkreise sind, folgt, dass die gemeinsame Erzeugende r der hyperbolischen Paraboloiden H_1 und H_2 die Fernverbindungsgerade UV der Scheitel-Mittelpunkte der zwei Paraboloiden des Büschels $/F_k^2/$ ist.

Satz 1.1. *Es bestehen zwei Richtungslagen der Ebenen die die Flächen eines Flächenbüsches $/F_k^2/$ in Kreisen schneiden. Die Mittelpunkte aller solchen Kreisschnitte mit den Ebenen eines Ebenenbüschels, das durch eine Fernerzeugende des einzigen hyperbolischen Paräboloides des Flächenbüschels $/F_k^2/$ bestimmt ist, bilden ein Erzeugendensystem des neuen hyperbolischen Paraboloides dem die erwähnte Erzeugende als die Fernerzeugende dem anderen System angehört.*

Unter den Flächenbüscheln $/F^2/$ und $/F_k^2/$ bzw. unter ihren Polarräumen (F^2) und (F_k^2) kann man noch weitere Unterschiede beobachten. Das Flächenbüschel $/F^2/$ wird mit der Fernebene in einem solchen Kurvenbüschel f^2 2. Grades geschnitten, das dem absoluten Kegelschnitt nich enthält. Daraus folgt, dass alle Kurven des Büschels f^2 zusammen mit dem absoluten Kegelschnitt ein Kurvennetz bilden und dass die Gesamtheit aller Eckpunkte der Polardreiecke dieses Netzes die bekannte Jacobische Kurve μ 3. Ordnung 1. Geschlechtes ist. Diese Definition der Kurve μ kann man auch so angeben: die Kurve μ ist eine Gesamtheit solcher Punkte der Fernebene, denen die konjugierten Punkte bezüglich des Kurvenbüschels f^2 und bezüglich des absoluten Kegelschnittes sich wieder auf dieser Kurve befinden.

In [1] und [2] sind verschiedene Eigenschaften dieser Kurve dargestellt, wie auch die grosse Rolle, die diese Kurve bei den Untersuchungen des sog. orientierten Ničeschen Strahlkomplexes darstellt, den das Flächenbüschel $/F^2/$ bestimmt.

Wenn es aber um das Flächenbüschel $/F_k^2/$ geht, so gehört der absolute Kegelschnitt dem Fernschnittkurvenbüschel f_k^2 und jeder Punkt der Fernebene hat die Eigenschaften, welche die Punkte der Kurve μ haben. Man kann sagen, dass die Kurve μ durch die Entartung 3. Ordnung in alle Punkte der Fernebene übergegangen ist.

Damit sind nicht alle Unterschiede angeführt, die dann auftreten, wenn man statt das Flächenbüschel $/F^2/$ das Flächenbüschel $/F_k^2/$ untersucht. Da in dieser Arbeit unsere grösste Aufmerksamheit auf jene Einwirkungen gerichtet ist, die die Kugel als ein Bestandteil eines Flächenbüschels 2. Grades auf jene Komplexe hat, die durch diesen Flächenbüschel bestimmt sind, so werden durch systematische Untersuchungen der Eigenschaften dieser Komplexen auch weitere Eigenschaften des Flächenbüschels $/F_k^2/$ untersucht werden.

2. DER MAJCENSCHE KOMPLEX

Durch ein Flächenbüschel $/F^2/$ 2. Grades sind vier Komplexe bestimmt u. zw. der bekannte Reyesche tetraedrale Strahlkomplex (oder kürzer (*TK*) Komplex), der Majcensche Komplex (kürzer (*MK*) Komplex) [5], [6], [3], der Normalenkomplex (kürzer (*NK*) Komplex) [9], und der orientierte Ničesche Komplex (kürzer (*VN*) Komplex) [7], [8], [1], [2].

Der Majcensche kubische Strahlkomplex wird durch jene Strahlen des Raumes gebildet, die die Flächen des Flächenbüschels $/F^2/$ 2. Grades in symetrischen involutorischen Punktreihen schneiden, bzw. er ist eine Gesamtheit solcher Geraden, deren einer der zwei Berührpunkte (die zweifachen Punkte der erwähnten involutorischen Punktreihen) mit den Flächen des Flächenbüschels $/F^2/$ sich unendlich fern befindet. Der zweite Berührpunkt jeden solchen Strahles ist als sein Mittelpunkt gennant, da er der gemeinsame Mittelpunkt aller Strecken ist, die auf dem betreffenden (*MK*) Komplexstrahl von allen Flächen des Flächenbüschels $/F^2/$ ausgeschnitten wird.

Von der Anzahl der bekannten Eigenschaften des (*MK*) Komplexes, der durch das Flächenbüschel $/F^2/$ bestimmt ist, erwähnen wir nur diejenigen, die auch für die weiteren Untersuchungen, wie den (*MK*) — so auch den (*VN*) Komplex interessant sind, die aber das Flächenbüschel $/F_k{}^2/$ ordnet.

2\. 1. Der (*MK*) Komplex ist 3. Grades.

2\. 2. Ein beliebiger Raumpunkt ist der Mittelpunkt eines Strahles des (*MK*) Komplexes.

2\. 3. Je ein Strahl des (*TK*) — und des (*MK*) Komplexes wo der (*TK*) Komplexstrahl dem Mittelpunkt des (*MK*) Komplexstrahles zugeordnet ist., sind untereinander parallel.

2\. 4. Die einen beliebigen Raumpunkt enthaltenden (*MK*) Komplexstrahlen bilden einen Kegel 3. Grades und die Mittelpunkte dieser Strahlen bilden eine Kurve 4. Ordnung.

2\. 5. Die in einer Ebene liegenden (*MK*) Komplexstrahlen hüllen eine Kurve 3. Klasse ein und ihre Mittelpunkte bilden eine Kurve 2. Ordnung.

2\. 6. Die einen beliebigen Fernpunkt enthaltenden (*MK*) Komplexstrahlen sind büschelförmig und die Mittelpunkte dieser Strahlen befinden sich längs des (*TK*) Komplexstrahles, der diesem Punkt zugeordnet ist.

2\. 7. Den Punkten der beliebigen Ferngeraden q zugeordnete (*TK*) Komplexstrahlen sind die Bisekanten der Flächenmittelpunktraumkurve $k_c{}^3$ und bilden ein Rrzeugendensystem des einschaligen Hyperboloides, während das ergänzende System die Unisekanten dieser Kurve bilden, die auch die (*MK*) Komplexstrahlen sind.

2\. 8. Die Mittelpunkte jener (*MK*) Komplexstrahlen die parallel mit einer Ebene sind, bilden eine Regelfläche 2. Grades.

2\. 9. Jene (*MK*) Komplexstrahlen die den Mittelpunkt einer beliebigen Fläche des $/F^2/$ Büschels enthalten, bilden ein Strahlbüschel mit den Strahlmittelpunkten im Mittelpunkt der betreffenden Fläche und einen asymptotischen Kegel 2. Grades dieser Fläche, so dass die Strahlmittelpunkte eine Kurve 4. Ordnung bilden.

2. 10. Jene (MK) Komplexstrahlen die den Scheitel-Mittelpunkt der Singulärfläche des $/F^2/$ Büschels enthalten, bilden ein Strahlbüschel in der Ebene, die parallel mit der, die übrigen drei Scheitel-Mittelpunkte der betreffenden Singulärflache liegen, während die Erzeugenden des Kegels 2. Grades der (MK) Komplexstrahlen mit den Erzeugenden des Kegels des $/F^2/$ Büschels übereinstimmen; die Strahlmittelpunkte bilden eine Kurve 4. Ordnung und halbieren die Strecke, welche auf diesen Erzeugenden von der Grundkurve k^4 4. Ordnung des $/F^2/$ Büschels ausgeschnitten werden.

2. 11. Jede Erzeugende jeder in $/F^2/$ Büschel enthaltenden Regelfläche ist ein (MK) Komplexstrahl mit dem Mittelpunkt in der Hälfte der Strecke, die auf dieser Erzeugenden von der Grundkurve k^4 ausgeschnitten wird.

2. 12. Jene (MK) Komplexstrahlen die die Mittelpunkte in den Punkten der Flächenmittelpunktkurve k_c^3 haben, bilden eine Kongruenz 5. Ordnung und 3. Klasse.

2. 13. Die (MK) Komplexstrahlen, deren Mittelpunkte auf einer Unisekante der Kurve k_c^3 liegen, bilden ein hyperbolisches Paraboloid.

2. 14. Jene (MK) Komplexstrahlen deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, die kein (MK) Komplexstrahl ist, bilden eine Regelfläche 3. Grades.

2. 15. Eine Singulärebene β des (MK) Komplexes ist mit einem beliebigen Fernpunkt T und mit dem ihm zugeordneten Strahl t des (TK) Komplexes (Bisekante der Kurve k_c^3) bestimmt. Die Kurve 3. Ordnung der (MK) Komplexstrahlen in einer Ebene β zerfällt in ein Büschel paralleler Strahlen mit dem Scheitelpunkt T und den Mittelpunkten längs des Strahles t, und in eine solche Parabel, der die Strahlmittelpunkte längs jener Geraden liegen, die mit dem Punkt T und dem übrigen dritten Durchstosspunkt der betreffenden Ebene β mit der Kurve k_c^3 bestimmt ist.

2. 16. Ein (MK) Komplexstrahl ist genau dann ein Fernstrahl, wenn sein Mittelpunkt ein Fernpunkt ist.

2. 17. Jede Ferngerade ist ein zweifacher Strahl des (MK) Komplex.

Da »senkrecht sein« keine Rolle beim (MK) Komplex spielt, so ergibt auch die Anwesenheit der Kugel im $/F_k^2/$ Büschel keine wesentlich neuen Eigenschaften dem (MK) Komplex von denen, die eben dargestellt sind. Die Wichtigkeit solcher Eigenschaften des (MK) Komplexes, der durch das Flächenbüschel $/F_k^2/$ bestimmt ist, wird sich bei den Untersuchungen des neuen (VN) Komplexes erweisen, der mit demselben Flächenbüschel $/F_k^2/$ bestimmt wird.

3. DER ORIENTIERTE NIČESCHE KOMPLEX ODER (VN) KOMPLEX

A DEFINITION UND GRUNDEIGENSCHAFTEN DES (VN) KOMPLEXES

Es sei ein derartiger Flächenbüschel $/F_k^2/$ 2. Grades gegeben, der auch eine Kugel enthält. Einem beliebigen Raumpunkt T ist ein Strahl t des bekannten (TK) Komplexes zugeordnet und diese ein-eindeutige Abbildung sei als eine φ-Abbildung gennant, die mit

$$t = \varphi(T)$$

bezeichnet wird. Die Senkrechte die aus dem Punkt T auf den Strahl t gelegt wird, ist ein Strahl o des orientierten Ničeschen Komplexes, den wir fernerhin als (VN) Komplex bezeichnen werden und die beschriebene Abbildung wird mit

$$o = \psi(T)$$

notiert, genau so, wie es in [1] und [2] für den, durch das $[F^2]$ Flächenbüschel bestimmten, (VN) Komplex getan wird.

Der Punkt T sei als ein I Punkt des Strahles o, und der Schnittpunkt der Strahlen t und o sei als Z Punkt dessselben Strahles o genannt. Obwohl die Punkte $I \in o$ und $Z \in o$ die Berührpunkte des Strahles o an zwei Flächen des $/F_k^2/$ Büschels sind, sind sie auf dem Strahl o nicht gleichwertig, wie es in [1] gezeigt wird. Sie bestimmen deshalb die Orientation eines jeden Strahles o des (VN) Komplexes.

Es interessiert uns besonders, ob und welche Unterschiede überhaupt mit dem (VN) Komplex geschehen, wenn er statt durch das $/F^2/$ Büschel, durch solchartigen Flächenbüschel 2. Grades bestimmt wird, das auch eine Kugel enthält, also wenn es um ein Flächenbüschel $/F_k^2/$ geht. Es ist schon gezeigt, dass in diesem Fall die Eigenschaften der unendlich fernen Jacobischen Kurve μ 3. Ordnung jeder Punkt der Fernebene übernimmt.

Einem beliebigen Fernpunkt M ist der zugeordnete Strahl

$$t_M = \varphi(M)$$

die Schnittgerade der Polarebenen des Punktes M bezüglich aller Flächen des $/F_k^2/$ Büschels, so dass Punkt M konjugiert dem Fernpunkt des Strahles t_M auch bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist. Es folgt weiterhin, dass jede, dem Punkt M enthaltende Gerade senkrecht auf dem Strahl t_M steht, bzw. dass jede Verbindungsgerade des Punktes M mit irgendeinem Punkt der Geraden t_M ein Strahl des (VN) Komplexes ist. Wie bekannt haben nur die Punkte der Jacobischen Fernkurve μ im Fall des $/F^2/$ Büschels gleichartige Eigenschaften gehabt.

