

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

RAZRED ZA MATEMATIČKE, FIZIČKE I TEHNIČKE ZNANOSTI

VLASTA ŠČURIĆ-ČUDOVAN

DER ORIENTIERTE NIČE-SCHE STRAHLKOMPLEX
EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

Poseban otisak

»RAD« 370, knjiga XIV

ZAGREB 1975.

DER ORIENTIERTE NIČE — SCHE STRAHLKOMPLEX EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

2. Teil

Einleitung

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung meiner Arbeit: Der orientierte Niče-sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, 1. Teil [1].

Da in der vorliegenden Arbeit die sog. Involutorstrahlen dieses Komplexes untersucht werden, geben wir einige von den [1] bekannten Tatsachen und Sätzen an, die es uns erleichtern werden, den Gedankengang zu folgen.

In einem projektiven Raum, bzw. auf dem Modell des projektiven Raumes das in einem ergänzenden Euklidischen Raum gebaut ist, ist ein Flächenbüschel $|F^2|$ 2. Grades gegeben, und durch ihm das Büschel (F^2) der Polarräume dieser Flächen bestimmt.

Einem beliebigen Raumpunkt T ist ein Strahl

$$t = \varphi(T)$$

des bekannten tetraedralen Strahlkomplexes zugeordnet und die aus dem Punkt T auf den Strahl t gelegte Senkrechte, ist ein Strahl o des orientierten Niče-schen Komplexes, oder kürzer des »(VN) Komplexes«. Dieses Verfahren haben wir mit

$$o = \psi(T)$$

bezeichnet (Def. 2.). Der Punkt T ist ein I Punkt und der Punkt $t \cap o$ ist ein Z Punkt des Strahles o .

Def. 4. Zwischen den Raumpunkten besteht eine χ Abbildung, die einem beliebigen Punkt I eindeutig den Punkt Z zuordnet, bzw. so, dass

$$Z = \chi(I) \text{ für } Z = \varphi(I) \cap \psi(I) \text{ ist.}$$

Obwohl die Punkte $I \in o$ und $Z \in o$ die Berührungspunkte des Strahles o an zwei Flächen des Büschels $|F^2|$ sind, sind sie auf dem Strahl o im allge-

meinen nicht gleichwertig. Weil, wenn wir den Punkt Z des Strahles o als den I Punkt eines Strahles dieses Komplexes annehmen, dann ist der diesem I Punkt zugeordnete Strahl von dem Strahl o im allgemeinen verschieden.

Def. 5. Ein (VN) Komplexstrahl ist einem Raumpunkt zugeordnet, wenn sich in diesem Punkt sein I Punkt oder sein Z Punkt befindet.

Satz A 1. Die (VN) Komplexstrahlen, deren sich I Punkte auf einer beliebigen Geraden befinden, bilden eine Regelfläche 6. Grades, die die erwähnte Gerade als einfache Leitgerade enthält, während die Z Punkte dieser Strahlen eine Kurve z^5 5. Ordnung bilden.

Satz A 2. Einem beliebigen Raumpunkt sind vier komplanäre (VN) Komplexstrahlen zugeordnet, von denen einer in diesem Punkt den I Punkt und die drei anderen die Z Punkte haben.

Satz A 3. Die (VN) Komplexstrahlen, deren Z Punkte sich auf einer beliebigen Geraden befinden, bilden eine Regelfläche 10. Grades, auf der diese Gerade eine dreifache Leitgerade ist und die I Punkte dieser Strahlen eine Raumkurve i^7 7. Ordnung bilden.

Satz A 4. Den Punkten einer beliebigen Geraden, die die Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen bilden, sind die zugeordneten (TK) Komplexstrahlen die Trisekanten der I Punktraumkurve i^7 7. Ordnung dieser (VN) Komplexstrahlen, während die konjugierte Polaren dieser Geraden, bezüglich je einer der Flächen des Büschels $|F^2|$ die Quadrisekanten der Kurve i^7 sind.

Satz A 5. Jede Erzeugende jeder Regelfläche des Büschels $|F^2|$ ist ein zweifacher (VN) Komplexstrahl, mit zwei verschiedenen I Punkten und zwei verschiedenen Z Punkten.

Satz A 7. Die einen beliebigen Raumpunkt enthaltenden (VN) Komplexstrahlen, bilden einen Kegel 8. Grades, woraus gefolgert wird, dass der (VN) Komplex 8. Grades ist. Die I -Punktkurve dieser Strahlen ist 9. Ordnung und ihre Z -Punktkurve 11. Ordnung, mit einem dreifachen Punkt im Scheitelpunkt des Komplexkegels.

Satz A 8. Die I -Punktkurve jener (VN) Komplexstrahlen, die in einer Ebene liegen und eine Kurve der 8. Klasse einhüllen, ist eine Kurve 5. Ordnung, während die Z Punkte dieser Strahlen eine Kurve der 7. Ordnung bilden.

Satz A 11. Befinden sich die I - bzw. Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen in einer Ebene, so bilden die Z - bzw. I Punkte dieser Strahlen eine Fläche Z^7 7. Ordnung bzw. die Fläche I^5 5. Ordnung. Auf diese Weise ist auch räumliche Abbildung 7. bzw. 5. Ordnung bestimmt.

Bei den Untersuchungen der Örter der Singulärpunkte des (VN) Komplexes heben wir das Folgende hervor:

Satz B 1. Jeder Flächenmittelpunkt des Büschels $|F^2|$ ist ein ∞^1 — deutiger I Punkt der Strahlen eines (VN) Komplexstrahlbüschels. Die Z

Punkte dieser Strahlen befinden sich auf dem Fernstrahl des (TK) Komplexes, der diesem Mittelpunkt zugeordnet ist.

Def. 6. Der I Punkt und der Z Punkt desselben (VN) Komplexstrahles sind involutorisch zugeordnet, wenn gleichzeitig

$$Z = \chi(I) \text{ und } I = \chi(Z) \text{ gilt.}$$

Def. 7. Ein (VN) Komplexstrahl ist ein Involutorstrahl und damit auch ein Doppelstrahl dieses Komplexes, wenn sein I Punkt und sein Z Punkt involutorisch zugeordnet sind.

Satz B 2. Die Mittelpunkte der drei hyperbolischen Paraboloiden des Büschels $|F^2|$ sind die Scheitelpunkte des Ferninvolutorstrahlbüschels des (VN) Komplexes. Jeder solcher Mittelpunkt ist ein ∞^1 -deutiger I Punkt und ein ∞^1 -deutiger Z Punkt eines Büschels der (VN) Komplexstrahlen, denen sich die anderen ihnen zugeordneten Punkte auf der Verbindungsgeraden der übrigen zwei Mittelpunkte befinden.

Satz B 3. Der Mittelpunkt der Singulärfläche des Büschels $|F^2|$ ist ein ∞^2 -deutiger I Punkt und ein ∞^1 -deutiger Z Punkt der (VN) Komplexstrahlen. Jene dieser Strahlen, deren I Punkte in einem Mittelpunkt der Singulärfläche sind, bilden ein Bündel solcher Strahlen, die die Z Punkte in der Ebene der übrigen drei Mittelpunkte der Singulärflächen haben. Die (VN) Komplexstrahlen die die Z Punkte im Mittelpunkt der Singulärfläche haben, sind die Erzeugenden eines Kegels 3. Grades, während die I -Punktkurve 3. Ordnung dieser Strahlen die übrigen drei Mittelpunkte der Singulärflächen des Büschels $|F^2|$ enthält und in der Ebene dieser Mittelpunkte liegt.

Satz B 4. Die (VN) Komplexstrahlen, die den Z Punkt im Mittelpunkt der Singulärfläche des Büschels $|F^2|$ haben, sind die Involutorstrahlen dieses Komplexes.

Satz B 6. Jeder Punkt T der Grundkurve k^4 des Büschels $|F^2|$ ist ein ∞^1 -deutiger I Punkt und ein ∞^1 -deutiger Z Punkt der Strahlen des (VN) Komplexes. Alle (VN) Komplexstrahlen die in demselben Punkt T der Kurve k^4 die I - und Z Punkte haben, bilden ein Bündel solcher Strahlen in der Ebene die senkrecht auf der Tangente t der Kurve k^4 im Punkt T steht.

Satz B 8. In jeder beliebigen Ebene befinden sich jene vier (VN) Komplexstrahlen, deren I - und Z Punkte zusammenfallen. Diese vier Punkte befinden sich in den Schnittpunkten der erwähnten Ebene mit der Grundkurve k^4 des Büschels $|F^2|$. Diese Strahlen sind in beobachteter Ebene einfach und deshalb weder zweideutig, noch zweifällig und auf keinen Fall involutorisch.

Satz C 12. In der Fernebene besteht eine Kurve μ 3. Ordnung 1. Geschlechtes, die ein Ort der ∞^1 -deutigen I Punkte der (VN) Komplexstrahlen ist. Jeder Punkt dieser Kurve ist der I Punkt für ein Bündel der

(VN) Komplexstrahlen, deren zugeordnete Z Punkte sich auf dem Strahl des (TK) Komplexes befinden, der dem betreffenden Punkt der Kurve μ zugeordnet ist. Die Kurve μ enthält auch die drei Fernmittelpunkte der hyperbolischen Paraboloiden des Büschels $|F^2|$.

Satz C 16. Die I -Punktfläche I^5 5. Ordnung der (VN) Komplexstrahlen, deren Z Punkte sich in der Fernebene befinden, zerfällt in die Fernebene und in die »Fläche \mathcal{A} « 4. Grades, die ∞^1 Paare der konjugiert imaginären Geraden 1. Art, und ∞^2 Paare der konjugiert imaginären Geraden 2. Art bilden. Alle diese Geraden sind die Bisekanten der Flächenmittelpunktraumkurve k_c^3 des Büschels $|F^2|$, die auf der »Fläche \mathcal{A} « reel und zweifach ist.

DIE KONGRUENZ DER INVOLUTORSTRAHLEN DES (VN) KOMPLEXES

Unter allen (VN) Komplexstrahlen nehmen jene zweifachen Strahlen dieses Komplexes denen der I Punkt und der Z Punkt involutorisch zugeordnet sind, eine besondere Stellung ein. Wenn der I Punkt und der Z Punkt eines solchen Strahles ihre Lage tauschen, ändert sich nur die Strahlorientierung. Die Strahlen mit derartigen Eigenschaften haben wir in [1] als Involutorstrahlen des (VN) Komplexes bezeichnet. /Def. 6. und 7./

D. BEISPIELE DER BISHER BEKANNTEN INVOLUTORSTRAHLEN DES (VN) KOMPLEXES

a) Die Ferngeraden

Wir fanden in mehreren Fällen, dass der I Punkt des (VN) Komplexstrahles o ein Fernpunkt war und zeigten, dass immer in der Fernebene der ihm zugeordnete Punkt

$$Z = \chi(I)$$

besteht. /[1], Abt. B 1., Satz B 2., Abt. C 5. a) b) /. Nehmen wir an, dass dieser Z Punkt ein I_1 Punkt eines neuen (VN) Komplexstrahles o_1 ist, so folgt auf Grund der Polareigenschaften, dass

$$Z_1 = \chi(I_1) \text{ wo } Z_1 \equiv I \text{ ist,}$$

und auf Grund der Definition 7. folgt:

Satz D 1.