Satz A 1. *Im (F_k^2) Polarraumbüschel ist irgendein Fernpunkt der Scheitelpunkt eines Büschels parallelliegender (VN) Komplexstrahlen, die in dem erwähnten Scheitelpunkt den gemeinsamen I Punkt* *haben, während die Z Punkte dieser Strahlen längs diesem Scheitelpunkt zugeordnetes (TK) Komplexstrahles liegen.*

Es wird indessen in [6] und [3] gezeigt, dass irgendein Fernpunkt auch ein Scheitelpunkt eines Büschels der parallelliegenden *(MK)* Komplexstrahlen ist, deren Mittelpunkte sich längs jenes *(TK)* Komplexstrahles befinden, der diesem Scheitelpunkt zugeordnet ist /2.6/, und dass jeder *(MK)* Komplexstrahl der Strahl eines solchen Büschels ist.

Auf Grund dieser Feststellungen folgt:

Satz A 2. *Jeder (MK) Komplexstrahl der durch das* $/F_k^2/$ *Flächenbüschel bestimmt wird, ist auch ein (VN) Komplexstrahl, dem sein Fernpunkt der I Punkt ist, während der Z Punkt des (VN) Komplexstrahles mit dem Mittelpunkt des (MK) Komplexstrahles übereinstimmt.*

Definition 1. *Raumgeraden die im Polarraumbüschel* $/F_k^2/$ *die (MK) — und auch die (VN) Komplexstrahlen sind, so dass die Mittelpunkte der (MK) Komplexstrahlen mit den Z Punkten der (VN) Komplexstrahlen übereinstimmen, sind die Strahlen des vereinigten (MK—VN) Komplexes.*

Da weiterhin der *(VN)* Komplex 8. Grades [8] und der *(MK)* Komplex 3. Grades [5] ist, folgt:

Satz A 3. *Der durch das Flächenbüschel* $/F_k^2/$ *bestimmte (VN) Komplex 8. Grades zerfällt in einen Komplex 5. Grades der »reinen« (VN) Komplexstrahlen und in einen Komplex 3. Grades der Strahlen des vereinigten (MK—VN) Komplexes.*

Der ganze *(MK)* Komplex wird demnach in einen Teil des *(VN)* Komplexes eingetaucht.

Die in den *Sätzen A 2.* und *A 3.* ausgesagten Tatsachen weisen auf ganz ungewöhnliche Eigenschaften hin, da in allgemeinem, zwei verschiedene und auf verschiedene Weisen definierten Komplexe sonst nur eine gemeinsame Kongruenz haben.

Beobachten wir nun, wie sich dieses Eintauchen auf jene Gesamtheiten reflektieren wird, die von den *(VN)* Komplexstrahelen des (F_k^2) Polarraumbüschels und ihnen zugeordneten *I* und *Z* Punkte gebildet werden.

a) *Die durch das* $/F_k^2/$ *Flächenbüschel bestimmten (VN) Komplexstrahlen deren I Punkte sich auf einer Endlichen- oder Ferngeraden befinden*

Nehmen wir eine beliebige endliche Gerade *s* als eine Gesamtheit der *I* Punkte der *(VN)* Komplexstrahlen an, die vorläufig durch das Flächenbüchel $/F^2/$ bestimmt wird. Die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in s$$

bilden einen Regulus des einschaligen Hyperboloides H_s, und die Ebenen, die mit den Punkten der Geraden s und ihnen $(1-1)$-deutig zugeordneten Erzeugenden der Flche H_s bestimmt sind, hüllen auf Grund des bekannten Chasleses Korrespondenzprinzipes eine Hüllfläche (Torse) τ_1 3. Klasse ein. Den Fernpunkten der Erzeugenden des Hyperboloides H_s zugeordnete Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden eine Kurve p^2 2. Klasse und die, mit den Punkten der Geraden s und ihnen zugeordneten Polaren der Kurve p^2 bestimmten Ebenen, hüllen eine neue Hülltorse τ_2 3. Klasse ein. Je zwei zugeordneten Ebenen der Torsen τ_1 und τ_2 schneiden sich in Erzeugenden einer Fläche 6. Grades, welche die (VN) Komplexstrahlen bilden, während die Z Punkte dieser Strahlen eine Kurve z^5 5. Ordnung bilden, die durch die Durchstosspunkte der Erzeugenden der Fläche H_s mit ihnen $(1-1)$-deutig zugeordneten Ebenen der Torse τ_2 gebildet wird. [7], [1].

Im Fall des Flächenbüschels $/F_k^2/$ finden einige Änderungen statt, deren Folgeerscheinung das Zerfallen der erwänten Fläche 6. Grades und der Kurve z^5 5. Ordnung ist.

Auf die gleiche Weise, wie wir es bei dem Flächenbüschel $/F^2/$ getan haben, wird es auch im Fall des Flächenbüschels $/F_k^2/$ die erhaltene Hülltorse τ_1 3. Klasse sein. Die Änderungen entstehen bei der Torse τ_2, was aus den Folgenden ersichtlich ist. Der Punkt R sei ein beliebiger endliche Punkt der erwähnten Geraden s und der Strahl $t = \varphi(R)$ ist eine Erzeugende der Fläche H_s. Die dem Fernpunkt R_n dieser Erzeugenden zugeordnete Polare bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist die Ferngerade der Polarebene des Punktes R_n bezüglich der Kugel. Diese Ebene muss den Mittelpunkt der Kugel enthalten, da der Punkt R_n ein Fernpunkt ist und wegen der Polarverhältnisse muss er auch den Punkt R der Geraden s enthalten. Da der Punkt R ein Kurrentpunkt der Geraden s ist, gelten auch diese Folgerungen allgemein. Es folgt, dass jede der Ebenen der Hülltorse τ_2 mit je einer der Polaren der Kurve p^2, die auf die beschriebene Weise ausgeführt ist, und dieser Polaren $(1-1)$-deutig zugeordnetem Punkt der Geraden s aufgespannt ist. Da jede solche Ebene auch den Mittelpunkt der Kugel enthält, zerfällt die kubische Hülltorse τ_2 in eine Hülltorse 2. Klasse, d. h. in einen Kegel 2. Grades mit dem Scheitelpunkt im Mittelpunkt der Kugel und einen Rest, der nachträglich bestimmt wird.

Die (VN) Komplexstrahlen, deren I Punkte längs der Geraden s liegen, sind ein Erzeugnis der $(1-1)$-deutig zugeordneten Ebenen der Torse τ_1 3. Klasse und der Torse τ_2 2. Klasse, und auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzipes eine Fläche 5. Grades bilden. Die Erzeugenden der Fläche H_s (die (TK) Komplexstrahlen) durchdringen die ein-eindeutig zugeordneten Ebenen der Torse τ_2 in einer Z-Punktraumkurve 4. Ordnung. Es ist, wie wir auch erwartet haben, bis zum Zerfall gekommen, wie der (VN) Komplexstrahlfläche 6. Grades, so auch ihrer Z-Punktkurve 5. Ordnung.

Den Rest d. h. die Ergänzung bis zu der Torse τ_2 3. Klasse, dann bis zu der Fläche 6. Grades der (VN) Komplexstrahlen und ihrer Z--Punktkurve 5. Ordnung kann man so finden:

Dem Fernpunkt S_n der Geraden s ist die Erzeugende

$$t_s = \varphi(S_n)$$

der Fläche H_s zugeordnet. Die dem Fernpunkt dieser Erzeugenden zugeordnete Polare p_s bezüglich des absoluten Kegelschnittes muss den Punkt S_n enthalten, da auch der absolute Kegelschnitt ein Bestandteil des Fernschnittkurvenbüschels f_k^2 ist.

Vergleicht man das eben Gesagte bzgl. des Punktes S_n und der Geraden p_s mit den Untersuchungen, die in [1] ausgeführt wurden, kann man feststellen, dass damit die charakteristische Eigenschaft der Punkte der Jacobischen Kurve μ ausgesagt wird, die im Fall des $/F_k^2/$ Büschels jeder Punkt der Fernebene übernimmt. Die mit dem Punkt S_n und der Geraden p_s bestimmten Ebenen bilden deswegen ein Büschel $[s_n]$ der parallelen Ebenen, von deren eine den Kugelmittelpunkt enthält und die auch eine Ebene jenes Teiles der Torse τ_2 wird, die 2. Klasse ist. Das Ebenenbüschel $[p_s]$ ergänzt die Torse τ_2 bis 3. Klasse und schneidet die Ebene (S_n, t_s) der Torse τ_1 in einem Büschel (S_n) der parallelliegenden (VN) Komplexstrahlen. Die Z Punkte dieser Strahlen befinden sich in den Durchstosspunkten des Strahles t_s mit den Ebenen des Büschels $[p_s]$. Auf Grund des bisher Gesagten kann man feststellen, dass diese parallelen (VN) Komplexstrahlen die Strahlen des vereinigten $(MK-VN)$ Komplexes sind.

Satz A 4. *Jene (VN) Komplexstrahlen des* (F_k^2) *Polarraumbüschels, die die I Punkte auf einer beliebigen endlichen Geraden haben, bilden eine solche Fläche 6. Grades, die in eine Fläche 5. Grades der (VN) Komplexstrahlen und in ein Büschel paralleler Strahlen des (MK—VN) Komplexes zerfällt, während die Z-Punktkurve 5. Ordnung dieser Strahlen eine Raumkurve 4. Ordnung und eine Gerade darstellen.*

Es folgt weiterhin:

Satz A 5. *Für die Z-Puntkurve* z^4 *4. Ordnung jener (VN) Komplexstrahlen, die durch das Flächenbüschel* $/F_k^2/$ *bestimmt sind, und die die I Punkte auf einer beliebigen endlichen Geraden s haben und die keine (MK—VN) Komplexstrahlen sind, ist jede Erzeugende eines Regulus des Hyperboloides* H_s*, als ein, dem Punkt der Geraden s zugeordneter (TK) Komplexstrahl, eine Unisekante dieser Kurve* z^4*, während jede Erzeugende des ergänzenden Regulus die Trisekante dieser Kurve ist und der Geraden s konjugierte Polare bezüglich jedes Polarraumes jede der Flächen des* $/F_k^2/$ *Büschels ist.*

Vergleichen wir den *Satz A 5* mit den Untersuchungen, die in [1] für den gleichen Fall des $/F^2/$ Büschels durchgeführt wurden, kann man sehen, dass jede Erzeugende des zweiten Systems der Fläche H_s die Quadrisekante der Z-Punktkurve jener (VN) Komplexstrahlen ist, die die I Punkte längs beliebigen endlichen Geraden haben.

Die grundlegende Veränderung bezüglich des Flächenbüschels $/F^2/$ entsteht dann, wenn eine beliebige F e r n g e r a d e q eine Gesamtheit der I Punkte der, durch $/F_k^2/$ Flächenbüschel bestimmten (VN) Komplexstrahlen ist. Die Strahlen

$$t = \varphi(T) \text{ für jeden } T \in q$$

bilden einen Regulus des Hyperboloides H_q, wo, wie bekannt, jeder Strahl t eine Gesamtheit der Z Punkte jenes Büschels der parallelliegenden (VN) Komplexstrahlen ist, die im Punkt

$$T = \varphi^{-1}(t)$$

seinen I Punkt haben. Die Strahlen

$$o = \psi(T) \text{ für jeden } T \in q$$

sind Strahlen des vereinigten $(MK-VN)$ Komplexes und ihr Erzeugnis ist keine Fläche 6. Grades sondern eine K o n g r u e n z.

Die O r d n u n g der Kongruenz wird auf folgende Weise bestimmt. Die Ebenen die mit den Punkten der Geraden q und ihnen ein-eindeutig zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bestimmt sind, die die Erzeugenden des Hyperboloides H_q sind, bilden eine kubische Hülltorse, wie es auf Grund des Chasleses Korrespondenzprinzips folgt. Einen beliebigen Raumpunkt enthalten deshalb drei diese Ebenen, woraus folgt, dass jeden Punkt drei $(MK-VN)$ Komplexstrahlen enthalten, bzw. dass die Ordnung der gegebenen Kongruenz gleich drei ist.

D i e K l a s s e der Kongruenz. Eine beliebige Ebene schneidet die Gerade q in einem Punkt Q, und den Strahl

$$t_q = \varphi(Q),$$

der die Erzeugende der Fläche H_q ist in einem Punkt, der genau der Z Punkt jenes $(MK-VN)$ Komplexstrahles ist, für den

$$o = \psi(Q) \text{ gilt,}$$

d. h. für den der Punkt Q ein I Punkt ist. Es folgt: die erwähnte Kongruenz ist erster Klasse.

Es ist noch zu bemerken, dass die Mittel- Z Punkte dieser $(MK-VN)$ Komplexstrahlen keine zerfallene Raumkurve 5. Ordnung, sondern eine Fläche H_q 2. Grades bilden.

Satz A 6. *Jene (VN) Komplexstrahlen des (F_k^2) Polarraumbüschels, welche die I Punkte auf einer beliebigen Ferngeraden haben, stimmen mit jenen (MK) Komplexstrahlen überein, die dieselben Fernpunkte haben. Diese $(MK-VN)$ Komplexstrahlen bilden eine Kongruenz 3. Ordnung und 1. Klasse. Die Mittelpunkte bzw. die Z Punkte solcher Strahlen bilden eine Regelfläche 2. Grades.*

Bemerkung. In [6] hat Niče gezeigt, dass jene (MK) Komplexstrahlen, die eine Gerade schneiden, eine Kongruenz 3. Ordnung und 3. Klasse bilden. Dies steht in keinem Gegensatz mit der Behauptung im *Satz A 6.*, weil uns nur jene *(MK—VN)* Komplexstrahlen interessieren, die die *I* Punkte auf der Ferngeraden *q* haben. Diese Strahlen bilden tatsächlich eine Kongruenz 1. Klasse, während die Ergänzung bis zur Klasse drei durch die Ferngerade der betreffenden Ebene gebildet wäre. Im [1], [7] bzw. [6] wird nämlich gezeigt, dass jede Ferngerade ein zweifacher *(VN)* bzw. *(MK)* Komplexstrahl ist und ein solcher ist auch die Ferngerade der betreffenden Ebene, die unumstritten die Gerade *q* schneidet, in diesem Schnittpunkt aber in allgemeinen keinen *I* Punkt hat.

b) Die (VN) Komplexstrahlen des (F_k^2) Polarraumbüschels die einem beliebigen Raumpunkt zugeordnet sind

Nach *Definition 5* in [1] ist ein *(VN)* Komplexstrahl einem Raumpunkt z u g e o r d n e t, wenn er in diesem Punkt seinen *I*- bzw. *Z* Punkt hat.

Einem beliebigen Raumpunkt *T* ist ein Strahl

$$t = \varphi(T)$$

zugeordnet und den *(VN)* Komplexstrahlen die die *I* bzw. *Z* Punkte im Punkt *T* haben, können die *Z* bzw. *I* Punkte nur auf der Geraden *t* liegen. Die Gerade *t* sei deshalb eine Gesamtheit der *I* Punkte der *(VN)* Komplexstrahlen.

Die *(TK)* Komplexstrahlen die den Punkten der Geraden *t* zugeordnet sind, bilden die Erzeugenden eines Kegels T^2 2. Grades des Scheitelpunktes *T*. Auf die gleiche Weise, wie wir es in [1] getan haben, kann man schliessen, dass auch in diesem Fall der Punkt *T* der *I* Punkt für einen und der *Z* Punkt für drei *(VN)* Komplexstrahlen ist, die die *I* Punkte auf der Geraden *t* haben, von deren einer seinen *I* Punkt im Fernpunkt des Strahles *t* hat.

Die Strahlen

$$o = \psi(T_n), \text{ wo } T_n \text{ der Fernpunkt des Strahles } t \text{ ist}$$

bilden nämlich ein Büschel paralleler *(VN)* Komplexstrahlen mit dem gemeinsamen *I* Punkt in T_n, während ihre *Z* Punkte längs des Strahles

$$t_n = \varphi(T_n)$$

liegen. Dieses Büschel stimmt mit dem Büschel (T_n) der parallelen *(MK)* Komplexstrahlen überein, die längs des Strahles t_n die Mittelpunkte haben. Da t_n eine Erzeugende des Kegels T^2 ist, die auch den Punkt *T* enthält, besteht auch ein gemeinsamer Strahl T_nT dieser zwei Komplexe, mit dem gemeinsamen Mittel- bzw. *Z* Punkt im *T* und dem *I* Punkt in T_n.

Satz A 7. *Von drei Strahlen des durch das /F_k^2/ Flächenbüschel bestimmten (VN) Komplexes, die in einem beliebigen Raumpunkt den gemeinsamen Z Punkt haben, gehört einer immer dem (MK—VN) Komplex an.*

Damit ist auch auf indirekte Weise bewiesen, dass jeder beliebige Raumpunkt der Mittelpunkt des einen (MK) Komplexstrahles ist, der mit dem $/F_k^2/$ Flächenbüschel bestimmt wird. (2.2).

c) *Die durch das $/F_k^2/$ Flächenbüschel bestimmten (VN) Komplexstrahlen, die die Z Punkte auf einer Endlichen- bzw. Ferngeraden haben*

Eine beliebige Raumgerade s sei eine Gesamtheit der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen. Wie in [1] kann man auch jetzt feststellen, dass die I Punkte solcher Strahlen nur auf dem Hyperboloid H_s liegen können, dessen einen Regulus die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in s$$

bilden und den ergänzenden, die konjugierte Polaren r der Geraden s bezüglich jede der Flächen des $/F_k^2/$ Büschels. Die Ordnung der I-Punktkurve dieser Strahlen ist durch irgendeine Schnittebene (t, r) zu bestimmen, die je eine Erzeugende eines jeden Regulus enthält.

Auf der ausgewählten Erzeugenden t befinden sich drei I Punkte, die den gemeinsamen zugeordneten Z Punkt auf der Geraden s haben. Eine dieser drei I Punkte liegt, wie bekannt, im Fernpunkt des Strahles t und gehört dem $(MK-VN)$ Komplexstrahl an. Nur zwei Strahlen des »reinen« (VN) Komplexes haben deshalb ihre I Punkte am Strahl t.

Ist die Erzeugenden r des ergänzenden Regulus als eine Gesamtheit der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen aufzufassen, folgt aus den Gründen, die in [1] durchgeführt sind, dass vier dieser Strahlen ihre Z Punkte auf der Geraden s haben. Es ist auch klar, dass im $/F_k^2/$ Flächenbüschel der Fernpunkt der Geraden r der I Punkt jenes (VN) Komplexstrahles ist, dem der Z Punkt auf der Geraden s liegt, dieser Strahl aber, zum $(MK-VN)$ Komplex angehört. Da das analog für jeden Fernpunkt jeder Erzeugenden des ergäzenden Regulus Geltung hat, bilden alle solche I Punkte die Fernkurve h^2 2. Ordnung des Hyperboloides H_s.

Die I-Punktkurve i^7 7. Ordnung jener (VN) Komplexstrahlen, die die Z Punkte auf einer beliebigen Raumgeraden haben und die im Fall des $/F^2/$ Flächenbüschels unzerfällt bleibt, zerfällt im Fall des $/F_k^2/$ Büschels in eine Raumkurve i^5 5. Ordnung und in die Fernkurve 2. Ordnung.

Es zerfällt auch die Fläche 10. Grades dieser (VN) Komplexstrahlen. Jedem Punkt der Kurve i^5 ist nämlich ein Punkt der Geraden s zugeordnet, aber jedem Punkt der Geraden s der als der Z Punkt zu betrachten sei, sind zwei Punkte der Kurve i^5 zugeordnet. Auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzipes folgt, dass das Erzeugnis dieser zwei Punktreihen eine Regelfläche 7. Grades ist, die die Gerade s als zweifache Leitgerade hat.

Den zweiten Teil dieser Fläche bilden die Strahlen des vereinigten $(MK-VN)$ Komplexes, die das Erzeugnis des ein-eindeutigen Zuordnung der Punkte der Fernkurve h^2 2. Ordnung und der Punkte der Geraden s ist. Der erhaltenen Regelfläche 3. Grades ist die Gerade s die einfache Leitgerade.

Satz A 8. *Jene, durch das* $/F_k^2/$ *Flächenbüschel bestimmten* (VN) *Komplexstrahlen, die die Z Punkte auf einer beliebigen Raumgeraden s haben, bilden eine Regelfläche 10. Grades, die zerfällt in die Regelfläche 7. Grades dieser Strahlen, deren I-Punktkurve 5. Ordnung ist und die Gerade s als eine zweifache Leitgerade hat und in eine Regelfläche 3. Grades der* $(MK-VN)$ *Komplexstrahlen die die I Punkte auf einer Fernkurve 2. Ordnung haben und der die Gerade s eine einfache Leitgerade ist.*

Es ist weiterhin zu behaupten:

Satz A 9. *Jene (TK) Komplexstrahlen die den Punkten der beliebigen Raumgeraden s zugeordnet sind und die den ersten Regulus des Hyperboloides* H_s *bilden, sind die Unisekanten jener I-Punktkurve* i^5 *5. Ordnung jener* (VN) *Komplexstrahlen, deren Z Punkte sich längs der Geraden s befinden, während jede Erzeugende des ergänzenden Regulus, dem die, der Geraden s konjugierte Polaren bezüglich jede der Flächen des* $/F_k^2/$ *Büschels bilden, die Trisekante dieser I-Punktkurve ist.*

Die aus [1] bekannte zerfällte Regelfläche jener (VN) Komplexstrahlen des (F^2) Polarraumbüschels, die die Z Punkte auf einer beliebigen Ferngeraden haben, wird im Fall des (F_k^2) Polarraumbüschels keine wesentlich neuen Eigenschaften erreichen.

d) Die Erzeugenden der Regelfächen des $/F_k^2/$ *Büschels*

Im [1] wurde gezeigt, dass jede Erzeugende jeder Regelfläche des $/F^2/$ Büschels ein zweifacher (VN) Komplexstrahl ist, der zwei verschiedene Paare der $I-Z$ Punkte enthält.

Es sei die Gerade d eine beliebige Erzeugende einer Regelfläche, die dem $/F_k^2]$ Büschel angehört. Die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in d$$

bilden einen Regulus des neuen Hyperboloides, dem die Erzeugende d dem ergänzenden Regulus gehört. Der Strahl

$$t_d = \varphi\,(T_d) \text{ wo } T_d \text{ der Fernpunkt der Geraden } d \text{ ist,}$$

liegt in den Polarebenen dieses Punktes bezüglich aller Flächen des $/F_k^2/$ Büschels, also auch bezüglich der Kugel und muss

$$d = \psi(T_d)$$

als ein (VN) Komplexstrahl in seinen Z Punkt schneiden. Aus diesem Grunde folgt, dass von je zwei verschiedenen Paaren der $I-Z$ Punkte auf der Erzeugenden d, die auf die übliche Weise erhalten sind, je einer derartig ist, dass sein I Punkt unendlich fern liegt.

Im /2. 10/ ist es erwähnt, dass jede Erzeugenden einer Regelfläche eines Büschels 2. Grades auch ein (MK) Komplexstrahl ist. Man erinnere sich, dass jeder Strahl

$$t_d = \varphi(T_d)$$

eine Gesamtheit der Z Punkte jener (VN) Komplexstrahlen ist, die den I Punkt im T_d haben (*Satz A 1.*) bzw. eine Gesamtheit der Mittelpunkte der (MK) Komplexstrahlen, deren der zweite Berührpunkt mit der Fläche dieses Flachenbüschels im Punkt T_d liegt. /2. 5./. Es folgt daraus, dass der Z Punkt der Erzeugenden d, die als ein (VN) Komplexstrahl mit dem I Punkt in der Fernebene betrachtet sei, stimmt mit dem Mittelpunkt dieser Erzeugenden überein, die auch ein (MK) Komplexstrahl ist, was weiterhin bedeutet, dass dieser Punkt jene Strecke halbiert, die auf der Erzeugenden d von der Grundkurve k^4 des Flächenbüschels $/F_k^2/$ ausgeschnitten wird.

Noch ein Paar der $I-Z$ Punkte auf der Erzeugenden d, als dem zweifachen (VN) Komplexstrahl, wird auf die übliche Weise, vie in [1] getan ist, durchgeführt.

Satz A 10. *Die Erzeugenden der Regelflächen des $/F_k^2/$ Büschels sind die zweifachen Strahlen des (VN) — und die einfachen Strahlen des (MK) Komplexes und bilden eine Kongruenz 2. Ordnung und 6. Klasse innerhalb des $(MK-VN)$ Komplexes.*

e) Die einen beliebigen Raumpunkt enthaltenden (VN) Komplexstrahlen des (F_k^2) Polarraumbüschels (die Ordnung des Komplexes)

Im *Satz A 3.* wird es behauptet, dass der (VN) Komplex 8. Grades, der durch das $/F_k^2/$ Büschel bestimmt ist, in einen (VN) Komplex 5. Grades und in $(MK-VN)$ Komplex 3. Grades zerfällt.

Wie bekannt, die Ordnung eines Komplexes ist der Ordnung jenes Kegels gleich, den einen beliebigen Raumpunkt enthaltenden Komplexstrahlen bilden. Auf Grund des *Satzes A 3* würde folgen, dass alle, einen beliebigen Raumpunkt T enthaltenden (VN) Komplexstrahlen einen Kegel 8. Grades bilden, der in einen Kegel 5. Grades der (VN) Komplexstrahlen und in einen Kegel der $(MK-VN)$ Komplexstrahlen zerfallen muss. Um dies auch zu beweisen, wird die in [1] /A 5 *a*)/ gegebene Idee gefolgt.