*Jede Ferngerade ist ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes.
Bzw.*

Satz D 2.

Jeder Punkt der Fernebene ist einem Ferninvolutorstrahl des (VN) Komplexes als sein I Punkt oder als sein Z Punkt zugeordnet.

Die Ausnahme bilden teilweise diejenige Punkte der Fernkurve μ 3. Ordnung /Satz C 12./ die die I Punkte, ausser für die erwähnten Ferninvolutorstrahlen, auch für die Büscheln der Strahlen dieses Komplexes sind mit den Z Punkten längs der Strahlen

$$t = \varphi(I) \text{ für jeden } I \in \mu.$$

Es sei noch erwähnt, dass innerhalb der Ferninvolutorstrahlen des (VN) Komplexes auch drei Büschel derartiger Strahlen bestehen, denen die Scheitelpunkte in den Mittelpunkten U, V, Y der hyperbolischen Paraboloiden des Büschels $|F^2|$ liegen. /Satz B 2./

b) *Die Geraden, die den Mittelpunkt der Singulärfläche des Büschels $|F^2|$ enthalten*

In Abt. B 1. c) wurde es gezeigt, dass jeder Mittelpunkt der Singulärfläche des Büschels $|F^2|$ (Eckpunkt des Polartetraeders $ABCD$), ein Träger des Bündels jener (VN) Komplexstrahlen ist, die in diesem Punkt den I Punkt haben, während sich seine Z Punkte in der Ebene der übrigen drei Mittelpunkte der Singulärflächen befinden. Jeder solcher Mittelpunkt ist der Scheitelpunkt eines Kegels 3. Grades jener (VN) Komplexstrahlen, die in diesem Mittelpunkt den Z Punkt haben und denen die I Punkte längs jener Kurve m_n ($n = 1, 2, 3, 4$) liegen, die die übrigen drei Mittelpunkte enthält und sich ganz in der Ebene dieser Mittelpunkte befindet. /Satz B 3./ Aus diesem Grunde und der Definition 7 haben wir im Satz B 4. geschlossen, dass die Erzeugenden der erwähnten vier Kegel 3. Grades, die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes sind.

Jene Involutorstrahlen, die den Eckpunkt A des Polartetraeders enthalten, durchdringen seine Seitenebene (BCD) in der Kurve m_1 . Der Strahl

$$a_i = \varphi(A_i) \text{ wo } A_i \in m_1 \text{ ist}$$

enthält, wie bekannt, den Punkt A und steht senkrecht auf dem Strahl AA_i des (VN) Komplexes. Der Strahl a_i schneidet die Ebene (BCD) im Punkt A_i^x und der diesem Punkt zugeordnete Strahl des (TK) Komplexes muss die Punkte A und A_i enthalten. Dies bedeutet, dass die Senkrechte die aus dem Punkt A_i^x auf den Strahl AA_i des (TK) Komplexes gezogen ist, diesen Strahl im Punkt A schneidet, bzw. dass die Verbindungsgerade $A_i^x A$ auch ein (VN) Komplexstrahl ist, deren I Punkt sich in A_i^x und der Z Punkt in A befindet. Daraus folgt, dass auch der Punkt A_i^x auf der Kurve m_1 liegt. Da die Punkte A_i und A_i^x die Berührungspunkte ihrer Verbindungsgeraden mit zwei Flächen des Büschels $|F^2|$ sind, folgt, dass die Kurve m_1 durch jene Punkte der Ebene (BCD) gebildet wird, die mit dem Punkt A die Eck-

punkte der rechtwinkligen berührenden Dreiecke ihrer Ebene geben, welche im Eckpunkt A den rechten Winkel haben.

Der dritte Schnittpunkt der Geraden $A_i A_i^*$ mit der Kurve m_1 ist ein Berührungspunkt einer anderen Geraden, die eine weitere Fläche des Büschels $|F^2|$ berührt.

Daraus folgt, dass die den Punkten der Kurve m_1 zugeordneten (TK) Komplexstrahlen die Erzeugenden eines Kegels (A, m_1) 3. Grades bilden, mit dem Scheitelpunkt im Punkt A . Wie bekannt, enthält die Kurve m_1 auch die Eckpunkte B, C , und D . Nehmen wir diese Punkte in erster Reihe als Punkte der Kurve m_1 an, und erst in zweiter als die Eckpunkte des Polartetraeders, dann bilden die ihnen zugeordneten (TK) Komplexstrahlen drei Büschel solcher Strahlen des Scheitelpunktes A , die sich in drei diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seitenebenen des Polartetraeders befinden.

Die Fernpunkte der Kurve m_1 befinden sich in Fernschnittpunkten der Ebene (BCD) mit der Kurve μ . Die diesen Punkten zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sind die Träger der Z Punkte jener drei Büschel der (VN) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen I Punkt in je einem dieser Fernpunkte der Kurve μ haben. [Abt. C 5 a]. Aus diesem Grunde können wir behaupten:

Ist die Kurve m_1 3. Ordnung die I -Punktkurve der (VN) Komplexstrahlen, so zerfällt die erhaltene Regelfläche, deren solche Strahlen ein Erzeugendensystem bilden, in:

1. einen Kegel 3. Grades dieser Strahlen mit gemeinsamen Z Punkt in Scheitelpunkt A und den I Punkten längs der Kurve m_1 ;
2. drei Kegel 2. Grades der (VN) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen I Punkt im Eckpunkt B , bzw. C . bzw. D dieser Kegel haben, während die Z Punkte solche Kreise bilden, die in den diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seitenebenen des Polartetraeders liegen; und
3. drei Büschel paralleler (VN) Komplexstrahlen, die die gemeinsame I Punkte in gemeinsamen Fernpunkten der Kurven m_1 und μ haben und deren Z Punkte auf derjenigen (TK) Komplexstrahlen liegen, die diesen Fernpunkten der Kurve m_1 zugeordnet sind.

Hieraus folgt: Obwohl jedem Punkt der Kurve m_1 jener Involutionstrahl des (VN) Komplexes zugeordnet ist, der in diesem Punkt den I Punkt hat (die Erzeugenden des Kegels (A, m_1)), bestehen auch derartige (VN) Komplexstrahlen, die am m_1 den I Punkt haben, aber keine Involutionstrahlen sind. Solche Punkte sind die gemeinsamen Punkte der Kurve m_1 mit den Punkten der Singulärkurve μ und k_c^3 .

Die erwähnten Behauptungen gelten für jeden der Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ und für jede der Kurven m_n ($n = 1, 2, 3, 4$) in den Seitenebenen dieses Tetraeders. Aus diesem Grunde folgt:

Satz D 3.

In jeder Seitenebene des Polartetraeders $ABCD$ besteht je eine Kurve m_n ($n = 1, 2, 3, 4$) 3. Ordnung, die der Ort der Berührungspunkte solcher Ebenen an den Flächen des Büschels $|F^2|$ ist, dass jede dieser Ebenen die

einen Eckpunkt des Tetraeders enthält, berührt noch zwei Flächen dieses Büschels in den Eckpunkten eines rechtwinkligen Dreiecks, der im Eckpunkt des Tetraeders den rechten Winkel hat.

Satz D 4.

Alle Kurven m_n ($n = 1, 2, 3, 4$) 3. Ordnung in den Seitenebenen des Tetraeders $ABCD$ haben das Geschlecht 1.

Satz D 5.

Jeder Mittelpunkt der Singulärfläche des $|F^2|$ Büschels ist der Scheitelpunkt eines Kegels 3. Grades, dem die Erzeugenden die Involutionstrahlen des (VN) Komplexes sind. Während sich je einer der involutorzugeordneten I - Z Punkte dieser Strahlen im Eckpunkt des Tetraeders befindet, befindet sich der andere Punkt auf der Kurve m_n ($n = 1, 2, 3, 4$) 3. Ordnung, die in der diesem Eckpunkt gegenüberliegenden Seitenebene des Tetraeders liegt.

2. DIE INVOLUTORSTRAHLEN DES (VN) KOMPLEXES DIE DURCH DIE KURVEN μ UND k_c^3 VERBUNDEN SIND

In $|B 5. a)|$ ist es gezeigt, dass in der Fernebene eine solche Kurve μ 3. Ordnung besteht, die nicht nur ein Ort der I Punkte jener (VN) Komplexstrahlen ist, denen sich die zugeordneten Z Punkte in der Fernebene befinden, sondern auch ein Ort der ∞^1 -deutigen I Punkte jener (VN) Komplexstrahlen ist, deren sich die Z Punkte längs der Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden } I \in \mu$$

finden.

Nehmen wir auf der Kurve μ einen beliebigen Punkt T , so ist der zugeordnete Strahl

$$t_T = \varphi(T)$$

eine Bisekante der Kurve k_c^3 . Diese Bisekante enthält die Mittelpunkte O_1 und O_2 jener zwei Flächen des Büschels $|F^2|$, für die

$$T = t_{o_1} \cap t_{o_2} \quad \text{für } t_{o_n} = \varphi(O_n) \quad (n = 1, 2)$$

gilt. Da die dem Fernpunkt R des Strahles t_T bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnete Polare p_R den Punkt T enthält ($C 5. a$)), muss auch die dem Punkt T zugeordnete Polare p_T bezüglich des absoluten Kegelschnittes, den Punkt R enthalten. Es folgt unmittelbar: da dem Punkt R der zugeordnete Strahl t_R des (TK) Komplexes den Punkt T der Kurve μ enthalten muss, muss sich auch der Punkt R auf der Kurve μ befinden.

Satz D 6.

Der jedem Punkt der Fernkurve μ zugeordnete (TK) Komplexstrahl schneidet diese Kurve.