Die durch einen beliebigen Raumpunkt T hindurch gelegten Berührkegel bezüglich jede der Flächen des Flächenbüschels $/F_k^2/$, berühren diese Flächen in den Punkten einer Fläche Ω 3. Ordnung, die die Fernebene in einer Kurve ω 3. Ordnung schneidet. Der Strahl

$$t = \varphi(T)$$

ist der Träger eines Büschels der Polarebenen des Punktes T bezüglich jede der Flächen des $/F_k^2/$ Büschels und jede diese Ebene schneidet die

Fläche Ω ausser in der Geraden t in je noch einer Kurve c_n^2 2. Ordnung, die ganz auf einer Fläche des $/F_k^2/$ Büschels liegt. Es gnügt deshalb nur die Zahl jener (VN) Komplexstrahlen zu bestimmen, die den Punkt T enthalten und die die I Punkte auf eine der Schnittkurven c^2 2. Ordnung haben, um dieselben Folgerungen auf jede der Schnittkurven c_n^2 zu übertragen. Die Strahlen

$$t^x = \varphi(T^x) \quad \text{für jeden} \quad T^x \in c^2$$

liegen in den Berührebenen des Kegels (T, c^2) und sind die Erzeugenden einer Fläche P^4 4. Grades. Es bestehen nach [1] und [7] sechs den Punkt T enthaltenden Strahlen

$$o = \psi(T^x) \quad \text{wo} \quad T^x \in c^2 \quad \text{ist,}$$

die aber in allgemeinen in T keinen Z Punkt haben. Wie bekannt befinden sich auf dem Strahl t doch drei I Punkte dreier (VN) Komplexstrahlen, die im T den Z Punkt haben. Daraus folgt, dass die Ebene (t, c^2) die I-Punktkurve, den Punkt T enthaltenden (VN) Komplexstrahlen, in neun Punkten schneidet, bzw. dass die I-Punktkurve selbst die 9. Ordnung hat, der (VN) Komplex 8. Grades ist, während wird für die Z-Punktkurve gezeigt, dass sie die 11. Ordnung hat.

Damit einer dieser (VN) Komplexstrahlen ein Strahl des $(MK-VN)$ Kompleäes sein kann, muss ihm, als dem (VN) Komplexstrahl der zugeordnete I Punkt unendlich fern liegen. Die Ferngerade der Ebene (t, c^2) schneidet die Kurve c^2 in zwei Punkten T_i $(i = 1{,}2)$ und die Gerade t in einem Punkt. Diese drei Punkte sind die Schnittpunkte der erwähnten Geraden mit der Kurve ω. Da die Strahlen

$$t_i = \varphi(T_i) \quad i = 1{,}2$$

in den Berührebenen des Kegels (T, c^2), als auch in den Berührebenen jener Fläche des $/F_k^2/$ Büschels liegen, die die Kurve c^2 enthält und da die Strahlen

$$o = \psi(T_i) \quad i = 1{,}2$$

den Strahlbüschel (T_1) in der Ebene (T_i, t_i) $(i = 1{,}2)$ bilden, besteht sicher innerhalb jedes solchen Büschls (T_i) einer den Punkt T enthaltende (VN) Komplexstrahl. Solche Strahlen T_iT sind, wie bekannt, auch die $(MK-VN)$ Komplexstrahlen, während der dritte $(MK-VN)$ Komplexstrahl in der Ebene (t, c^2) die Verbindungsgerade des Fernpunktes des Strahles t mit dem Punkt T ist. /*Satz A 7.*/ Das Analoge gilt auch für jede der Ebenen (t, c_n^2). Da weiterhin jede Ebene des Punktes T die Kurve ω 3. Ordnung in drei Punkten schneidet, die die Fernpunkte der Erzeugenden eines Kegels 3. Grades mit dem Scheitelpunkt T sind, folgt, dass diese Erzeugenden $(MK-VN)$ Komplexstrahlen sind. Die I Punkte dieser Strahlen bilden eine Kurve ω 3. Ordnung und ihre Z- bzw. Mittelpunkte eine Raumkurve 4. Ordnung geben /2.3./.

Satz A 11. *Einen beliebigen Raumpunkt enthaltende (VN) Komplexstrahlen des $/F_k^2/$ Flächenbüschels bilden einen Kegel 8. Grades, dieser zerfällt in einen Kegel 5. Grades der (VN) Komplexstrahlen* *mit den I Punkten längs der Raumkurve 6. Ordnung und den Z Punkten auf einer Kurve 7. Ordnung und in einen Kegel 3. Grades der (MK—VN) Komplexstrahlen mit den I Punkten längs einer Fernkurve 3. Ordnung und den Z- bzw. Strahlmittelpunkten längs einer Raumkurve 4. Ordnung.*

f) *Die in einer Ebene liegenden (VN) Komplexstrahlen des (F_k^2) Polarraumbüschels (die Klasse des Komplexes)*

In [1] wurde festgestellt, dass die in einer beliebigen Ebene liegenden Komplexstrahlen eine Kurve 8. Klasse einhüllen, während die I-Punktkurve dieser Strahlen 5. Ordnung und ihre Z-Punktkurve 7. Ordnung ist.

Wenn es sich um ein /F_k^2/ Flächenbüschel handelt, muss man in Betracht nehmen, dass den Punkten der Ferngeraden q einer beliebigen Ebene, die zugeordneten *(TK)* Komplexstrahlen einen Regulus des Hyperboloides H_q bilden. Diese Fläche ist eine Gesamtheit der Z Punkte jener *(VN)* Komplexstrahlen, deren *I* Punkte sich längs der Geraden q befinden und jede Ebene des Büschels [q] schneidet diese Fläche H_q in einer Kurve 2. Ordnung, die die Gesamtheit der Z Punkte jener *(VN)* Komplexstrahlen ist, die die *I* Punkte längs der Geraden q haben.

Stellt man einen Vergleich mit den Untersuchungen des *(MK)* Komplexes in [3] und [6] an, kann man sehen, dass die erwähnten *(VN)* Komplexstrahlen mit jenen *(MK)* Komplexstrahlen übereinstimmen, die in einer beliebigen Ebene eine Kurve 3. Klasse einhüllen und die die Mittelpunkte auf einer Kurve 2. Ordnung haben.

Da der *(VN)* Komplex 8. Grades ist, müssen seine in einer beliebigen Ebene liegenden Strahlen eine Kurve 8. Klasse einhüllen, die immer in eine Kurve 3. Klasse der *(MK—VN)* Komplexstrahlen und in eine Kurve 5. Klasse der *(VN)* Komplexstrahlen zerfällt. Wann diese Kurven auch weiter zerfallen, hängt von anderen Faktoren ab.

Die I-Punktkurve 5. Ordnung der in einer beliebigen Ebene liegenden *(VN)* Komplexstrahlen zerfällt in die Ferngerade dieser Ebene und in eine Kurve 4. Ordnung und die Z-Punktkurve dieser Strahlen in Kurven 2. und 5. Ordnung. Die Kurve 3. Klasse der *(MK—VN)* Komplexstrahlen ist das Erzeugnis der ein-eindeutig zugeordneten Punktereihen 1. und 2. Ordnung und die Kurve 5. Klasse der *(VN)* Komplexstrahlen ist das Erzeugnis der ein-eindeutig zugeorneten Punkte dieser Kurven 4. und 5. Ordnung, wo aber in Betracht genommen werden muss, dass diese zwei Kurven sich in vier Durchstosspunkten der betreffenden Ebene mit der Grundkurve k^4 des /F_k^2/ Büschels schneiden, so dass von den erhaltenen Erzeugnis noch vier Strahlbüschel abgenommen werden müssen / [1] und *3 Ba)* /.

Satz A 12. *Die (VN) Komplexstrahlen die in einer beliebigen Ebene eine Kurve 8. Klasse einhüllen, bilden im Fall des (F_k^2) Polarraumbüschels eine Kurve 5. Klasse jener (VN) Komplexstrahlen, die die I Punkte auf einer Kurve 4. Ordnung und die Z Punkte auf einer*

Kurve 5. Ordnung haben und eine Kurve 3. Klasse der (MK—VN) Komplexstrahlen mit den I Punkten längs der Ferngeraden der betreffenden Ebene und den Z Punkten bzw. (MK)-Komplexstrahlmittelpunkten auf einer Kurve 2. Ordnung.

Aus den bisher Dargelegten ist es ersichtlich, dass die Gesamtheit der (*VN*) Komplexstrahlen des (F_k^2) Polarraumbüschels in den Teil, der die (*VN*) Komplexstrahlen und in den Teil der (*MK—VN*) Komplexstrehlen enthält genau dann zerfällt, wenn die Gesamtheit diesen Strahlen zugeordneter *I* Punkte die Fernpunkte enthält.

B DIE SINGULÄRPUNKTE UND DIE IHNEN ENTHALTENDEN GERADEN

Die Gesamtheit der Singulärpunkte des durch das Flächenbüschel $/F^2/$ bestimmten (*VN*) Komplexes bilden, wie es in [1] gezeigt wird, die Grundkurve k^4 4. Ordnung dieses Büschels, die Flächenmittelpunkraumkurve k_c^3 3. Ordnung, die Jacobische Fernkurve μ 3. Ordnung und der absolute Kegelschnitt, während es in [3] gezeigt wird, dass nur die Punkte der Kurve k_c^3 die Singulärpunkte des (*MK*) Komplexes sind.

Es wäre nun interessant zu untersuchen auf welche Art und Weise sich die Eigenschaften der Punkte dieser Kurven wie auch die Gesamtheit der (*VN*)- bzw. (*MK*) Komplexstrahlen, die diese Punkte enthalten, ändern werden, wenn diese Komplexe durch das $/F_k^2/$ Flächenbüschel bestimmt werden.

a) *Die Grundkurve k^4 des $/F_k^2/$ Flächenbüschels*

Ein beliebiger Punkt *T* der Grundkurve k^4 des Flächenbüschels $/F_k^2/$ ist, wie auch im Fall des Flächenbüschels $/F^2/$, der Träger eines Büschels der (*VN*) Komplexstrahlen, der in jener Ebene *E* liegt, die senkrecht auf die Tangente

$$t = \varphi(T) \qquad T \in k^4$$

der Kurve k^4 im Punkt *T* steht. Die Tangente *t* ist ein einfacher (*TK*)- und (*MK*) Komplexstrahl und ein zweifacher (*VN*) Komplexstrahl, da *t* auch eine Erzeugende einer Fläche des $/F_k^2/$ Büschels ist. Von zwei *I* Punkten der Tangenten *t*, als dem (*VN*) Komplexstrahl, muss immer eine unendlich fern liegen (siehe *A* d), während sich ihnen zugeordnete *Z* Punkte immer im Punkt *T* befinden. [1]. Aus diesem Grunde folgt, dass auch die beliebige Tangente *t* der Grundkurve k^4 des $/F_k^2/$ Flächenbüschels ein einfacher (*MK—VN*) Komplexstrahl ist.

b) *Die Flächenmittelpunktraumkurve k_c^3 des $/F_k^2/$ Büschels*

Ein beliebiger Punkt *0* der Kurve k_c^3 des $/F^2/$ Büschels ist ein ∞^1-deutiger *I* Punkt eines Büschels jener (*VN*) Komplexstrahlen deren *Z* Punkte sich längs des Fernstrahles

$$t_o = \varphi(O) \qquad O \in k_c^3$$

befinden. Der Strahl t_o schneidet die Jacobische Fernkurve μ 3. Ordnung in drei Punkten, die die I Punkte jener drei (VN) Strahlen sind, die die Z Punkte im Punkt 0 haben.

Geht es um ein $/F_k^2/$ Flächenbüschel hat jeder Punkt der Ebene, so auch jeder Punkt der Geraden

$$t_o = \varphi(O) \qquad O \in k_c^3$$

die Eigenschaften der Kurve μ. Daraus folgt, dass die, den Punkten der Geraden t_o zugeordneten (TK) Komplexstrahlen einen Kegel 2. Grades bilden, der den Scheitelpunkt im 0 hat, und die Erzeugenden dieses Kegels bilden die Gesamtheit der Z Punkte jener büschelförmigen (VN) Strahlen, die die I Punkte längs der Geraden t_0 haben. Die Gerade t_0 ist deshalb auch eine Gesamtheit der I Punkte jener (VN) Komplexstrahlen, die den Z Punkt im 0 haben.

Jeder (VN) Komplexstrahl, dessen I Punkt sich im Mittelpunkt einer beliebigen Fläche des $/F_k^2/$ Büschels befindet, ist ein solcher, dass er nur die Orientation ändert, wenn ihm involutorzugeordneten I und Z Punkte seine Stellung wechseln. Solche Strahlen sind in [1] als die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes definiert. Ein beliebiger Flächenmittelpunkt des $/F_k^2/$ Büschels ist deshalb der Träger eines Büschels der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes.

Erwähnen wir nun noch, dass über die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes der durch das $/F_k^2/$ Büschel bestimmt ist, wird die Rede in einer anderen Arbeit sein.

Es ist klar, dass die erwähnten Involutorstrahlen auch die (MK) Komplexstrahlen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt im Mittelkunkt der betreffenden Fläche des $/F_k^2/$ Büschels sind (vergleiche mit 2.8.) und dem $(MK-VN)$ Komplex angehören.

Satz B 1. *Ein beliebiger Flächenmittelpunkt des $/F_k^2/$ Büschels ist ein ∞^1-deutiger I- und ein ∞^1-deutiger Z Punkt eines Büschels der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, deren der andere zugeordnete Punkt sich auf diesem Mittelpunkt zugeordnetem Fernstrahl des (TK) Komplexes befindet.*

Bemerken wir noch, dass ein wesentlicher Unterschied in Beziehung auf das Flächenbüschel $/F^2/$ besteht, weil in diesem Fall einen beliebigen Flächenmittelpunkt nur drei Involutorstrahlen enthalten und jeder solcher Punkt ist der Singulärpunkt nur bezüglich der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen. Im Gegensatz zu dem, im Fall des $/F_k^2/$ Büschels ist jeder Punkt der Kurve k_c^3 ein Singulärpunkt wie bezüglich der I- so auch bezüglich der Z Punkte dieser Komplexstrahlen.

Eine besondere Stellung innerhalb der Punkte der Kurve k_c^3 des $/F_k^2/$ Büschels nehmen die Scheitel-mittelpunkte A, B, C und D der Sintulärflächen dieses Büschels an, wie auch die Fernpunkte U, V und Y der Kurve k_c^3 wo, wie bekannt, U, V und Y die Mittelpunkte des hyperbolischen Paraboloides bzw. zweier Paraboloide, während die Punkte A, B, C und D auch die Eckpunkte des gemeinsamen Polartetraeders des (F_k^2) Polarraumbüschels sind.

Jeder der Mittelpunkte A, B, C, bzw. D ist im Fall des Büschels $/F_k^2/$ wie auch im Fall des $/F^2/$ Büschels ein ∞^2 deutiger I Punkt eines Bündels der (VN) Komplexstrahlen. Wie bekannt, ein beliebiger Raumpunkt T ist ein dreifacher Z Punkt, dem die zugeordneten I Punkte sich auf dem Strahl

$$t = \varphi(T)$$

befinden. Geht es um das $/F_k^2/$ Büschel, so liegt einer dieser I Punkte unendlich fern. Dieselben Tatsachen haben die Geltung auch für alle (TK) Komplexstrahlen, die z. B. in der Ebene (BCD) liegen und die dem Punkt A zugeordnet sind. Es folgt daraus, dass der Kegel 3. Grades jener (VN) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen Z Punkt im Punkt A haben und deren I Punkte in der Ebene (BCD) eine Kurve m_1^3 3. Ordnung bilden, zerfällt in einen Kegel 2. Grades und in den Büschel (A) jener (VN) Komplexstrahlen, die in der Ebene, die parallel mit der Ebene (BCD) ist, liegen, während die ebene I-Punktkurve m_1^3 dieser Strahlen in die, die Scheitelpunkte B, C, D enthaltende Kurve 2. Ordnung und in die Ferngerade dieser Ebene zerfällt.

Vergleichen wir dieses mit den Untersuchungen in [3], bzw. mit der Behauptung die in 2.8. ausgesagt wird, folgt, dass die (VN) Komplexstrahlen der erwähnten Büschels (A), als auch die Erzeugenden des Kegels A^2 2. Grades, der die Fläche des Büschels $/F_k^2/$ mit dem Scheitelpunkt in A ist, stimmen mit den (MK) Komplexstrahlen überein und gehören deshalb dem $(MK-VN)$ Komplexe an. Auf den Erzeugden dieses Kegels liegen die I Punkte eines $I-Z$ Paares unendlich fern und die ihnen zugeordnete Strahlmittelpunkte bzw. Z Punkte halbieren die Strecke, die auf diesen Erzeugenden von der Grundkurve k^4 des $/F_k^2/$ Büschels ausgeschnitten wird.

Den Scheitelpunkt A enthalten deshalb zwei verschiedene Kegel 2. Grades der hervorragenden (VN) Komplexstrahlen, die in erstem Fall die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes und in dem zweiten die Erzeugenden der Singulärfläche des $/F_k^2/$ Büschels und die Strahlen des $(MK-VN)$ Komplexe sind, die aber im A keinen Z Punkt haben.

Es ist ganz klar, dass die analogen Betrachtungen auch für die übrigen drei Punkte B, C und D Bedeutung haben.

Satz B 2. *Der Mittelpunkt einer Singulärfläche des $/F_k^2/$ Flächenbüschels ist der ∞^2-deutiger I Punkt und der ∞^1-deutiger Z Punkt der (VN) Komplexstrahlen. Jene dieser Strahlen, die im Singulärflächenmittelpunkt den Z Punkt haben, sind die Erzeugenden eines Kegels 3. Grades, der in einen Kegel 2. Grades zerfält, so dass die I Punkte eine solche Kurve 2. Ordnung bilden, die die Mittelpunkte der übrigen drei Singulärflächen dieses $/F_k^2/$ Büschels enthält und in ein Büschel der $(MK-VN)$ Komplexstrahlen, deren I Punkte sich auf der Ferngeraden der Ebene der erwähnten übrigen drei Mittelpunkte befinden.*

Da jede Ferngerade ein zweifacher Strahl des (VN) Komplexes [1] und auch zweifacher Strahl des (MK) Komplexes /2.16./ ist, ist es auf Grund der bisherigen Untersuchungen leicht festzustellen, dass jeden Fernpunkt der Kurve k_c^3 bzw. den Punkt U, V oder Y, ein Büschel solcher zweifachen Fernstrahlen des $(MK-VN)$ Komplexes enthalten, die in dem betreffenden Punkt den I Punkt bzw. den Mittelpunkt-Z-Punkt haben.

c) *Die Unisekante der Kurve k_c^3*

Eine Unisekante h der Kurve k_c^3 soll den Mittelpunkt O einer beliebigen Flache F des $/F_k^2/$ Flächenbuschel enthalten.

Die Gerade h sei die Gesamtheit der *I Punkte* der (VN) Komplexstrahlen. Die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in h$$

bilden einen Regulus des hyperbolischen Paraboloides H_h, da der Strahl

$$t_o = \varphi(O) \qquad O \in h$$

seine Fernerzeugende ist. Er ist auch eine Gesamtheit der Z Punkte, die dem Punkt O als dem I Punkt zugeordnet sind. Der endliche Strahl

$t_n = \varphi\,(T_n)$ wo T_n der Fernpunkt der Geraden h sei, ist auch die Gesamtheit der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen die den gemeinsamen I Punkt in T_n haben. Es folgt, dass auch die Fläche 6. Grades jener (VN) Komplexstrahlen zerfällt, die die I Punkte auf einer Unisekante der Kurve k_c^3 haben und zwar in eine Fläche 4. Grades und in zwei Geradenbüschel.

Auch in diesem Fall wird es am interssantesten sein zu untersuchen, wie und auf welche Weise die Kugel auf das Flächenbüschel 2. Grades wirkt, damit dieser Zerfall auftreten könnte. Um dies darlegen und beweisen zu können wird die übliche Behandlung mittels der Hülltorsen τ_1 und τ_2 verwendet. /3. *A a*) /.

Die Hülltorse τ_1 ist unzerfallen und 3 Klasse.

Die Hülltorse τ_2 zerfällt in drei Ebenenbüschel, die auf die folgende Weise zu bekommen sind. Den Punkten des Fernstrahles

$$t_o = \varphi(O) \qquad O \equiv k_c^3 \cap h$$

die zugeordneten Polarebenen bezüglich der Kugel bilden ein Ebenenbüschel, dessen Achse die Verbindungsgerade des Punktes O und des Mittelpunktes der Kugel ist; den zweiten Ebenenbüschel bilden die parallelen Ebenen, dessen Achse den Fernpunkt T_n der Geraden h enthält und die Fernpolare des Fernpunktes des Strahles

$$t_n = \varphi(T_n)$$

bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist; den dritten Ebenenbüschel bilden jene Ebenen, deren Ferngeraden die Polaren der Fernpunkte der

Erzeugenden der Fläche H_h bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind. Es ist nämlich bekannt, dass alle diese Erzeugenden- (TK) Komplexstrahlen die Fernebene in einer Geraden q schneiden, die dem ergänzenden Regulus der Fläche H_h gehört und die erwähnten Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes ein Strahlbüschel bilden, dessen Schitelpunkt mit Q bezeichnet sei. Die Achse des dritten Ebenenbüschels muss ausser des Punktes Q auch den Kugelmittelpunkt enthalten, wie es im 3 *A a*) für die Ebenen der Hülltorse τ_2 bestimmt ist. Es ist klar, dass jede solche Ebene auch jenen Punkt der Geraden h enthalten muss, welchem Punkt diese Ebene auf die beschriebene bekannte Weise zugeordnet ist. Nach den üblichen Verfahren kann man ersehen, dass der erste Ebenenbüschel der Torse τ_2 die Ebene (O, t_o) der Torse τ_1 in einem Büschel (O) der (VN) Komplexstrahlen schneidet und die Z Punkte dieser Strahlen längs der Geraden t_o liegen. Die Ebenen des zweiten Ebenenbüschels der Torse τ_2 schneiden die Ebene (T_n, t_n) der Torse τ_1 in einem Büschel (T_n) der parallelen (VN) Komplexstrahlen mit den Z Punkten längs t_n. Die Ebenen des dritten Büschels der Torse τ_2 schneiden ihnen ein-eindeutig zugeordneten Ebenen der Torse τ_n in den Erzeugender einer Fläche 4. Grades der (VN) Komplexstrahlen und ein-eindeutig zugeordnete Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloides H_h in einer Kurve k^3 3. Ordnung.

Die Strahlen der erwähnten Büschel (O) und (T_n) sind die Strahlen des (VN)- und (MK) Komplexes, aber nur die Strahlen des (T_n) Büschels sind, der Definition 1 nach, Strahlen des $(MK-VN)$ Komplexes. Die Unisekante h ist nach der Voraussetzung eine Gesamtheit der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen, so dass der Punkt O ein ∞^1-deutiger I Punkt eines Büschels solcher (VN) Komplexstrahlen ist, die nur gemeinsam mit den (MK) Komplexstrahlen fallen. Diess steht in keinen Gegensatz mit der vorher ausgesagten Behauptung, dass die Strahlen des Büschels (O) für $O \in k_c^3$ in der Ebene (O, t_o) wo $t_o = \varphi(O)$ ist, die $(MK-VN)$ Komplexstrahlen sind. Den Büschel (O) bilden nämlich die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, und bei diesen Strahlen befindet sich einer der Z Punkte bzw. der Mittelpunkt gemeinsam im Punkt O.

Satz B 3. *Jene (VN) Komplexstrahlen, die die I Punkte auf einer beliebigen Unisekante der Flächenmittelpunktraumkurve* k_c^3 *des* $/F_k^2/$ *Flächenbüschels haben, bilden eine Regelfläche 6. Grades die zerfällt: in eine Fläche 4. Grades dieser Strahlen, mit Z Punkten auf einer Raumkurve 3. Ordnung, in ein Büschel parallelen Strahlen des (MK — VN) Komplexes mit den Z- Mittelpunkten auf einer Geraden und in ein Büschel gemeinsamer Strahlen des (MK) und des (VN) Komplexes mit dem Scheitelpunkt auf der Kurve* k_c^3, *und zwar so, dass die Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen auf einer Ferngeraden liegen, während der gemeinsame Mittelpunkt der (MK) Komplexstrahlen auf der Kurve* k_c^3 *ist.*

Im [5] hat Majcen gezeigt, dass jene (MK) Komplexstrahlen, die die Mittelpunkte auf einer, einem Flächenmittelpunkt enthaltenden Geraden haben, einen hyperbolischen Paraboloid bilden.

Anders ausgedrückt bedeutet das, dass jene (VN) Komplexstrahlen des $/F_k^2/$ Büschels, die die Z *Punkte* auf einer beliebigen Unisekante h der Kurve k_c^3 haben, eine Fläche 10. Grades bilden, die so zerfällt, dass ihr Bestandteil ein hyperbolisches Paraboloid sei, dem die Erzeugenden die $(MK-VN)$ Komplexstrahlen sind.

Die Fläche 3. Grades der $(MK-VN)$ Komplexstrahlen aus dem Satz A 8 zerfällt demnach im hyperbolischen Paraboloid und ein Büschel (O) wo $O \equiv k_c^3 \cap h$ ist. Es ist bekannt, dass die I Punkte jener (VN) Komplexstrahlen die die Z Punkte auf einer Unisekante h der Kurve k_c^3 haben, auf den Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in h$$

liegen. Diese (TK) Komplexstrahlen sind die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloides H_h, den die Fernebene in der Erzeugenden $t_o = \varphi(O)$ und in der Geraden q schneidet. Die Punkte der Geraden q (die Fernpunkte der Strahlen $t = \varphi(T)$) sind als die I Punkte ein-eindeutig den Punkten der Geraden h als den Z Punkten zugeordnet und ihr Erzeugnis ist, dem Chaslesen Korrespondenzprinzip nach, ein Erzeugendensystem des neuen erwähnten hyperbolischen Paraboloides, so dass diese Erzeugenden die $(MK-VN)$ Komplexstrahlen sind. Die Ergänzung biss zur Fläche 3. Grades bilden jene Strahlen dieses Komplexes, die die I Punkte auf dem Strahl t_o und dem gemeinsamen Z Punkt im Punkt O haben.

Satz B 4. *Jene (VN) Komplexstrahlen die die Z Punkte auf einer beliebigen Unisekante h der Kurve k_c^3 des $/F_k^2/$ Büschels haben, bilden eine Regelfläche 10. Grades und sie zerfällt,*

1. in eine Fläche 7. Grades der (VN) Komplexstrahlen mit den I Punkten auf einer Raumkurve 5. Ordnung und der Geraden h als zweifachen Leitgeraden.