Der Strahl t_T des (TK) Komplexes ist ein geometrisches Gebilde der Z Punkte desjenigen Büschels (T) der (VN) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen I Punkt im Punkt T der Kurve μ haben [Satz C 12.]. Wünschen wir jedoch diejenigen Strahlen des (VN) Komplexes zu bestimmen, die die I Punkte auf der Geraden t_T haben, müssen wir zuerst die diesen Punkten zugeordneten (TK) Komplexstrahlen finden. Alle diese Strahlen enthalten den Punkt T und bilden die Erzeugenden eines hyperbolischen Zylinders T^2 2. Grades, welchen die Fernebene in den Erzeugenden

$$t_{o_1} = \varphi(O_1), \quad t_{o_2} = \varphi(O_2) \quad O_1, O_2, \in k_c^3$$

schneidet. Die aus den Punkten der Geraden t_T auf die ihnen zugeordneten Erzeugenden dieses Zylinders gelegte Senkrechten, liegen alle in derselben Ebene, die durch die Polare p_T des Punktes T bezüglich des absoluten Kegelschnittes und durch die Gerade t_T bestimmt ist. Dies bedeutet, dass die Z Punkte jener (VN) Komplexstrahlen, denen die I Punkte auf der Geraden t_T liegen, die Schnittpunkte der Erzeugenden des hyperbolischen Zylinders T^2 mit der Ebene (t_T, p_T) sind, die auf diesen Erzeugenden senkrecht steht. Die Z Punkte dieser Strahlen bilden also eine Hyperbel. Die Z -Punktkurve 5. Ordnung jener (VN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf dem Strahl t_T befinden, zerfällt in die erwähnte Hyperbel und in die Geraden t_{o_1} , t_{o_2} und t_R . Diese drei Geraden sind die Örter der Z Punkte derjenigen (VN) Komplexstrahlen, die die I Punkte in Punkten O_1 , O_2 und R haben.

Innerhalb aller (TK) Komplexstrahlen, die den Punkten der Geraden t_T zugeordnet sind, befinden sich auch jene zwei Erzeugenden des Zylinders T^2 2. Grades, die diese Gerade t_T in zwei Punkten K und L schneiden. Infolgedessen sind die Verbindungsgeraden

$$LT = \varphi(K) \quad \text{und} \quad KT = \varphi(L).$$

Da diese beiden Strahlen auch senkrecht auf der Geraden t_T stehen, folgt, dass auch die Gerade t_T ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes ist, und die ihm zugeordneten I - Z Punkte in den Punkten K und L liegen.

Satz D 7.

Jeder (TK) Komplexstrahl der einem Punkt der Fernkurve μ 3. Ordnung zugeordnet ist, ist ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes.

Auf Grund der stetigen Verbindung der Punkte der Kurve μ können wir behaupten, dass auch die diesen Punkten zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bzw. Involutorstrahlen des (VN) Komplexes stetig verbunden sind und dass sie alle eine Fläche bilden, die als eine \mathcal{P}_1 Fläche bezeichnet sei.

a) Die Fläche \mathcal{P}_1

Jedem Punkt der Kurve μ 3. Ordnung ist ein Strahl des (TK) Komplexes zugeordnet. Jede Erzeugende der Fläche \mathcal{P}_1 ist also eine Unisekante der Kurve μ , aber sie ist auch eine Bisekante der Flächenmittelpunktraumkurve

k_c^3 3. Ordnung. Zwischen den Punkten der Kurve μ und k_c^3 besteht es demgemäss eine ein-zweideutige Zuordnung. Wir müssen jedoch in Betracht nehmen, dass drei Fernpunkte der Kurve k_c^3 auf der Kurve μ liegen also von dem ganzen Erzeugniss müssen drei Geradenbüschel in der Fernebene abgenommen werden. Dem bekannten Chasles-en Korrespondenzprinzip nach folgt, dass der Grad der Fläche \mathcal{P}_1 gleich sechs sein muss.

Das gleiche Resultat können wir auch folgenderweise bekommen. Die gesuchte Fläche ist ein Erzeugniss des Komplexes der Unisekanten der Kurve μ 3. Ordnung und der Kongruenz (1. 3.) der Bisekanten der Kurve k_c^3 . Da aber die Kurven μ und k_c^3 drei gemeinsame Fernpunkte haben, müssen von diesem Erzeugniss drei Kegel (Zylinder) 2. Grades abgenommen werden, denen die Erzeugenden Bisekanten der Kurve k_c^3 sind und die Scheitelpunkte in drei erwähnten Fernpunkten haben. Dem Chasles-en Korrespondenzprinzip nach folgt wie erwartet, dass die Fläche \mathcal{P}_1 6. Grades ist. $/3(1 + 3) - 3 \cdot 2/$.

Diese Fläche schneidet die Fernebene in der Kurve μ 3. Ordnung und in drei Fernverbindungsgeraden der Mittelpunkte der hyperbolischen Paraboloides des Büschels $/F^2/$.

Auf der Fläche \mathcal{P}_1 befindet sich die Kurve μ als einfache, während die Kurve k_c^3 auf ihr eine dreifache ist. Nämlich jedem Mittelpunkt O einer Fläche des Büschels $/F^2/$ ist ein Fernstrahl t_o des (TK) Komplexes zugeordnet der die Kurve μ in drei Punkten schneidet. Der jedem dieser Punkte zugeordnete und den Mittelpunkt O enthaltende (TK) Komplexstrahl ist auch ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes und eine Erzeugende der Fläche \mathcal{P}_1 . Da jeden Punkt der Kurve k_c^3 je drei Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_1 enthalten, ist diese auf der Fläche \mathcal{P}_1 dreifach. Keine Ausnahme bilden die Mittelpunkte der Singulärflächen des Büschels $/F^2/$ (bzw. die Eckpunkte des Polartetraeders $ABCD$), da wir als den (TK) Komplexstrahl, der dem betreffenden Mittelpunkt-eckpunkt zugeordnet ist, die Ferngerade jener Seitenebene des Tetraeders betrachten werden, die diesem Eckpunkt gegenüber liegt. Jeden der drei Fernpunkte der Kurve k_c^3 enthalten eine endliche und zwei Fernerzeugenden der Fläche \mathcal{P}_1 .

Satz D 8.

Die Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_1 , die den Punkten der Fernkurve μ 3. Ordnung als zugeordnete (TK) Komplexstrahlen gehören und zugleich Involutorstrahlen des (VN) Komplexes sind, bilden eine Regelfläche 6. Ordnung. Dieser Fläche gehört die Kurve μ als eine einfache und die Flächenmittelpunktraumkurve k_c^3 als eine dreifache.

Alle I-Z Punkte die jenen Involutorstrahlen des (VN) Komplexes zugeordnet sind, die auch die Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_1 sind, sind stetig auf dieser Fläche verbunden und bilden eine Kurve η_1 . Die Ordnung dieser Kurve werden wir mittels der Idee bestimmen, dass die Fläche \mathcal{P}_1 6. Grades ein Erzeugnis ist, das durch die Kurve η_1 bestimmt wird.

Jede Erzeugende der Fläche \mathcal{P}_1 ist eine Bisekante der Kurve η_1 . Jedem Punkt E der Kurve η_1 ist nämlich ein Punkt E_1 derselben Kurve bestimmt,

so dass die Verbindungsgerade EE_1 die Erzeugende der Fläche \mathcal{P}_1 ist. Da es auch umgekehrt Geltung hat, haben wir jede Erzeugende, die durch diese Reihen bestimmt ist, zweimal in Betracht genommen. Wie bekannt, fallen die Punkte E und E_1 mit den Punkten der Grundkurve k_4 4. Ordnung des Büschels $|F^2|$ zusammen. Da die Kurve k^4 die Fläche \mathcal{P}_1 6. Ordnung in 24 Punkten durchdringt, folgt, dass wir von diesem Erzeugnis 24 jener Strahlbüschel abnehmen müssen, die durch diese Punkte bestimmt sind. Der bekannten Chasles Relation nach folgt, dass in unserem Falle $n_1 = n_2 = n$ ist, da es sich um dieselbe Kurve η_1 handelt, die die Ordnung n hat und $a_1 = a_2 = 1$ ist, während $w = 24$ gleich ist. Da ausserdem jede Erzeugende zweimal in Betracht genommen ist, folgt, dass $n = 18$ ist. So bekommen wir den

Satz D 9.

Die Kurve η_1 der I-Z Punkte aller Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_1 ist 18. Ordnung.

Da jede Ebene diese Kurve in 18 Punkten schneidet, gilt das auch für die Fernebene. Diese Punkte können sich nur auf der Fernkurve der Fläche \mathcal{P}_1 befinden, die, wie bekannt, in die Kurve μ und in drei Verbindungsgeraden der Fernmittelpunkte U , V und Y der hyperbolischen Paraboloid zerfällt. Jeder dieser Mittelpunkte ist ein zweifacher Punkt der Kurve η_1 , weil z. B. der Punkt U ein I und Z Punkt für Involutorstrahl UV ist, was auch für den Involutorstrahl UY gilt. Diese Punkte geben uns sechs Durchstosspunkte der Kurve η_1 mit der Fernebene.

Die übrigen Fernpunkte der Kurve η_1 werden wir folgenderweise bestimmen. Ob die Kurve η_1 einen Fernpunkt haben könnte, bedeutet, dass der (VN) Komplexstrahl den I oder Z Punkt in der Fernebene haben müsste und der Z oder I Punkt dieses Strahles sich im Mittelpunkt der Fläche des $|F^2|$ Büschels befinden müsste. Wenn sich weiterhin der Z Punkt dieses Strahles im Flächenmittelpunkt befindet, muss sein I Punkt auf der Kurve μ liegen.

Einem Punkt T der Kurve μ sei jener Strahl des (TK) Komplexes zugeordnet, der die Mittelpunkte O_1 und O_2 zweier Flächen des Büschels $|F^2|$ enthält. Der Punkt O_1 soll aber auf der Kurve η_1 liegen. Der Fernstrahl

$$t_{o_1} = \varphi(O_1)$$

enthält den Punkt T und schneidet die Kurve μ in noch zwei Punkten, die wir mit P und S bezeichnen. Obwohl die Gerade t_{o_1} ein Ort der Z Punkte jener (VN) Komplexstrahlen ist, denen sich die I Punkte im Punkt O_1 befinden, könnten die Fernpunkte der Kurve η_1 nur in den Punkten P und S liegen. Auf Grund dieser Voraussetzung, dass der Punkt P auf der Kurve η_1 liegt, folgt dass die Verbindungsgerade

$$O_1S = \varphi(P)$$

auch die Erzeugende der Fläche \mathcal{P}_1 ist, aber auch

$$O_1P = \varphi(S)$$

ist, was bedeutet, dass die beiden Punkte S und P die Fernpunkte der Kurve η_1 sein müssen. Man kann für die Punkte P und S sagen, dass sie konjugierte Punkte bezüglich der Kurve μ sind.

Definition 8.

Zwei Punkte sind bezüglich der Kurve μ konjugiert, wenn sie gleichzeitig bezüglich des Fernkurvenbüschels f_n^2 , in dem die Fernebene das Flächenbüschel $|F^2|$ schneidrt, konjugiert sind, wie auch bezüglich des absoluten Kegelschnittes.

Auf Grund des Satzes *D 6.* und der Definition 8 folgt, dass der jedem Punkt der Kurve μ konjugierte Punkt bezüglich dieser Kurve wieder auf der Kurve μ liegt.

Wenn wir die Zahl der übrigen Durchstosspunkte der Kurve η_1 mit der Fernebene bestimmen wollen, müssen wir feststellen, wie oft geschieht es, dass ein Paar der konjugierten Punkte bezüglich der Kurve μ auf demselben (TK) Komplexstrahl in der Fernebene liegt. Jedem Punkt der Kurve μ ist ein-eindeutig der Punkt derselben Kurve zugeordnet, aber da es auch umgekehrt Geltung hat, ist jede solche Verbindungsgerade eine zweifache. Alle diese Verbindungsgeraden bilden eine Kurve, deren Klasse drei wir nach Chasles bestimmen können $\frac{1}{2} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = n = 3/$.

Da die Kurve 2. Klasse der (TK) Komplexstrahlen in der Fernebene und diese Kurve 3. Klasse sechs gemeinsame Strahlen haben und auf jedem von diesen sich je zwei Punkte der Kurve η_1 befinden, haben wir auch die übrigen zwölf Fernpunkte dieser Kurve bestimmt.

Das hat weiterhin die Folgerung, dass sechs endliche Flächenmittelpunkte, denen diese (TK) Komplexstrahlen zugeordnet sind, die zweifachen Punkte der Kurve η_1 sind. Da ein beliebiger Raumpunkt der I Punkt nur für einen (VN) Komplexstrahl ist, schliessen wir, dass sich die zweifachen Punkte der Kurve η_1 nur in den Mittelpunkten der Flächen des $|F^2|$ Büschels befinden können.

Satz D 10.

Die Kurve η_1 18. Ordnung der zugeordneten I-Z Punkte auf der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, die die Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_1 sind, hat neun zweifache Punkte in den Mittelpunkten der Flächen des Büschels $|F^2|$, von deren Mittelpunkten sich drei in der Fernebene befinden.

Es ist nun möglich auch den Ort der Z Punkte jener (VN) Komplexstrahlen zu bestimmen, deren I Punkte in der Fernebene liegen. Wie bekannt, jedem Punkt dieser Ebene, den wir als I Punkt betrachten, ist der zugeordnete

Z Punkt auch ein Fernpunkt, bzw. jede Gerade der Fernebene ist ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes. Eine Ausnahme stellen nur die Punkte der Kurve μ dar, da jeder dieser Punkte ein ∞^1 -deutiger I Punkt, für das Bündel der (VN) Komplexstrahlen im Endlichen ist. Daraus folgt:

Satz D 11.

Die Fläche 7. Ordnung der Z Punkte jener (VN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte in der Fernebene befinden, zerfällt in die Fernebene selbst und in die Fläche \mathcal{P}_1 6. Ordnung. Diese Fläche ist ein Ort der Z Punkte jener Strahlen dieses Komplexes, die die I Punkte auf der Kurve μ haben.

Die Kurve μ 3. Ordnung und der absolute Kegelschnitt schneiden sich in drei Paaren der konjugiertimaginären Punkte. Die diesen Punkten zugeordneten (TK) komplexstrahlen (gemeinsame Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_1 und der »Fläche \mathcal{A}_1 « /Satz C 16./ sind konjugiertimaginäre Geraden 1. oder 2. Art. Auf Grund der Untersuchungen in /C 5. b/ kann man behaupten:

Satz D 12.

Es besteht eine Menge von sechs »Bündeln« solcher Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, dass die Strahlen je zweier zugeordneten Bündel ∞^1 Minimalgeraden 1. Art und ∞^2 Minimalgeraden 2. Art bilden. Die I-Z Punkte dieser (VN) Komplexstrahlen befinden sich auf den konjugiertimaginären Geraden 1. bzw. 2. Art, die den konjugiertimaginären Schnittpunkten der Kurve μ und des absoluten Kegelschnittes zugeordnete (TK) Komplexstrahlen sind. Die Z-I Punkte der betrachteten (VN) Komplexstrahlen liegen in den erwähnten Schnittpunkten dieser Kurven.

Die Flächen \mathcal{P}_1 und \mathcal{A} dringen in einer Kurve 24. Ordnung durch, die in drei Paare konjugiertimaginären (TK) Komplexstrahlen zerfällt, die den Schnittpunkten der Kurve μ und des absoluten Kegelschnittes zugeordnet sind und in die Kurve k_c^3 3. Ordnung die auf der Fläche \mathcal{P}_1 dreifach und auf der »Fläche \mathcal{A} « zweifach ist, so dass sie als die Durchdringungskurve die Ordnung 18 gibt.

b) Die Fläche \mathcal{P}_2

Wir können noch auf eine Weise den Kurven μ und k_c^3 die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes zuordnen. Da diese Strahlen auch stetig verbunden sind, werden sie eine neue Fläche \mathcal{P}_2 bilden.

Jedem Mittelpunkt O der Flächen des Bündels / F_2 / der zugeordnete Fernstrahl

$$t_o = \varphi(O)$$

schneidet, wie bekannt, die Kurve μ in drei Punkten. Der, jedem dieser Schnittpunkte zugeordnete (TK) Komplexstrahl enthält den Punkt O und ist eine Senkrechte auf die Verbindungsgerade dieses Punktes mit

dem Punkt O (C 5. a). Dies bedeutet, dass jeder von den drei Schnittpunkten $t_o \cap \mu$ ein I Punkt des (VN) Komplexstrahles ist, dem sich der Z Punkt in O befindet. Da der Punkt O ein ∞^1 -deutiger I Punkt jener (VN) Komplexstrahlen ist, denen sich die Z Punkte am t_o befinden, folgt, dass sich in der Ebene (O, t_o) drei jene Involutorstrahlen des (VN) Komplexes befinden, deren zugeordnete Punkte sich im Punkt O bzw. auf der Kurve μ befinden.

Jeden Punkt der Kurve μ enthalten je zwei (TK) Komplexstrahlen, die den Mittelpunkten je zweier Flächen des $|F^2|$ Büschels zugeordnet sind. Es folgt, dass jeder Punkt der Kurve μ der I Punkt für zwei (VN) Komplexstrahlen ist, denen sich die Z Punkte in den erwähnten Mittelpunkten befinden. Wenn wir das in $|C$ 5. a) Erwähnte berücksichtigen, folgt, dass jeder solcher (VN) Komplexstrahl auch ein Involutorstrahl ist.

Alle solche Involutorstrahlen des (VN) Komplexes sind die Erzeugenden einer Fläche \mathcal{P}_2 . Der Grad dieser Fläche wird wieder mittels der Punktzuordnung der Kurven μ und k_c^3 bestimmt. Jedem Punkt der Kurve μ sind zwei Punkte der Kurve k_c^3 zugeordnet und jedem Punkt der Kurve k_c^3 sind drei Punkte der Kurve μ zugeordnet. Da die Kurven μ und k_c^3 drei gemeinsame, sich selbst zugeordnete Punkte haben, müssen wir nach Chasles, drei Büschel (U) , (V) , und (Y) der Ferninvolutorstrahlen des (VN) Komplexes abnehmen, da sie nach der Definition der Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_2 , keine Erzeugenden dieser Fläche sind. Wir bekommen daraus, dass der Grad der Fläche \mathcal{P}_2 gleich zwölf ist.

Die Kurve μ ist demnach auf der Fläche \mathcal{P}_2 12. Grades eine zweifache und die Kurve k_c^3 eine dreifache.

Die Fernebene schneidet diese Fläche in zweifacher Kurve μ die als die Schnittkurve die Ordnung sechs gibt, während der Rest bis zu der Schnittkurve 12. Ordnung in dieser Ebene folgenderweise zu bekommen ist. Sind die Punkte U , V und Y die Fernpunkte der Kurve k_c^3 , dann schneidet die Verbindungsgerade VY die Kurve μ ausser in den Punkten V und Y in noch einem Punkt K . Den Punkt U , als den Punkt der Kurve k_c^3 , enthalten die Erzeugenden UY , UV und UK der Fläche \mathcal{P}_2 . Da alle Erzeugenden dieser Fläche die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes sind, ist auch jede Verbindungsgerade UY , UV und UK auf der Fläche \mathcal{P}_2 einfach. Die noch drei gesuchten Fernerzeugenden sind die Verbindungsgeraden der Eckpunkte des Polardreiecks UVY mit den dritten Schnittpunkten der ihnen gegenüberliegenden Kante, mit der Kurve μ . Die Fernkurve der Fläche \mathcal{P}_2 zerfällt demnach in die zweifache Kurve μ und in sechs Geraden.

Die den Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_2 , als den Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, zugeordneten I - Z Punkte bilden ausschliesslich die dreifache Kurve k_c^3 und die zweifache Kurve μ , woraus folgt, dass der Kurve η_2 dieser I - Z Punkte 15. Ordnung gehört.

Satz D 13.

Die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, denen sich die zugeordneten I - Z Punkte auf der Fernkurve μ 3. Ordnung und auf der Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung befinden, bilden eine Regelfläche \mathcal{P}_2

12. Grades. Die Kurve μ ist auf der Fläche \mathcal{P}_2 zweifach und die Kurve k_c^3 dreifach. Die Kurve η_2 der zugeordneten I-Z Punkte aller Erzeugenden dieser Fläche ist demnach eine zerfallene Kurve 15. Ordnung.

c) Die Flächen \mathcal{P}_3

Jede Fläche F des $|F^2|$ Büschels hat drei untereinander senkrechte Achsen, die sich im Mittelpunkt dieser Fläche schneiden. Die Eigenschaft eines beliebigen Punktes T einer Achse s der Fläche F ist, dass die ihm zugeordnete Polarebene bezüglich dieser Fläche F , senkrecht zu dieser Achse s steht. Die den Punkten der Achse s zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bilden ein Erzeugendensystem eines hyperbolischen Paraboloides, da sie alle mit jener Ebene parallel sind, die senkrecht auf der Achse s steht. Zwei dieser Erzeugenden t_1 und t_2 schneiden diese Achse in den Punkten T_1 und T_2 . Der Strahl

$$t_1 = \varphi(T_1)$$

schneidet die Achse s im Punkt T_2 , steht aber auch auf dieser Achse senkrecht. Der Strahl

$$o_1 = \psi(T_1)$$

fällt danach in die Achse s und ihr Z Punkt kann sich nur im Punkt T_2 befinden. Betrachten wir den Punkt T_2 als ein I Punkt eines neuen Strahles o_2 des (VN) Komplexes, dann folgt dass

$$T_1 = \chi(T_2)$$

ist, was weiterhin bedeutet, dass jede Achse s jeder Fläche F des $|F^2|$ Büschels ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes ist.

V. Niče hat in [4] gezeigt, dass alle Achsen der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades eine Fläche 9. Grades bilden. Die Idee des Beweises dafür besteht in Folgendem:

Jeden beliebigen Punkt der Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung enthalten die drei Achsen derselben Fläche des $|F^2|$ Büschels. Die Fernpunkte dieser Achsen sind die Eckpunkte des gemeinsamen Polardreiecks, den der absolute Kegelschnitt mit der Fernkurve der betreffenden Fläche des $|F^2|$ Büschels bestimmt. Die Fernpunkte aller solchen Achsen der Flächen des $|F^2|$ Büschels sind stetig untereinander verbunden und bilden in der Fernebene die bekannte Jacobi-sche Kurve u^3 3. Ordnung, die der Ort der Eckpunkte der Polardreiecke eines Netzes der Kegelschnitte ist, den die Fernbüschelkurven f_n^2 und der absolute Kegelschnitt bilden.