2. in einen hyperbolischen Paraboloid dem einen Regulus die $(MK-VN)$ Komplexstrahlen mit den I Punkten auf einer Ferngeraden bilden und

3. in ein Büschel dieser $(MK-VN)$ Komplexstrahlen mit den I Punkten längs jenes (TK) Komplexstrahles der dem Mittelpunkt jener Fläche des $/F_k^2/$ Büschels zugeordnet ist, dem diese Unisekante enthält und die den gemeinsamen Z-Mittelpunkt in dem erwähnten Flächenmittelpunkt haben.

d) Die Gerade die einen Eckpunkt des Polartetraeders ABCD des $/F_k^2/$ Flächenbüschels enthält

Die Gerade a soll den Punkt der Kurve k_c^3, der auch der Eckpunkt A des Polartetraeders ist, enthalten und die gegenüberstellende Ebene (BCD) dieses Tetraeders im Punkt A_1 durchdringen. Wie es in [1] gezeigt wird, bilden jene (VN) Komplexstrahlen, die auf einer solchen Geraden die I Punkte haben, eine Regelfläche, die zerfällt in die Fläche 4. Grades und einen Kegel 2. Grades dessen Scheitelpunkt sich in dem betreffenden

Eckpunkt des Tetraeders befindet. Die Z-Punktkurve dieser Strahlen zerfällt in zwei Zirkulärkurven 3. und 2. Ordnung.

Geht es um ein $/F_k^2/$ Flächenbüschel, so wiederholt sich der in [1] beschriebene Zerfall, aber die erwähnte Fläche 4. Grades zerfällt auch weiter in die Fläche der (VN) bzw. $(MK-VN)$ Komplexstrahlen.

Wir weisen wie in [1] hin, dass die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in a$$

ein Strahlbüschel (K) in der, den Eckpunkt A enthaltenden Ebene K^* und noch ein Büschel (K) in der Ebene (BCD) bilden, wo die (TK) Komplexstrahlen des letzten Büschels zugeordnet dem Punkt A der Geraden a sind, und $K \in K^* \cap (BCD)$ ist. Diese zwei Büschel werden getrennt betrachtet.

Die Strahlen t_i des Büschels (K) in der Ebene K^* bilden mit ihnen ein-eindeutig zugeordneten Punkten T_i der Geraden a eine Hüllorse τ_1^x 2. Klasse. Den Punkten der Ferngeraden der Ebene K^*, d. h. den Fernpunkten der Strahlen t_i des (TK) Komplexes zugeordnete Polaren p_i bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind unendlich fern und büschelförmig. Da es sich um ein $/F_k^2/$ Büschel handelt, sind diese Polaren p_i die Ferngeraden jener Polarebenen, die den Punkten der Ferngeraden der Ebene K^* bezüglich der Kugel zugeordnet sind, da wegen der Polarverhältnisse jede der Ebenen (p_i, T_i) den Kugelmittelpunkt enthalten muss. Aus diesem Grunde folgt, dass der Teil der zerfallenen Hülltorse τ_2^x ein Ebenenbüschel bildet, dessen Achse den Kugelmittelpunkt enthält. Die ein-eindeutig zugeordneten Ebenen der Torse τ_1^x und τ_2^x schneiden sich in den (VN) Komplexstrahlen und bilden nach dem Chasleses Korrespondenzpronzip eine Fläche 3. Grades, während die zugeordneten Z Punkte auf einem Kreis in der Ebene K^* liegen, was leicht ersichtlich ist.

Dem Fernpunkt A_n der Geraden a ist der Strahl

$$t_n = \varphi(A_n)$$

zugeordnet und dem Fernpunkt dieses Strahles die zugeordnete Polare p_n bezüglich des absoluten Kegelschnittes muss den Punkt A_n enthalten, wie es im ähnlichen Fällen gezeigt wurde. Die Gerade p_n ist deshalb die Arche des neuen Ebenenbüschels der Torse τ_2^*, welches Büschel die hervorragende Ebene (A_n, t_n) der Torse τ_1^x in einem Strahlbüschel schneidet. Auf diese Weise sind jene (VN) Komplexstrahlen erhalten, die den gemeinsamen I Punkt im A_n haben, während ihre Z Punkte längs der Geraden t_n liegen, so dass diese Strahlen auch die $(MK-VN)$ Komplexstrahlen sind.

Die Strahlen

$$t_A = \varphi(A) \quad \text{für} \quad A \in a$$

bilden, wie bekannt ein Strahlbüschel (K) in der Ebene (BCD), so dass die Ergänzung bis der Torse τ_1 3. Klasse, ein Ebenenbüschel $[AK]$ ist. Den Fernpunkten der Ebene (BCD) zugeordnete Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind büschelförmig, so dass die Ergänzung bis die Hülltorse τ_2 3. Klasse ein solcher Ebenenbüschel bildet, dessen Achse den Kugelmittelpunkt und den Punkt A enthält. Ein-eindeutig zugeordnete Ebenen der Büscheln dieser zwei Torsen schneiden sich in (VN) Komplexstrahlen und bilden die Erzeugenden eines Kegels 2. Grades mit dem Scheitelpunkt A. Die Z Punkte dieser Strahlen bilden wieder einen Kreis, aber jetzt in der Ebene (BCD).

Es ist klar, dass die analogen Behauptungen die Bedeutung haben, ohne Rücksicht darauf, welchen der Tetraedereckpunkte die beliebige Raumgerade enthält.

Satz B 5. *Jene (VN) Komplexstrahlen des (F_k^2) Polarraumbüschels die die I Punkte auf einer, den Eckpunkt des Polartetraeders enthaltenden Geraden haben, bilden eine Regelfläche 6. Grades, die zerfällt:*

1. *in eine Fläche 3. Grades mit den Z Punkten auf einem Kreis,*
2. *in einen Kegel 2. Grades mit dem Scheitelpunkt im betreffenden Eckpunkt des Tetraeders (Mittelpunkt einer Singulärfläche des $/F_k^2/$ Büschels) und den Z Punkten auf einem Kreis der in der Ebene der übrigen drei Eckpunkte des Tetraeders liegt, und*
3. *in ein Büschel der parallelen $(MK-VN)$ Komplexstrahlen, mit den Z-Mittelpunkten auf einer Geraden.*

Ist die Gerade a die Gesamtheit der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen, sind keine wesentlich neue Eigenschaften aufgetreten. Die aus [1] bekannte zerfällene Fläche in die Flächen 7. und 3. Grades der (VN) Komplexstrahlen, zerfällt weiterhin in die Fläche 7. Grades, einen Kegel 2. Grades und in ein Strahlbüschel (A).

Die Untersuchungen über die Erzeugenden des erwähnten Kegels 2. Grades die auch die Involutorstrahlen des (VN) Komplexäes sind, werden, in einer anderen Arbeit durchgeführt werden.

e) Die Bisekante der Kurve k_c^3 des (F_k^2) Polarraumbüschels

Eine beliebige Bisekante b der Kurve k_c^3 ist als der Strahl

$$b = \varphi(Q)$$

zu betrachten, wo Q ein Fernpunkt ist. Die Gerade b muss weiterhin die Mittelpunkte O_s und O_R zweier Flächen des $/F_k^2/$ Büschels enthalten. Die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in b$$

sind die Erzeugenden eines Zylinder-Kegels Q^2 2. Grades des Fernscheitelpunktes Q, dem die Fernerzeugenden

$$t_s = \varphi(O_s) \quad \text{und} \quad t_R = \varphi(O_R)$$

sind. Die unzerfallene Torse τ_1 3. Klasse ist mit Erzeugenden des Zylinders und ihnen ein-eindeutig zugeordneten Punkte der Geraden b bestimmt. Dem Punkt Q zugeordnete Polare p_Q bezüglich des absoluten Kegelschnittes enthält wegen der Polarvenhältnisse und des $/F_k^2/$ Flächenbüschels den Fernpunkt B_n der Geraden b. Auf Grund der bisherigen Untersuchungen ist es leicht zu behaupten, dass die Hülltorse τ_2 3. Klasse in zwei solchen Ebenenbüschel zerfällt, dessen Achse den Kugelmittelpunkt und den Punkt O_s bzw. O_R enthält und die Gerade p_Q schneidet, und in noch ein Büschel paralleler Ebenen mit der Achse p_Q. Die Ebenen der ersten zwei Büscheln schneiden die Ebene (O_s, t_s) bzw. (O_R, t_R) der Torse τ_1 in Büscheln (O_s) bzw. (O_R) der (VN) Komplexstrahlen die den gemeinsamen I Punkt im Punkt O_s bzw. O_R haben, während die Z Punkte längs der Strahlen t_s bzw. t_R liegen. Die Ebenen des dritten Büschels schneiden die Ebene (B_n, t_B), wobei

$$t_B = \varphi(B_n) \quad \text{ist,}$$

der Hülltorse τ_1 in (VN) Komplexstrahlen mit dem gemeinsamen I Punkt im B_n und den Z Punkten längs t_B.

Die Achsen aller drei Ebenenbüschel der Torse τ_2 liegen in jener Ebene, die den Kugelmittelpunkt und die Mittelpunkte $O_s \in b$ und $O_R \in b$ enthält, und diese Ebene der Torse τ_2 ist allen Punkten der Bisekante b zugeordnet. Dies hat zur Folge, dass die Ebenen der Torse τ_1 diese hervorragende Ebene der Torse τ_2 in jenen (VN) Komplexstrahlen schneiden, deren I Punkte sich auf der Geraden b und die Z Punkte in den Durchstosspunkten der Erzeugenden des Zylinders Q^2 mit dieser Ebene befinden. Es ist klar, dass diese (VN) Komplexstrahlen eine ebene Kurve 3. Klasse einhüllen.

Satz B 6. *Jene (VN) Komplexstrahlen deren I Punkte sich längs einer Bisekante der Kurve k_c^3 des $/F_k^2/$ Flächenbüschels befinden, bilden:*

1. *eine (ebene) Kurve 3. Klasse mit den I Punkten längs dieser Bisekante und mit den Z Punkten auf einer Kurve 2. Ordnung,*
2. *zwei Büschel der gemeinsamen (VN) und (MK) Komplexstrahlen mit den I Punkten in Mittelpunkten der betreffenden Flächen und den Z Punkten auf den Ferngeraden, und*
3. *ein Büschel der parallelen $(MK - VN)$ Komplexstrahlen.*

Ist die Gerade b eine Gesamtheit der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen, können sich die I Punkte, wie bekannt, nur auf den Erzeugenden des Zylinders Q^2 befinden u. zw. so, dass die Ferngerade t_R bzw. t_s eine Gesamtheit jenes Büschels (O_R) bzw. (O_s) der (VN) Komplexstrahlen ist, die den gemeinsamen Z Punkt im Punkt O_R bzw. O_s der Bisekante b haben. Da auf jeder endlichen Erzeugenden des Zylinder Q^2 drei I Punkte dreier (VN) Komplexstrahlen mit dem gemeinsamen Z Punkt liegen und eine dieser Strahlen immer parallel mit der Erzeugenden des Zylinders Q^2 ist und im Punkt Q sein I Punkt hat, folgt, dass noch ein Büschel (Q) der (VN) Komplexstrahlen in der Ebene (Q, b) besteht. Dass die Strahlen aller drei erwähnten Büschel auch die $(MK-VN)$ Komplexstrahlen sind, ist es leicht ersichtlich.

Die übrigen (VN) Komplexstrahlen sind ein Erzeugnis des ein-zweideutigen Zuordnung der Punkte der I-Punktkurve 5. Ordnung und der Punkte der Geraden b als zweifachen Z-Punktkurve, so dass sie alle eine Fläche 7. Grades einhüllen. Den Beweis kann man auf die übliche Weise, wie im 3. B c), durchführen.

Eine besondere Stellung nehmen jene Bisekanten der Kurve k_c^3 ein, die die *Kanten des Polartetraeders ABCD* des Flächenbüschels $/F_k^2/$ sind.

Die Kante AB des Polartetraeders $ABCD$ sei eine Gesamtheit der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen. Diesen Punkten zugeordnete (TK) Komplexstrahlen fallen alle zusammen in die Strahl-Kante CD, was auch für den Fernpunkt der Kante AB die Geltung hat. Oder mit anderen Worten: der Fernpunkt der Kante AB ist konjugiert jedem, so auch dem Fernpunkt der Kante CD u. zw. bezüglich aller Flächen des $/F_k^2/$ Büschels, einschliesslich die Kugel und ihre Fernkurve — den absoluten Kegelschnitt. Dies hat zur Folge, dass zwei gegenüberliegende Kanten AB und CD dieses Polartetraeders immer untereinander senkrecht stehen und auch weiterhin, dass zwei beliebige gegenüberliegenden Kanten des Polartetraeders des (F_k^2) Büschels immer untereinander senkrecht stehen.

Die Torse τ_1, die mit den Punkten der Geraden AB und der Kante CD bestimmt ist, wird in ein Ebenenbüschel [CD] zusammengezogen. Dem Fernpunkt der Geraden CD zugeordnete Polare p bezüglich des absoluten Kegelschnittes enthält den Fernpunkt der Geraden AB, so dass die Ebenen der Torse τ_2 die mit den Punkten der Geraden AB und der Polaren p bestimmt sind, alle in die Ebene (p, AB) fallen, aber dem Fernpunkt der Kante AB selbst ist noch das ganze Ebenenbüschel [p] der Torse τ_2 zugeordnet.

Die Ebene (p, AB) der Torse τ_2 steht senkrecht auf die Kante CD und schneidet sie in einem Punkt, welcher der gemeinsame Z Punkt eines Büschels der (VN) Komplexstrahlen ist, deren I Punkte sich längs der Kante AB befinden. Der erwähnte Punkt $Z \in CD$ ist der nächste Punkt der Kante CD zu der Kante AB. Die übrigen Ebenen des Büschels [p] der Torse τ_2 schneiden die Kante CD in den Z-Mittelpunkten jener ($MK-VN$) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen I Punkt im Fernpunkt der Kante AB haben.

Ist umgekehrt die Kante CD eine Gesamtheit der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen, haben alle diese Strahlen den gemeinsamen Z Punkt in jenem Punkt der Kante AB, der der nächste Punkt der Kante CD ist, während der Fernpunkt der Kante CD der gemeinsame I Punkt jener büschelförmigen ($MK-VN$) Komplexstrahlen, ist, die die Z-Mittelpunkte längs der Kante AB haben.

Die analogen Folgerungen könnte man auch für die übrigen zwei Paare der gegenüberliegenden Kanten des Polartetraeders $ABCD$ durchführen. Dies hat zur Folge, dass nebst den Punkten der Kurve k_c^3 noch sechs isolierte endliche Raumpunkte bestehen, die die gemeinsamen Z Punkte der (VN) Komplexstrahlbüscheln sind, deren I Punkte aber an der endlichen Geraden liegen.

Satz B 7. *Jeder Punkt einer Kante des Polartetraeders eines* $/F_k^2/$ *Flächenbüschels ist der I Punkt jenes (VN) Komplexstrahles, der den Z Punkt in jenem Punkt der gegenüberliegenden Kante dieses Tetraeders hat, der der ersten Kante der nächste liegt. Keine Ausnahme bilden die zwei auf dieser Kante liegenden Eckpunkte des Tetraeders, die wie bekannt, die* ∞^2*-deutigen I Punkte der Bündel der (VN) Komplexstrahlen sind, deren Z Punkte sich in diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Ebenen des Polartetraeders befinden, wie auch der Fernpunkt dieser Kante, der der* ∞^1*-deutiger I Punkt eines Büschels jener (MK—VN) Komplexstrahlen ist, die die Z-Mittelpunkte längs dieser Kante gegenüberliegenden Kante des Polartetraeders haben.*

Weiterhin kann man behaupten:

Satz B 8. *Die Fläche 10. Grades jener (VN) Komplex strahlen, die die Z Punkte auf der Kante AB des Polartetraeders des* (F_k^2) *Polarraumbüschels haben, zerfällt:*

1. *in ein Büschel (C) in der Ebene (CAB),*
2. *in ein Büschel (D) in der Ebene (DAB),*
3. *in zwei Kegel 2. Grades mit dem Scheitel- und Z Punkt in A bzw. B, deren I Punkte sich auf den Kurven 2. Ordnung in der Ebene (BCD) bzw. (ACD) befinden,*
4. *in zwei Büschel (A) bzw. (B) der (MV—VN) Komplexstrahlen mit den I Punkten längs der Ferngeraden der Ebene (BCD) bezw. (ACD),*
5. *in ein Büschel jener (VN) Komplexstrahlen, die die I Punkte längs der Kante CD und den gemeinsamen Z Punkt in jenem Punkt der Kante AB haben, der der nachste zur Kante CD liegt,*
6. *in ein Büschel parallelliegender (MK—VN) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen I Punkt im Fernpunkt der Kante CD und die Z-Mittelpunkte längs der Kante AB haben.*

Die analogen Folgerungen haben Geltung für jede der sechs Kanten des Polartetraeders des (F_k^2) Polarraumbüschels.

f) Die Erzeugenden der Singulärflächen des $/F_k^2/$ *Flächenbüschels*

Eine beliebige Erzeugende einer Singulärfläche des $/F_k^2/$ Flächenbüschels ist die Bisekante der Kurve k^4 und die Unisekante der Kurve k_c^3. Eine Gerade, die die erwähnten Singulärpunkte enthält und die eine Gesamtheit der *I* bzw. *Z* Punkte der (*VN*) Komplexstrahlen ist, wird solche Fläche dieser Strahlen bestimmen, die die Eigenschaften dieser Punkte weiterführen.

In [1] werden die Eigenschaften solcher Flächen der (*VN*) Komplexstrahlen, die durch das $/F_k^2/$ Flächenbüschel bestimmt sind, untersucht und aus diesem Grunde wird es betrachtet, welche neuen Eigenschaften dieser zerfallenen Flächen dann eintreten, wenn diese Strahlen der $/F_k^2/$ Flächenbüschel bestimmt.

Eine Gerade a sei die Erzeugende der Singulärfläche A^2 des $/F_k^2/$ Büschels. Die (TK) Komplexstrahlen, die den Punkten der Erzeugenden

$$a = AA_1 \quad \text{für} \quad A_1 \equiv a \cap (BCD)$$

zugeordnet sind, bilden auch jetzt zwei Strahlbüschel (K) wie im Fall des $/F^2/$ Büschels, bzw. der Geraden die im 3 B d) betrachtet wird. Die aus den Punkten der Geraden a, die eine Gesamtheit der *I Punkte* sei, gelegte Senkrechten auf die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in a$$

bilden in der Ebene (A, A_1, K) d. h. in der Berührebene des Singulärkegels A^2 des $/F_k^2/$ Büschels längs seiner Erzeugenden a, keine Parabel. Dem Fernpunkt Q der Erzeugenden a der zugeordnete Strahl

$$b = \varphi(Q)$$

ist nämlich eine Bisekante der Kurve k_c^3 und eine Gesamtheit der Z-Mittelpunkte eines Büschels (Q) der parallelen $(MK-VN)$ Komplexstrahlen, deren I Punkte sich im Punkt Q befinden. Daraus folgt, dass die Z Punkte jener (VN) Komplexstrahlen die längs der Geraden a die I Punkte haben, eine solche Zirkulärkurve bilden, die in die erwähnte Bisekante b und im Kreis k^2 in der Ebene (A, A_1, K) zerfällt. Dieser Kreis ist mit den Punkten K, T_1 und T_2 bestimmt, wo T_1 und T_2 die Schnittpunkte der Geraden a und der Kurve k^4 sind. Im [1] wurde es nämlich gezeigt, dass die Punkte T_1 und T_2 die Scheitelpunkte der Büscheln solcher (VN) Komplexstrahlen in der Ebene (A, A_1, K) sind, die in diesen Punkten den gemeinsamen I- und Z Punkt haben [Vergleich mit 3 B a)]. Die (VN) Komplexstrahlen die die Z Punkte längs des Kreises k^2 haben, bilden ein Strahlbüschel (K_1), wo K_1 der diametralentgegengesetzte Punkt dem Punkt K auf der Kurve k^2 ist. Dieser Kreis ist demgemäss ein Erzeugnis zweier Strahlbüschel, u. zw. (K) als (TK) Komplexstrahlen und (K_1) als (VN) Komplexstrahlen, deren die zugeordneten Strahlen senkrecht gelegt sind. Da weiterhin das Doppelverhältnis

$$(Q\, T_x\, T_1\, T_2) = -1$$

die Bedeutung hat, wo $T_x \in b$ und auch der Z Punkt der Erzeugenden a als des (VN) Komplexes ist, dessen I Punkt im Q liegt, muss die Bisekante

$$b = \varphi(Q)$$

senkrecht auf a liegen und die Länge $T_1 T_2$ halbieren.

Es ist klar, dass ein Bestandteil der (VN) Komplexstrahlfläche 6. Grades jener Strahlen, die die I Punkte längs der Erzeugenden a des Kegels A^2 haben, auch der Kegel 2. Grades dieser Strahlen ist, dem der Scheitelpunkt im A liegt und der im 3 B b) betrachtet wurde.

Der strenge Beweis diesen, mittels der zerfallenen Hülltorsen τ_1 und τ_2 3. Klasse, könnte auf die gleiche Weise wie in bisherigen Fällen durchgeführt werden.

Satz B 9. *Die Fläche 6. Grades jener (VN) Komplexstrahlen, deren I Punkte sich auf einer beliebigen Erzeugenden einer Singulärfläche des /F_k^2/ Flächenbüschels befinden, wie auch die Z-Punktkurve 5. Ordnung dieser Strahlen zerfällt:*

1. *in einen Kegel 2. Grades dieser Strahlen, mit dem Scheitelpunkt im Scheitelpunkt der betreffenden Singulärfläche, der mit jenem Eckpunkt des Polartetraeders ABCD übereinstimmt, den diese Erzeugende enthält, während die Z Punkte dieser Strahlen einen Kreis in der Ebene der übrigen drei Eckpunkte des Tetraeders ABCD bilden,*

2. *in zwei solche Strahlbüschel, deren die Scheitelpunkte in den Schnittpunkten dieser Erzeugenden mit der Grundkurve k^4 liegen, so dass alle zu einem Büschel gehörenden Strahlen im betreffenden Schnittpunkt dem gemeinsamen I- und Z Punkt haben,*

3. *in ein Büschel solcher Strahlen, deren Z Punkte auf einem Kreis liegen,*

4. *in ein Büschel der parallelliegenden (MK—VN) Komplexstrahlen, deren Z Punkte auf jener Geraden liegen, die senkrecht auf die erwähnte Erzeugende der Singulärfläche ist.*

Die Ebene (A, A_1, K) ist auch die Singulärebene β des (MK) Kompexes /2. 12./. Die Erzeugende a ist die Unisekante und die Gerade.

$$b = \varphi(Q)$$

die Biserkante der Kurve k_c^3. In jeder solchen Ebene zerfällt nicht nur die Kurve 3. Klasse der (MK) Komplexstrahlen, sondern auch die Kurve 8. Klasse der (VN) Komplexstrahlen. Die $(MK-VN)$ Komplexstrahlen sind die Strahlen des bekannten Büschels (Q) mit den Z-Mittelpunkten längs der Geraden b und jene, die Parabel einhüllenden Strahlen, deren I Punkte sich längs der Ferngeraden der Ebene (A, A_1, K) und die Z-Mittelpunkte längs der Erzeugenden a befinden.

Daraus folgt unmittelbar, dass wie die I-Punktkurve so auch die Fläche jener (VN) Komplexstrahlen zerfällt, die die Z *Punkte* längs der Erzeugenden a haben. Es zerfällt also auch jener Teil der Fläche 10. Grades, der sich im Fall des /F^2/ Büschels in eine Kurve 5. Klasse zusammenzieht [1], u. zw. in die Parabel der $(MK-VN)$ Komplexstrahlen und in eine Kurve 3. Klasse, während die ihnen zugeordnete I-Punkkurve 4. Ordnung in die Ferngerade der Ebene (A, A_1, K) und in eine Kurve 3. Ordnung zerfällt. Der Beweis würde auf die gleiche Weise wie in [1] durchgeführt werden.

Es folgt:

Satz B 10. *Die Fläche 10. Grades jener (VN) Komplexstrahlen deren Z Punkte sich längs einer Erzeugenden einer Singulärfläche des /F_k^2/ Flächenbüschels befinden, zerfällt:*

1. *in einen Kegel 2. Grades dieser Strahlen mit dem Scheitelpunkt in jenem Eckpunkt des Polartetraeders, den diese Erzeugende ent-*

hält, während die I-Punktkurve dieser Strahlen einen Kreis in der Ebene der übrigen drei Tetraedereckpunkten bildet,

2. *in zwei solche Strahlbüschel deren die Scheitelpunkte in den Schnittpunkten dieser Erzeugenden mit der Grundkurve k^4 liegen, so dass die zu einem Büschel gehörenden Strahlen im betreffenden Schnittpunkt den gemeinsamen I- und Z Punkt haben,*

3. *in eine Kurve 3. Klasse in der Berührebene, die auf die erwähnte Singulärfläche längs der betreffenden Erzeugenden gelegt ist, so dass die I Punkte eine Kurve 3. Ordnung bilden,*

4. *in ein Büschel der (MK—VN)Komplexstrahlen mit dem Scheitelpunkt im erwähnten Eckpunkt des Tetraeders und den I Punkten auf der Ferngeraden der Ebene der übrigen drei Eckpunkte und*

5. *in eine Kurve 2. Klasse (Parabel) der (MK—VN) Komplexstrahlen, die die I Punkte längs der Ferngeraden der erwähnten Berührebene haben.*

Satz B 11. *Die Kurve 8. Klasse der (VN) Komplexstrahlen in einer Berührebene einer Singulärfläche des $/F_k^2/$ Flächenbüschels, zerfällt:*

1. *in ein Büschel solcher Strahlen, die die I Punkte längs der Erzeugenden a dieser Singulärfläche haben, während ihre Z Punkte einen Kreis bilden,*

2. *in eine Kurve 3. Klasse, so dass die I Punkte eine Kurve 3. Ordnung 1. Geschlechtes bilden, während jeder Punkt der Erzeugenden a ein zweifacher Z Punkt ist,*

3. *in ein Strahlbüschel mit dem gemeinsamen I Punkt in jenem Eckpunkt des Tetraeders, dem diese Erzeugende a enthält und den Z Punkten in diesem Eckpunkt gegenüberliegender Seitenebene des Tetraeders,*

4. *in eine Kurve 2. Klasse (Parabel) der (MK—VN) Komplexstrahlen, deren zugeordnete I Punkte längs der Ferngeraden ihrer Ebene, und die Z Punkte längs der Erzeugenden a liegen,*

5. *in ein Büschel untereinander parallelen (MK—VN) Komplexstrahlen, deren gemeinsamer I Punkt im Fernpunkt der Erzeugenden a, und die Z Punkte längs einer Geraden liegen.*

In einer anderen Arbeit wird nachträglich noch betrachtet werden, wie und auf welche Weise der $/F_k^2/$ Flächenbüschel und sein Polarraumbüschel (F_k^2) Einfluss auf die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes nehmen.