Während den Punkt T der Kurve k_c^3 drei Achsen der Inzidenzfläche enthalten, können die Punkte der Kurve u^3 nur auf einer Achse je einer Fläche des $|F^2|$ Büschels liegen, was leicht zu ersehen ist. Bewegt sich der Punkt T der Kurve k_c^3 , als der Mittelpunkt der Inzidenzfläche des Büschels längs der Kurve k_c^3 , bewegen sich gleichzeitig auch drei seine Achsen, aber so, dass jede von ihnen ein Teil der gesuchten Fläche darstellt, und

ihre Fernpunkte einen Teil der Kurve u^3 bilden. Auf Grund des Erwähnten muss die Kurve u^3 1. Geschlechtes sein.

Wie bekannt, befinden sich im Flächenbüschel $|F^2|$ drei hyperbolischen Paraboloiden, deren Mittelpunkte in der Fernebene liegen. Je zwei Achsen jeder dieser Flächen befinden sich auch in der Fernebene, während die dritte Achse, die im Endlichen liegt, ihren Fernpunkt im erwähnten Mittelpunkt hat. Hieraus folgt, dass sich die Kurven k_c^3 und u^3 in den drei Mittelpunkten der hyperbolischen Paraboloiden schneiden.

Zwischen den Punkten der Kurven u^3 und k_c^3 besteht eine ein-dreifache Zuordnung und da diese Kurven drei gemeinsame sich selbst zugeordnete Punkte haben, folgt, dass die Fläche \mathcal{P}_3 , die durch die Achsen der Flächen des $|F^2|$ Büschels bestimmt ist, 9. Grades ist. Die Fernebene schneidet diese Fläche in der Kurve u^3 3. Ordnung und in sechs Erzeugenden, die die Achsen der hyperbolischen Paraboloiden sind.

Vergleicht man die Erzeugung der Achsenfläche \mathcal{P}_3 , die V. Niče gegeben hat, mit der Erzeugung der Flächen \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 , ist es leicht zu ersehen, dass alle drei Flächen an die Flächenmittelpunktraumkurve k_c^3 3. Ordnung und an die Fernkurve 3. Ordnung verbunden sind. Die letzte Kurve ist in allen drei Fällen 1. Geschlechtes die mit der Kurve k_c^3 drei gemeinsame Punkte hat. Es ist zu beweisen, dass die Jacobi-sche Kurve u^3 identisch mit der Kurve μ 3. Ordnung in der Fernebene ist.

Einem beliebigen Fernpunkt T der Kurve μ hat der zugeordnete Strahl

$$t_T = \varphi(T)$$

seinen Fernpunkt in dem Punkt T^* schon wieder auf der Kurve μ . Da die Punkte T und T^* , in Sinne der Definition 8, konjugiert bezüglich der Kurve μ sind, liegt der Punkt T^* auf der Polare p_T des Punktes T bezüglich des absoluten Kegelschnittes. Diese Polare stimmt mit der Polare des Punktes T bezüglich einer Kurve k_m des Schnittbüschels f_n^2 überein. Die Kurve μ ist 3. Ordnung und die Polare p_T schneidet sie ausser im Punkt T^* in noch zwei Punkten R und S . Ist die Behauptung richtig, dass $u^3 \equiv \mu$ ist, so sind die Eckpunkte des gemeinsamen Polardreiecks der Kurve k_m und des absoluten Kegelschnittes die Punkte: T , R und S . Der dem Punkt S der Kurve μ zugeordnete Strahl

$$t_s = \varphi(S)$$

muss sein Fernpunkt im S^* auf der Kurve μ haben. Dies bedeutet, dass die Verbindungsgerade TS^* die Polare p_s des Punktes S bezüglich des absoluten Kegelschnittes und bezüglich der Kurve k_m ist, da der Punkt S auf der Polare p_T und auf der Polare des Punktes T bezüglich der Kurve k_m liegt. Der Strahl

$$t_{s^*} = \varphi(S^*)$$

enthält den Punkt S der Kurve μ . Die Polare p_s ($\equiv TS^*$) schneidet die Kurve μ in noch einem Punkt T_x , für den wir voraussetzen, dass er verschieden von R ist. Dies bedeutet, dass p_s auch die Polare p_T im Punkt T_y schneidet. Der dem Punkt T_y , der sich auf p_T und p_s befindet, zugeordnete (TK) Kom-

plexstrahl muss seinen Fernpunkt auf der Verbindungsgenenen TS haben. Die Gerade TS schneidet aber die Kurve μ in noch einem Punkt K , dem der zugeordnete (TK) Komplexstrahl den Fernpunkt im Schnittpunkt der Polaren p_T und p_s auf der Kurve μ haben muss. Das ist nur in dem Fall möglich, wenn der Punkt $T_y \equiv T_x \equiv R$. Da zwei verschiedene Kurven 2. Ordnung nur ein gemeinsames Polardreieck haben können, sieht man, dass die Kurve u^3 identisch gleich mit der Kurve μ ist.

An jedem Involutorstrahl, der als Erzeugende der Fläche \mathcal{P}_3 ist, befinden sich zwei ihm zugeordnete Punkte. Alle solche stetig verbundenen, auf der Fläche \mathcal{P}_3 sich befindenden Punkte, bilden eine Kurve η_3 . Die Ordnung dieser Kurve werden wir ähnlich wie Ordnung der Kurve η_1 bestimmen. Wir müssen doch in Betracht nehmen, dass die auf diese Weise erhaltene Fläche \mathcal{P}_3 9. Ordnung hat und die Grundkurve k^4 durchdringt sie in 36 Punkten. Es folgt, dass die Kurve η_3 27. Ordnung ist.

Satz D 14.

Die Flächenachsen eines $|F^2|$ Büschels sind die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes. Alle diese Achsen bilden eine Regelfläche \mathcal{P}_3 . 9. Grades auf der die Flächenmittelpunktkurve k_c^3 dreifach ist. Die Fernkurve dieser Fläche zerfällt in die Kurve μ 3. Ordnung, die auf der Fläche einfach ist und in sechs Fernerzeugenden dieser Fläche. Die Kurve η_3 der zugeordneten I-Z Punkte aller Erzeugenden dieser Fläche ist 27. Ordnung.

Auf Grund der Tatsache, dass die Kurve u^3 identisch gleich der Kurve μ ist, folgt:

Satz D 15.

Die Kurve μ 3. Ordnung ist das geometrische Gebilde der Eckpunkte der Polardreiecke eines Kurvennetzes, den der Fernschnittkurvenbüschel f_n^2 mit dem absoluten Kegelschnitt bildet (Jacobi-sche Fernkurve).

3. UBER DIE INVOLUTORSTRAHLEN DES (VN) KOMPLEXES IM ALLGEMEINEN

Alle Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, die wir bis jetzt kennengelernt haben, waren in gewissem Sinn speziell, da sie entweder eine Kongruenz $(0,1)$ dieser Strahlen in der Fernebene bestimmten, oder auf irgend eine Weise an die Kurve k_c^3 der Flächenmittelpunkte und die Fernkurve μ verbunden waren.

Es interessiert uns welche Bedingung erfüllt werden muss, damit ein endlicher (VN) Komplexstrahl auch ein Involutorstrahl dieses Komplexes sein wird.

Beweisen wir zuerst, dass ausser der bekannten Involutorstrahlen im Endlichen kein solcher Involutorstrahl bestehen kann, der einen Punkt der Kurve μ enthält. Wie bekannt, irgend einen Punkt T der Kurve μ enthält

je eine Erzeugende der Flächen \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_3 und zwei Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_2 .

Einen beliebigen Punkt T der Kurve μ soll irgend eine Gerade s enthalten. Wäre diese Gerade ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes, dann müssten jene zwei (TK) Komplexstrahlen bestehen, die den Punkten dieser Geraden zugeordnet seien und die diese Gerade s senkrecht schneiden. Falls diese Gerade s keine der vier zitierten Involutorstrahlen sei, kann sie nicht in der Ebene (T, t_T) liegen, wo

$$t_T = \varphi(T) \text{ ist.}$$

In dieser Ebene befinden sich, wie wir schon wissen, ausser des Ferninvolutorstrahles des (VN) Komplexes, nur zwei Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_2 , die den Punkt T enthalten. Den Punkten der Geraden s , die keine Gerade der Ebene (T, t_T) ist, bilden die zugeordneten (TK) Komplexstrahlen ein Erzeugendensystem eines Hyperboloides. Jene zwei Erzeugenden, die dem Punkt T zugeordnete Polare p_T bezüglich des absoluten Kegelschnittes schneiden, sind die einzigen, die an der Geraden s senkrecht stehen. Da der, dem Fernpunkt T der Geraden s zugeordnete Strahl t_T einer der zwei senkrecht gelegten Strahlen auf die Gerade s ist und da er mit der Geraden s keinen gemeinsamen Punkt hat, kann die Gerade s kein Involutorstrahl des (VN) Komplexes sein.

Satz D 16.

Jeden Punkt der Kurve μ enthält ausser dem Büschel der Ferninvolutorstrahlen des (VN) Komplexes, noch vier endliche Involutorstrahlen. Zwei dieser Strahlen haben in betreffendem Punkt der Kurve μ je einen Punkt, der diesem Strahl zugeordnet ist.

Stellen wir weiterhin fest, unter welchen Bedingungen, die einen beliebigen Fernpunkt M enthaltenden Geraden die (VN) Komplexstrahlen sind und ausserdem, wann diese Geraden auch die Involutorstrahlen dieses Komplexes sein können. Dabei müssen wir in Betracht nehmen, dass nur jene Geraden des Geradenbündels (M) die (VN) Komplexstrahlen sind, auf denen sich je ein solcher Punkt befindet, dass ihm der zugeordnete (TK) Komplexstrahl die betreffende Gerade senkrecht schneidet. Bestimmen wir deshalb dem Punkt M die zugeordnete Polare p_M , bezüglich des absoluten Kegelschnittes, da alle auf die Geraden des Bündels (M) senkrecht stehenden Geraden, ihre Fernpunkte längs der Polare p_M haben.

Die den Punkten der Polaren p_M zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bilden ein Erzeugendensystem eines Hyperboloides H_M . Umgekehrt, alle (TK) Komplexstrahlen, die den Punkten des Hyperboloides H_M zugeordnet sind, schneiden die Gerade p_M und bilden eine Kongrenz 2. Ordnung und 2. Klasse. Wenn eine Gerade des Bündels (M) ein Strahl des (VN) Komplexes sein soll ist es notwendig, dass sein I Punkt auf dem Hyperboloide H_M liegt, da nur den Punkten dieser Fläche die zugeordneten (TK) Komplexstrahlen senkrecht auf die Geraden der Richtung M sind. Vorläufig beschränken wir uns auf jene Geraden des Punktes M , die die Fläche H_M längs

seiner Erzeugenden t_R schneiden, wo t_R ein, dem beliebigen Punkt R der Polaren p_M zugeordneter (TK) Komplexstrahl ist. Jedem Punkt der Geraden t_R ist ein-eindeutig eine Erzeugende des Zylinders 2. Grades mit dem Scheitelpunkt R zugeordnet. Da die Ebene (M, t_R) diesen Kegel in einer Kurve 2. Ordnung schneidet, kann man sagen, dass die Punkte der Reihe (t_R) auf der Geraden t_R und die Punkte dieser Schnittkurve 2. Ordnung ein-eindeutig zugeordnet sind. Die Verbindungsgeraden dieser zugeordneten Punkte bilden in der Ebene (M, t_R) eine Kurve 3. Klasse, dies bedeutet, dass den Punkt M drei ihre Tangenten enthalten. Daraus folgt unmittelbar, dass diese Tangenten die (VN) Komplexstrahlen sind, bzw. dass den Punkt M drei parallele in der Ebene (M, t_R) liegenden (VN) Komplexstrahlen enthalten, die die I Punkte auf demselben Strahl t_R des (TK) Komplexes haben.

Da der (VN) Komplex 8. Grades ist, hüllen alle seine, in einer Ebene liegenden Strahlen, eine Kurve 8. Klasse ein und jeden Punkt dieser Ebene enthalten acht dieser Strahlen. Dies geschieht auch mit dem Punkt M und den (VN) Komplexstrahlen in der Ebene (M, t_R) , was bedeutet, dass noch fünf solche Strahlen zu bestimmen sind.

Die Ebene (M, t_R) schneidet das Hyperboloid H_M ausser in der Erzeugenden t_R in noch einer Erzeugenden r des anderen Systems, die aber in jedem ihren Punkt durch eine Erzeugende des ersten Erzeugendensystems (d. h. mit den (TK) Komplexstrahlen) geschnitten ist. Die den Punkten der Geraden r zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sind die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloides, da sie alle die Gerade p_M schneiden. Die Ebene (M, t_R) schneidet diese Fläche 2. Grades schon wieder in Punkten einer Kurve 2. Ordnung. Ausführend auf die gleiche Weise wie wir es für die Punkte der Geraden t_R getan haben, kann man hehaptun, dass den Punkt M noch drei parallele (VN) Komplexstrahlen in der Ebene (M, t_R) enthalten, die die I Punkte auf derselben Geraden haben. In der betreffenden Ebene des Punktes M bestehen also sechs endliche, den Punkt M enthaltenden (VN) Komplexstrahlen, so dass den Rest, bis zur Zahl acht, die Ferngerade dieser Ebene, als ein Ferninvolutorstrahl dieses Komplexes bildet. Während für diese sechs endlichen (VN) Komplexstrahlen das wichtigste ist, dass sie ihre I Punkte auf dem Hyperboloid H_M haben, ist der erwähnte Ferninvolutorstrahl von dieser Fläche ganz unabhängig. Bewegt sich nämlich der Punkt M längs der Ferngeraden der Ebene (M, t_R) , dann ist durch jede seine Stellung eine andere Polare bezüglich des absoluten Kegelschnittes und ein anderer Seckstruppel der (VN) Komplexstrahlen gegeben. Der Ferninvolutorstrahl bleibt aber immer derselbe.

Hätten wir das Hyperboloid H_M durch irgendeine Ebene des Punktes M geschnitten, würden wir eine Schnittkurve 2. Ordnung bekommen. Die den Punkten dieser Kurve zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bilden ein Konoid 4. Grades, den die betreffende Ebene in einer Kurve 4. Ordnung schneidet. Zwischen den Punkten der Schnittkurven 2. und 4. Ordnung besteht eine ein-eindeutige Zuordnung, deren Erzeugniss eine Kurve 6. Klasse ist. Den Punkt M enthalten wieder sechs dieser Tangenten, die die endlichen (VN) Komplexstrahlen sind.

Satz D 17.

In jeder Ebene bilden die (VN) Komplexstrahlen eine Kurve 8. Klasse, aber je sechs endliche Strahlen sind immer untereinander parallel.

Damit eine Gerade des Punktes M ein (VN) Komplexstrahl sei, muss sich sein I Punkt, wie bekannt, auf der gegebenen Fläche H_M befinden. Da ein involutor (VN) Komplexstrahl ein solcher doppelter Strahl dieses Komplexes ist, dem sein I und Z Punkt involutorisch zugeordnet sind, muss sich sein I wie auch sein Z Punkt auf der Fläche H_M befinden, da der Z Punkt einer Richtung als der I Punkt dem anderen gehören wird.

Satz D 18.

Eine endliche Gerade des beliebigen Fernpunktes M ist genau dann ein (VN) Komplexstrahl, wenn sich sein I Punkt auf einer Fläche H_M 2. Grades befindet, der die Erzeugenden jene (TK) Komplexstrahlen sind, die den Punkten der Fernpolare des Punktes M bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnet sind; damit dieselbe Gerade auch ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes sein soll, müssen sich die beiden ihm zugeordneten I - Z Punkte auf der Fläche H_M befinden.

Uns interessiert weiterhin, wie viele Involutorstrahlen des (VN) Komplexes bestehen, die untereinander parallel zu irgendeiner Richtung M gehören.

Der Kegel 8. Grades der (VN) Komplexstrahlen dessen Scheitelpunkt sich in der Endlichkeit befindet, zerfällt im Fall des Fernscheitelpunktes M in einen Kegel 6. Grades endlicher Strahlen und in das Fernbüschel (M) seiner Involutorstrahlen. Die I - und die Z Punkte aller Strahlen befinden sich auf der Fläche Ω 3. Ordnung [A. 5 a)], die ein geometrisches Gebilde der Berührungspunkte jener Berührungskegel ist, die aus dem Punkt M an alle Flächen des Büschels $|F^2|$ gelegt sind. Die Fernkurve ω 3. Ordnung der Fläche Ω ist ein solcher Ort der I und Z Punkte, die den Involutorstrahlen des (VN) Fernkomplexstrahlbüschels (M) zugeordnet sind. Die bekannte I -Punktkurve 9. Ordnung [Satz A 7] aller den Punkt M enthaltenden (VN) Komplexstrahlen zerfällt demnach in diese Kurve 3. Ordnung in der Fernebene und in eine endliche Kurve 6. Ordnung. Auf dieselbe Weise können wir behaupten, dass auch die Z -Punktkurve 11. Ordnung dieser Strahlen in dieselbe Fernkurve 3. Ordnung und in eine endliche Kurve 8. Ordnung zerfällt. Während sich die I -Punktkurve 6. Ordnung aller (VN) Komplexstrahlen die den Kegel M^6 6. Grades bilden, ganz auf der Fläche H_M befinden muss, durchdringt die Z -Punktkurve 8. Ordnung dieser Strahlen die Fläche H_M nur in 16 Punkten. Auf Grund des Satzes D 18 folgt, dass diese sechzehn Durchstosspunkte der Z -Punktkurve mit der Fläche H_M acht endliche Involutorstrahlen des (VN) Komplexes bestimmen, da sich auf jedem von ihnen je zwei diesem Strahl zugeordnete Z Punkte befinden.

Satz D 19.

Jene (VN) Komplexstrahlen, die einen beliebigen Fernpunkt enthalten, bilden einen Kegel-Zylinder 8. Grades, der in einen Kegel-Zylinder 6. Grades der endlichen Strahlen und in ein Fernbüschel der Involutionstrahlen zerfällt. Die I-Punktkurve dieser Strahlen zerfällt in die Kurve 6. Grades in der Endlichkeit und in eine Fernkurve 3. Ordnung, während die Z-Punktkurve in eine Kurve 8. Ordnung und in dieselbe Fernkurve 4. Ordnung zerfällt.

Satz D 20.

Je acht untereinander parallele, endliche Involutionstrahlen des (VN) Komplexes enthalten irgendeinen Fernpunkt.

Der Kegel 6. Grades der endlichen (VN) Komplexstrahlen, dessen Scheitelpunkt sich im Fernpunkt M befindet, dringt mit dem erwähnten Hyperboloide H_M in einer Kurve 12. Ordnung durch. Dies steht in keinem Gegensatz mit der Behauptung, dass die I Punkte der (VN) Komplexstrahlen am Kegel M^6 eine Kurve 6. Ordnung bilden. Jede Erzeugende des Kegels M^6 durchdringt nämlich die Fläche H_M in zwei Punkten, von dem nur ein Punkt u. zw. I Punkt, auf der Fläche H_M liegt, während sich der Z Punkt, ausser den acht Involutionstrahlen, auf dieser Fläche nicht befindet.

Dass die I -Punktkurve auf den Erzeugenden des Kegels-Zylinders M^6 6. Ordnung ist, können wir auch so beweisen: Jede Gerade des Punktes M berührt je zwei Flächen des Flächenbüschels $|F^2|$ und alle Berührungspunkte liegen auf der erwähnten Fläche Ω 3. Ordnung. Jeder (VN) Komplexstrahl des Kegels M^6 hat sein I und sein Z Punkt auf der Fläche Ω , während sich auf der Fläche H_M nur die I Punkte dieser Strahlen befinden. Daraus folgt, dass die Durchdringungskurve 6. Ordnung der Flächen Ω und H_M ein Ort der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen des Kegels M^6 ist.

Weisen wir hier noch auf einige Tatsachen hin.

Es ist ganz klar, dass sich auf der Fläche H_M die ganze Kurve k_c^3 befindet. Den Punkt M wie auch jeden anderen Punkt der Fernebene enthalten je zwei Fernstrahlen des (TK) Komplexes, die den Mittelpunkten je zweier Flächen des Büschels $|F^2|$ zugeordnet sind. Der dem Punkt M zugeordnete Strahl

$$t_M = \varphi(M)$$

enthält zwei Flächenmittelpunkte und durchdringt in diesen die Fläche H_M . Daraus folgt, dass diese zwei Mittelpunkte die I Punkte jener zwei (VN) Komplexstrahlen sind, die die Z Punkte im Punkt M haben. Da der Strahl t_M die Fläche H_M nur in zwei erwähnten Mittelpunkten durchdringen kann, muss sich der dritte I Punkt, der dem Punkt M als einem Z Punkt zugeordnet ist, nur im Fernpunkt des Strahles t_M befinden. Die Verbindungsgerade des Punktes M mit dem Fernpunkt des Strahles t_M ist ein Involutionstrahl des (VN) Komplexes, aber keine Erzeugende des Kegels M^6 . Der Punkt M ist deswegen auf dem Strahlkegel M^6 ein zweifacher Z Punkt, während die I Punktkurve dieser Strahlen, — wie wir auch erwartet haben, — diesen Punkt M nicht enthält.