LITERATUR

1. V. Šćurić-Čudovan, Der orientierte Niče-sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, 1. Teil Rad JAZU, 367, (1974.) 151—205.
2. V. Šćurić-Čudovan, Der orientierte Niče-sche Strahlkomplex eines Flächenbüsches 2. Grades, 2. Teil, Rad JAZU, 370 (1975.) 57—91.
3. V. Šćurić-Čudovan, Singuläriteten des Majcenschen Strahlkomplexes, Glasnik matematički 3 (23) (1968), 117—139.
4. V. Šćurić-Čudovan, Über die Rotationsflächen in einem Flächenbüschel 2. Grades und über ein Rotationsflächenbüschel, Glasnik matematički, 3 (23) (1968), 275—286.
5. J. Majcen, O jednoj posebnoj vrsti kubičnog kompleksa, Rad JAZU, 155, (1903), 159—172.
6. V. Niče, Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex, Rad JAZU, 235, (1962), 107—125.
7. V. Niče, Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU, 331, (1965) 145—172.
8. V. Niče, Zusätzliche Betrachtungen mit ergänzenden Sätzen über den Tangentialkurzwegekomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU, 349 (1970) 93—107.
9. V. Niče, Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschele 2. Grades, Glasnik matem.-fiz.- i astr., 2, (18), (1963), 255—268.

Angenommen zur Veröffentlichung am 21. 11. 1975. in der Abteilung für mathematische, physikaliche und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

Vlasta Ščurić-Čudovan

PRAMEN PLOHA $/F_k^2/$ I JEDNA MOGUĆNOST URANJANJA (MK) u (VN) KOMPLEKS

SADRŽAJ

Pramenom ploha $/F^2/$ 2. stupnja određena su četiri kompleksa, i to: Reyeov tetraedarski ili (TK) kompleks 2. stupnja, Majcenov ili (MK) kompleks 3. stupnja, Ničeov orijentirani ili (VN) kompleks 8. stupnja i kompleks normala 8. stupnja.

Svojstva tih kompleksa obrađivana su u slučaju kada su oni određeni pramenom ploha 2. stupnja u kojemu se ne nalazi kugla ni više od dvije rotacione plohe. Radi li se međutim o pramenu ploha $/F_k^2/$ 2. stupnja u čijem se sastavu nalazi i kugla, tada i sam pramen dobiva neka nova svojstva, koja se reflektiraju i na svojstva kompleksa određenih tim pramenom.

Bitne se razlike zamjećuju u beskonačno dalekoj ravnini. Poznato je da je pramen ploha $/F^2/$ 2. stupnja presječen beskonačno dalekom ravninom u pramenu krivulja f^2 2. stupnja, u čijem se sastavu ne nalazi i apsolutna konika. Radi li se međutim o pramenu ploha $/F_k^2/$, tada je i apsolutna konika u presječenom pramenu f_k^2, odakle slijedi da se četiri temeljne točke pramena f_k^2 nalaze na apsolutnoj konici i po dvije od njih su konjugirano imagirarne. Realne spojnice ovih konjugirano imaginarnih točaka beskonačno su daleke izvodnice jedinog hiperboličkog paraboloida pramena $/F_k^2/$, dok su preostale dvije plohe s realnim beskonačno dalekim središtem opći paraboloidi.

Nadalje je poznato da krivulje pramena f^2 čine s apsolutnom konikom mrežu konika, koje vrhovi određuju poznatu Jacobievu krivulju μ 3. reda 1. roda. Pokazano je da krivulja μ ima znatan utjecaj na tvorevine koje čine zrake (VN) kompleksa. U slučaju pramena ploha $/F_k^2/$ svaka točka beskonačno daleke ravnine ima svojstva točaka krivulje μ, pa se to mora odraziti i na svojstvima (VN) kompleksa određenog tim pramenom ploha.

(MK) kompleks definiran je kao skup takvih pravaca u prostoru, koji pramen ploha 2. stupnja sijeku u simetričnim involutornim nizovima, odnosno to je takav skup pravaca kojima se jedno od dvaju dirališta (dvostruke točke spomenutih involutornih nizova) s plohama pramena

nalazi beskonačno daleko. Preostalo dirališe naziva se središnja točka te zrake jer je ona zajedničko središte svih dužina koje na dotičnoj zraci (MK) kompleksa isjecaju plohe danog pramena.

Nazovimo spomenutu središnju točku zrake m (MK) kompleksa s T. Toj točki pridružena zraka t (TK) kompleksa je presječnica polarnih ravnina točke T s obzirom na svaku od ploha pramena ploha 2. stupnja. Zrake t i m međusobno su usporedne. Iz točke T položena okomica na zraku t zraka je o orijentiranog Ničeovog ili (VN) kompleksa. Točka T je I točka zrake o, a njeno sjecište sa zrakom t je Z točka te zrake. Svakoj zraci (VN) kompleksa pridružene su prema tome dvije točke koje određuju njenu orijentaciju i dirališta su te zrake s dvije plohe pramena ploha 2. stupnja. Iz definicije je nadalje vidljivo da su zrake m i o, koje su na opisani način pridružene istoj točki T prostora, međusobno okomite.

U radu je razmatran (VN) kompleks određen pramenom ploha $/F_k^2/$. Posebna je pažnja usmjerena na proučavanje promjena koje nastaju na skupovima zraka (VN) kompleksa u odnosu na slučaj kada je taj kompleks zadan pramenom ploha $/F^2/$. Pri tome najveću ulogu imaju točke beskonačno daleke ravnine jer svaka od njih ima svojstva točaka Jacobieve krivulje μ.

Poznato je nadalje da zajedničke zrake bilo kojih dvaju kompleksa n-tog i m-tog stupnja određuju kongruenciju $n \cdot m$-tog stupnja. U radu je istražen slučaj kada zajedničke zrake dvaju različitih i na različite načine definiranih kompleksa određuju ponovno kompleks.

Bilo koja konačna točka prostora je I točka za samo jednu zraku (VN) kompleksa, dok se za bilo koju beskonačno daleku točku T kao I točku pokazuje da je ona vrh pramena usporednih zraka (VN) kompleksa kojima se Z točke nalaze duž tom vrhu pridružene zrake t (TK) kompleksa. No svaka takva točka T je i vrh pramena usporednih zraka (MK) kompleksa, pa izlazi da su pravci takvih pramenova ujedno zrake i (MK) i (VN) kompleksa. Kako je nadalje poznato da je svaka zraka (MK) kompleksa ujedno i zraka nekog takva pramena, slijedi da je i s v a k a zraka (MK) kompleksa određenog pramenom ploha $/F_k^2/$ ujedno i zraka (VN) kompleksa određenog tim pramenom ploha, pri čemu se središnja točka zrake (MK) kompleksa podudara sa Z točkom zrake (VN) kompleksa. Čitav (MK) kompleks 3. stupnja uronjen je prema tome u (VN) kompleks 8. stupnja, pa zajedničke zrake tih dvaju kompleksa čine novi $(MK-VN)$ kompleks 3. stupnja.

Odavde odmah slijedi da mora doći i do raspada (VN) kompleksa u kompleks 5. stupnja »čistih« zraka (VN) kompleksa i u $(MK-VN)$ kompleks 3. stupnja.

Jasno je da se to raspadanje mora javljati u gotovo svim skupovima zraka (VN) kompleksa određenih pod različitim uvjetima, ali je pri tome najinteresantnije proučavati na koji način kugla unutar pramena $[F_k^2]$ direktno utječe na taj raspad.

Navedimo neke rezultate.

Od triju zraka (VN) kompleksa, koje u bilo kojoj točki prostora imaju Z točku, jedna uvijek pripada $(MK-VN)$ kompleksu

Zrake (VN) kompleksa, koje imaju I točke na bilo kojem konačnom pravcu, određuju pravčastu plohu 6. stupnja koja se raspada u pravčastu plohu 5. stupnja zraka (VN) kompleksa sa Z točkama na prostornoj krivulja 4. reda i u pramen usporednih zraka $(MK-VN)$ kompleksa sa središnjim odnosno Z točkama duž pravca.

Nalazi li se međutim pravac kao skup I točaka beskonačno daleko, tada pridružene zrake (VN) kompleksa ne određuju više plohu 6. stupnja već kongruenciju 3. reda 1. razreda, i to zraka iz $(MK-VN)$ kompleksa, dok pridružene središnje odnosno Z točke određuju pravčastu plohu 2. stupnja.

Ploha 10. stupnja zraka (VN) kompleksa koje imaju Z točke na po volji odabranom konačnom pravcu raspada se u plohu 7. stupnja tih zraka s I točkama na krivulji 5. reda i u plohu 3. stupnja zraka $(MK-VN)$ kompleksa s I točkama na beskonačno dalekoj krivulji 2. reda.

Izvodnice pravčastih ploha pramena $/F_k^2/$ dvoznačne su zrake (VN) kompleksa i jednoznačne zrake (MK) kompleksa i čine kongruenciju 2. reda i 6. razreda unutar $(MK-VN)$ kompleksa.

Krivulja 8. razreda koju u bilo kojoj ravnini omataju zrake (VN) kompleksa raspada se u slučaju pramena ploha $/F_k^2/$ u krivulju 5. razreda tih zraka s I točkama na krivulji 4. reda i Z točkama na krivulji 5. reda i u krivulju 3. razreda zraka $(MK-VN)$ kompleksa s I točkama duž beskonačno dalekog pravca te ravnine i središnjim odnosno Z točkama na krivulji 2. reda.

Stožac 8. stupnja zraka (VN) kompleksa određenog pramenom ploha $/F_k^2/$ raspada se u stožac 5. stupnja zraka $(VN$ kompleksa sa I točkama duž prostorne krivulje 6. reda i Z točkama duž prostorne krivulje 7. reda i u stožac 3. stupnja zraka $(MK-VN)$ kompleksa s I točkama duž ravninske beskonačno daleke krivulje 3. reda i središnjim odnosno Z točkama duž prostorne krivulje 4. reda.

Bilo koje središte plohe pramena $/F_k^2/$ je ∞^1-značna I točka i ∞^1-značna Z točka pramena involutornih zraka (VN) kompleksa kojima se druga pridružena točka nalazi na tom središtu pridruženoj beskonačnoj dalekoj zraci (TK) kompleksa. Svaka je zraka takva pramena involutornih zraka (VN) kompleksa ujedno i zraka $(MK-VN)$ kompleksa.

Točke krivulje k_c^3 3. reda središta ploha pramena $/F_k^2/$ prema tome su singularne kako s obzirom na I točke tako i s obzirom na Z točke zraka (VN) kompleksa određenog tim pramenom ploha.

Usporedimo li to s istraživanjima u [1], uočavamo da u slučaju pramena ploha $/F^2/$ bilo koje središnje plohe sadrže samo tri involutorne zrake (VN) kompleksa, a krivulja k_c^3 je singularna samo s obzirom na I točke zraka (VN) kompleksa.

Po dva nasuprotna brida autopolarnog tetraedra pramena polarnih prostora (F_k^2) uvijek su međusobno okomita.

Svaka točka jednog brida ovog autopolarnog tetraedra je I točka one zrake (VN) kompleksa kojoj se Z točka nalazi na nasuprotnom bridu tetraedra, i to u točki najbližoj prvom bridu. Iznimku ne čine ni dva vrha tetraedra (središta singularnih ploha pramena $/F_k^2/$) koji se nalaze na tom bridu jer su oni, kao što je poznato, ∞^2-značne I točke svežanja zraka (VN) kompleksa sa Z točkama u tim vrhovima nasuprotnim ravninama autopolarnog tetraedra, kao ni beskonačno daleka točka toga brida, koja je ∞^1-značna I točka onog pramena zraka $(MK—VN)$ kompleksa, kojima se središnje odnosno Z točke nalaze duž nasuprotnog brida autopolarnog tetraedra.

Uz točke krivulje k_c^3 središta ploha pramena $/F_k^2/$ postoji prema tome u prostoru još šest izoliranih konačnih točaka, koje su Z točke pramenova zraka (VN) kompleksa određenog pramenom ploha $/F_k^2/$.

Primljeno za publikaciju 21. 11. 1975. u Razredu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.