Es ist weiterhin bekannt, dass der Punkt M auf einer Fläche des Büschels $/F^2/$ liegt und dass zwei seine Erzeugenden die Fläche H_M in je zwei Punkten durchdringen. Da jede Erzeugende der Flächen des Büschels $/F^2/$ ein zweifacher Strahl des (VN) Komplexes ist /Satz A 5./, ist es klar, dass diese zwei Durchstosspunkte die I Punkte jener zwei (VN) Komplexstrahlen sind, die mit diesen Erzeugenden übereinstimmen, während sich ihre Z Punkte im Schnittpunkt der Erzeugenden mit den (TK) Komplexstrahlen befinden, die den I Punkten zugeordnet sind.

Die Fläche Ω 3. Ordnung und der Kegel M^6 6. Ordnung durchdringen sich in einer Raumkurve 18. Ordnung. Diese Kurve zerfällt in die I -Punktkurve 6. Ordnung, dann in die Z -Punktkurve 8. Ordnung der (VN) Komplexstrahlen und in jene zwei Erzeugenden der Fläche des $/F^2/$ Büschels, die den Punkt M enthalten. Jede dieser zwei Erzeugenden ist auf der Fläche Ω einfach und auf dem Kegel M^6 als (VN) Komplexstrahl zweifach, so dass diese beide Erzeugenden, als der Teil der Durchdringungskurve, die Ordnung vier ergeben.

Die Fernebene schneidet den Kegel M^6 in sechs Erzeugenden, die als Ferngeraden die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes sind, aber auf dem Kegel M^6 sind sie, wie wir gleich beweisen werden, einfach. Die I Punkte dieser sechs (VN) Komplexstrahlen müssen auf der Fernkurve h der Fläche H_M 2. Ordnung liegen. Die den Punkten der Kurve h 2. Ordnung zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bilden die Erzeugenden eines Konoides 4. Grades, da sie alle die Gerade p_M schneiden. Zwischen den Punkten der Kurve h und den Punkten der Geraden p_M besteht eine ein-eindeutige Zuordnung, so dass alle so bestimmten Verbindungsgeraden eine Kurve 3. Klasse einhüllen. Jene drei Tangenten dieser Kurve, die den Punkt M enthalten, sind (VN) Komplexstrahlen, aber da die Z Punkte dieser Strahlen im allgemeinen nicht auf der Kurve h liegen, sind sie auf dem Kegel M^6 einfache Strahlen. Die Kurve h enthält auch die drei Fernmittelpunkte U, V und Y der hyperbolischen Paraboloiden. Da jeder diesen Punkte der Scheitelpunkt eines Büschels jener (VN) Komplexstrahlen ist, die den I Punkt im betreffenden Scheitelpunkt haben, enthält je ein Strahl dieser drei Büschel auch den Punkt M . Es ist auch hier klar, dass sich die Z Punkte dieser Strahlen im allgemeinen nicht auf der Kurve h befinden.

Es sei der Fernpunkt M ein Punkt der Kurve μ . Diesen Punkt M können dann, wie schon gezeigt, nur vier Involutorstrahlen des (VN) Komplexes enthalten und wir möchten hier die Ursache bestimmen.

Dem Punkt M der Kurve μ ist eine Polare p_M bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnet und die den Punkten dieser Polare zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bilden das bekannte Erzeugendensystem des Hyperboloides H_M . Der dem Punkt M zugeordnete Strahl $t_M = \varphi(M)$ ist keine Erzeugende dieses Hyperboloides, da auch M kein Punkt der Geraden p_M ist, schneidet aber die Gerade p_M im Punkt R der Kurve μ , da sich auf dieser Kurve auch der Punkt M befindet. Infolgedessen liegt auch der Punkt M auf dem Hyperboloid H_M und zwar auf dem Strahl

$$t_R = \varphi(R).$$

Auf ähnliche Weise, wie in vorliegendem allgemeinen Fall, können wir schliessen, dass die (VN) Komplexstrahlen, die den Punkt M enthalten, die Erzeugenden eines Kegels-Zylinders M^6 6. Grades sind, der in ein Büschel (M) dieser Strahlen in der Ebene (M, t_M) und in einen Kegel 5. Grades zerfällt. Sechs Fernerzeugenden dieser Fläche, wie auch im Fall allgemeiner Stelle des Punktes M , sind die Ferninvolutorstrahlen des (VN) Komplexes, aber keine Involutorstrahlen auf dem Kegel M^6 . Alle den Punkt M der Kurve μ enthaltenden Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, können sich demnach nur in der Endlichkeit befinden. Da der Punkt M auf der Fläche H_M liegt, können solche Involutorstrahlen nur diejenigen sein, die im Punkt M oder ihren I - Z Punkt haben, oder wenn das nicht erfüllt ist, müssen sie sich ganz auf der Fläche H_M befinden. Da die Fläche H_M 2. Grades ist, können sich auf ihr nur jene Geraden befinden, die auch ihre Erzeugenden sind u. zw. ohne Rücksicht auf das System. Den Punkt M enthalten deshalb zwei Erzeugenden der Fläche H_M , für die es gezeigt wird, dass sie Involutorstrahlen des (VN) Komplexes sind.

Die den Punkten der Polare p_M zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sind die Bisekanten der Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung, so dass sich die ganze Kurve k_c^3 auf der Fläche H_M befindet. Der Strahl

$$t_M = \varphi(M) \text{ für } M \in \mu$$

ist keine Erzeugende der Fläche H_M , durchdringt sie aber in Mittelpunkten O_1 und O_2 jener zwei Flächen des Büschels $|F^2|$, für die es

$$t_{o1} = \varphi(O_1), t_{o2} = \varphi(O_2) \text{ und } M = t_{o1} \cap t_{o2} \text{ gilt.}$$

Es folgt daraus, dass die Geraden MO_1 und MO_2 die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes sind, denen sich die zugeordneten I - Z Punkte in M und O_1 , bzw. in M und O_2 befinden. Diese Strahlen sind die Erzeugenden des Kegels M^6 und die Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_2 . /Satz D 13./

Alle übrigen (VN) Komplexstrahlen, die im M den I Punkt haben, können nur die Strahlen des bekannten Büschels (M) in der Ebene (M, t_M) sein, mit den Z Punkten längs der Geraden t_M . Jenen (VN) Komplexstrahlen, denen sich im M die Z Punkte befinden, können die I Punkte nur auf der Geraden t_M in den Durchstosspunkten mit der Fläche H_M liegen. Diese sind die schon erwähnten zwei Involutorstrahlen des (VN) Komplexes auf der Fläche \mathcal{P}_2 .

Jene, den Punkt M enthaltende Erzeugende der Fläche H_M , die als ein (TK) Komplexstrahl dem Fernpunkt der Strahles t_M zugeordnet ist, ist auch eine Erzeugende der Fläche \mathcal{P}_1 /Satz D 8./ und damit auch ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes, der den Punkt M enthält und sich auf dem Kegel M^6 befindet.

Wie bekannt, enthält den Punkt M auch eine Erzeugende r der Achsenfläche \mathcal{P}_3 /Satz D 14./, die ein Involutorstrahl ist. Das bedeutet, dass sich sein I und Z Punkt auf der Fläche H_M befinden muss. Da aber ausser diesen zwei Punkten die Erzeugende r auch den Punkt M derselben Fläche 2. Grades enthalten muss und da M kein diesen Strahl zugeordneter I - weder

Z Punkt sein kann, folgt, dass der Strahl r mit der Fläche H_M drei gemeinsame Punkte hat, bzw. dass sich der ganze Strahl r auf der Fläche H_M als seine Erzeugende des anderen Erzeugendensystems befindet. Dieses Erzeugendensystem bilden die der Geraden p_M konjugierte Polaren bezüglich jeder der Flächen des Büschels (F_2). Da jede Erzeugende dieses zweiten Systems in jedem seinen Punkt mit je einem (TK) Komplexstrahl des ersten Systems geschnitten wird, folgt, wie wir schon gesehen haben, dass jedem Punkt der Erzeugenden r der zugeordnete (TK) Komplexstrahl senkrecht am r liegt.

Damit haben wir auch die Richtigkeit des Satzes $D 16$ bewiesen.

Befindet sich der Punkt M im Mittelpunkt U , V oder Y des hyperbolischen Paraboloides des Büschels $|F^2|$, kann man auf die ähnliche Weise behaupten:

Satz D 21.

Jeden Mittelpunkt des hyperbolischen Paraboloides des Büschels $|F^2|$ enthalten je zwei endliche und zwei ferne Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, die alle auch Erzeugenden des Kegels M^6 sind.

Erwähnen wir noch dass zwischen den Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, die die Punkte der Kurve μ enthalten, auch jene bestehen, die drei Paare der konjugiert imaginären Schnittpunkte der Kurve μ und des absoluten Kegelschnittes enthalten. Man kann zeigen, dass jeden solchen Punkt, ausser den schon bekannten »Büschel« der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes aus dem Satz $D 12$, auch je vier Strahlen aus dem Satz $D 16$ enthalten, von denen sich zwei in dem erwähnten Büschel befinden.

Man sieht wieder, dass die Punkte der Kurve μ eine ausserordentliche Stelle in der Fernebene haben.

Wir haben gezeigt, dass jede Ferngerade ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes ist. Da weiterhin jeden Fernpunkt acht endliche Involutorstrahlen dieses Komplexes enthalten, kann man leicht den Schluss fassen, dass alle solche Strahlen eine Kongruenz bilden. Auf jedem Involutorstrahl befinden sich auch zwei, diesem Strahl zugeordnete $I-Z$ Punkte, die stetig verbunden eine $\mathcal{I}-\mathcal{Z}$ Fläche bilden. Diese Fläche spielt eine grosse Rolle bei den Untersuchungen der sog. »Ketten« der (VN) Komplexstrahlen, die wir aber in einer anderen Arbeit darstellen werden.

4. DIE FLÄCHE DER I-Z PUNKTE DER INVOLUTORSTRAHLEN DES (VN) KOMPLEXES

Wie bekannt, ist die Ordnung einer Fläche gleich der Zahl der Durchstossunkte dieser Fläche mit irgendeiner Geraden, bzw. ist der Ordnung der Schnittkurve mit irgendeiner Ebene gleich.

Um die Ordnung der Fläche $\mathcal{I}-\mathcal{Z}$ zu bestimmen, wählen wir eine beliebige Gerade s . Die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden } T \in s$$

bilden ein Erzeugendensystem des Hyperboloides H 2. Grades, während sein anderes System die der Geraden s konjugierte Geraden r , bezüglich jeder der Flächen des Büschels (F^2), bilden. Fassen wir die Gerade s als ein Ort der I Punkt der (VN) Komplexstrahlen auf. Die Z Punkte dieser Strahlen bilden auf dem Hyperboloid H eine Kurve z^5 5. Ordnung. Im $A 3$. wurde bewiesen, dass jede Erzeugende des ersten Systems (der Strahl des (TK) Komplexes) eine Unisekante dieser Kurve ist, während jede Erzeugende r des zweiten Systems seine Quadrisekante ist.

Nehmen wir Gerade s als einen Ort der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen an, so bilden die zugeordneten I Punkte auf dem Hyperboloid H eine Kurve i^7 7. Ordnung, der jede Erzeugende des ersten Systems eine Trisekante und jede Erzeugende des zweiten Systems eine Quadrisekante ist. /Satz $A 4$./ Da die Gerade s , im allgemeinen, mit den erwähnten Kurven z^5 und i^7 keinen gemeinsamen Punkt hat, folgt, dass durch jeden Schnittpunkt dieser Kurven ein solcher I - Z Punkt des Involutorstrahles bestimmt ist, dem sich der andere Z - I Punkt, der demselben Involutorstrahl zugeordnet ist, auf der Geraden s befindet. Die Zahl der Durchstosspunkte der Geraden s mit der gesuchten Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z} ist demnach der Zahl der Schnittpunkte der Kurven i^7 und z^5 gleich.

Die Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven auf einer Regelfläche 2. Grades hängt von der Zahl der Schnittpunkte jeder dieser Kurve mit den Erzeugenden eines und des anderen Systems dieser Fläche ab. Schneidet jede Erzeugende eines Systems eine dieser Kurven auf dem Hyperboloid in a_1 Punkten und die Erzeugende des anderen Systems dieselbe Kurve in je a_2 Punkten, während die andere Kurve diese Erzeugenden in a_1^* bzw. a_2^* Punkten schneiden, so ist die Zahl n der Schnittpunkte dieser Kurven durch die Gleichung

$$n = a_1 a_2^* + a_2 a_1^* \quad \text{gegeben.} \quad [6]$$

In unserem Fall ist

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_1^* = 3, a_2^* = 4$$

und so folgt, dass die I -Punktkurve i^7 und die Z -Punktkurve z^5 sich in den sechzehn Punkten schneiden. Jede beliebige Gerade durchdringt deswegen die Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z} in sechzehn Punkten, also ist diese Fläche 16. Ordnung.

Wir trafen die Elemente dieser Fläche schon früher. So ist z. B. jede Ferngerade ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes, aber auch jeder beliebige Punkt der Fernebene ist ein I - Z Punkt für je einem Ferninvolutorstrahl. Die ganze Fernebene ist also ein Bestandteil der \mathcal{S} - \mathcal{Z} Fläche 16. Ordnung.

Die Kurve μ spielt auch hier eine sehr wichtige Rolle, da jedem ihrem Punkt ein Ferninvolutorstrahl und zwei endliche Involutorstrahlen zugeordnet sind, die beide die zweiten zugeordneten Punkte auf der Kurve k_c^3 haben (die Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_2). Die Kurve μ ist deshalb auf der Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z} dreifach.

Es ist bekannt, dass jeden Flächenmittelpunkt drei Involutorstrahlen des (VN) Komplexes enthalten (Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_2), denen sich in dem betreffenden Mittelpunkt je ein der diesem Strahl zugeordneter Punkte befindet, während der andere Punkt auf der Kurve μ liegt. Es folgt, dass auch die Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung auf der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}$ dreifach ist.

Auf der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}$ befinden sich als einfache auch die Kurven m_n ($n = 1, 2, 3, 4$) 3. Ordnung, die in den Seitenebenen des Polartetraeders liegen und ihre drei Eckpunkte enthalten /Satz B 3. und Satz B 4./ . Diese Fläche enthält auch als einfache die Kurven η_1 und η_3 .

Ein Bestandteil der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}$ bilden auch die drei Paare der konjugiert imaginären (TK) Komplexstrahlen, die den Fernschnittpunkten der Kurve μ und des absoluten Kegelschnittes zugeordnet sind /Satz D 12./ .

Satz D 22.

Alle den Involutorstrahlen des (VN) Komplexes zugeordneten Punkte bilden eine $\mathcal{S}-\mathcal{Z}$ Fläche 16. Ordnung, deren Bestandteil die Fernebene ist. Auf dieser Fläche befinden sich: die Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung und die Fernkurve μ 3. Ordnung als dreifache, während die vier ebenen Kurven m_n ($n = 1, 2, 3, 4$) 3. Ordnung und die Raumkurve η_1 18. Ordnung und η_3 27. Ordnung einfach sind.

Die Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}$ 16. Ordnung zerfällt also in eine Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}^{15}$ 15. Ordnung und in die Fernebene. Die Fernkurve k^{15} der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}^{15}$ muss 15. Ordnung sein. Wir haben schon vorher festgestellt, dass die Punkte der Kurve μ die einzigen Fernpunkte sind, denen die als I Punkten zugeordneten (VN) Komplexstrahlen die Z Punkte in der Endlichkeit haben. Jeden Punkt der Kurve μ enthalten zwei endliche Involutorstrahlen des (VM) Komplexes, die in diesem Punkt den ihnen zugeordneten $I-Z$ Punkt haben. Dies bedeutet, dass die Kurve μ auf der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}^{15}$ zweifach ist, also dass sie als Schnittkurve dieser Fläche mit der Fernebene als eine Teilkurve 6. Ordnung angenommen werden muss.

Den übrigen Teil der Kurve k^{15} müssen solche Punkte bilden, die trotz der Zuordnung zu den Ferninvolutorstrahlen, doch in ihren Wesen und ihrem Bestand die Eigenschaften aus der Endlichkeit vererbt haben.

In solcher Strahlmenge müssen sechs Fernerzeugenden der hyperbolischen Paraboloiden gezählt werden. Wie bekannt, schneiden die jedem Punkt jeder Erzeugenden einer Regelfläche des $|F^2|$ Büschels zugeordneten (TK) Komplexstrahlen diese Erzeugende. Diese Eigenschaft haben auch die Fernerzeugenden der hyperbolischen Paraboloiden, was weiterhin bedeutet, dass jedem Punkt einer solchen Erzeugenden, den wir als I Punkt annehmen, der zugeordnete Z Punkt wieder auf derselben Erzeugenden liegt und dass diese Zuordnung involutorisch ist. Infolgedessen gilt, dass jeder von den sechs Fernerzeugenden dreier hyperbolischen Paraboloiden ein ∞^1 -deutiger Involutorstrahl des (VN) Komplexes ist, aber auch ein Ort der Paare der $I-Z$ Punkte bildet, die diesen Involutorstrahlen des (VN) Komplexes zugeordnet sind.

Die drei Fernmittelpunkte U , V und Y der hyperbolischen Paraboloiden des Büschels $|F^2|$ sind, wie bekannt, die Punkte der Kurve μ , aber auch die Fernpunkte der Kurve k_c^3 . Der jedem Flächemittelpunkt zugeordnete (TK) Komplexstrahl ist ein Fernstrahl und der Ort der Z Punkte des Büschels jener (VN) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen I Punkt in betreffendem Flächemittelpunkt haben. Befindet sich dieser Mittelpunkt in dem Fernpunkt U bzw. V bzw. Y , dann ist der zugeordnete (TK) Komplexstrahl eine Verbindungsgerade der übrigen zwei Mittelpunkte, so dass sie, ausser das sie die allgemeinen Eigenschaften behaltet, auch noch die neue aus dem Satz B 2. erhält. Es folgt, dass jeder dieser drei (TK) Komplexstrahlen auch ein Ort der I Punkte des Büschels der (VN) Komplexstrahlen ist, die den gemeinsamen Z Punkt in jenem Mittelpunkt haben, dem dieser (TK) Komplexstrahl zugeordnet ist. Weiterhin folgt, dass jeder dieser Fernmittelpunkte ein Scheitelpunkt des Büschels der Ferninvolutorstrahlen des (VN) Komplexes ist und ein ∞^1 -deutiger ihnen zugeordneter I - Z Punkt, während die Verbindungsgerade der übrigen zwei Mittelpunkte ein Ort der Z - I Punkte ist, die diesen (VN) Komplexstrahlen zugeordnet sind. Die Verbindungsgeraden UV , UY und VY sind also auch die Fernteile der Fläche \mathcal{F} - \mathcal{Z}^{15} .

Die Fernschnittkurve k^{15} 15. Ordnung besteht demnach aus der zweifachen Kurve μ 3. Ordnung und neun Ferngeraden.

a) Die Durchstosspunkte eines Sonderstrahles des (TK) Komplexes mit der Fläche \mathcal{F} - \mathcal{Z}

Ein anschauliches und erreichbares Beispiel für die Zahl der Durchstosspunkte einer Geraden mit der Fläche \mathcal{F} - \mathcal{Z} zu bestimmen, wird uns der bekannte Strahl

$$t_T = \varphi(T) \text{ für } T \in \mu \text{ geben.}$$

Wie bekannt, ist der Strahl t_T eine Bisekante der Kurve k_c^3 und muss die Mittelpunkte O_1 und O_2 der Flächen F_1 und F_2 des Büschels $|F^2|$ enthalten.

Fassen wir den Strahl t_T als ein Ort der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen auf, dann bilden die zugeordneten Z Punkte eine Kurve z^5 5. Ordnung, die in die Fernstrahlen

$$t_{o1} = \varphi(O_1), t_{o2} = \varphi(O_2) \text{ und den Strahl } t_R = \varphi(R)$$

zerfällt, wo R der Fernpunkt des Strahles t_T ist, sowie in eine Hyperbel z^2 in der Ebene des Strahles t_T , die senkrecht auf der Geraden t_R steht. /D 2./ Alle diese Z Punkte befinden sich auf den Erzeugenden des hyperbolischen Zylinders 2. Grades des Scheitelpunktes T .

Nimmt man den Strahl t_T als einen Ort der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen an, dann befinden sich die zugeordneten I Punkte dieser Strahlen wieder auf den Erzeugenden des erwähnten Zylinders 2. Grades und bilden eine Kurve 7. Ordnung. Es kann leicht bewiesen werden, dass sich in der Fernebene je drei ihrer Punkte auf den Strahlen t_{o1} und t_{o2} und der siebente

im Punkt T , befinden. Daraus folgt, dass die Punkte O_1 und O_2 dreifache Durchstosspunkte des Strahles t_T mit der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}$ sind, aber auch dass diese Eigenschaft auch ihren Fernpunkt R hat, da auf dem Strahl t_R drei I - Z Punkte dreier Involutorstrahlen des (VN) Komplexes liegen, für die der Punkt R ein Z - I Punkt ist. Die Ebene der Kurve z^2 schneidet die I -Punktkurve 7. Ordnung in sieben Punkten, die sich aber auf den Zylinders-erzeugenden befinden müssen. Man ersieht daraus, dass diese I Punkte auf der Kurve z^2 liegen. (Zwei von ihnen sind die Schnittpunkte der Kurve z^2 mit der Geraden t_T , wodurch t_T ein Involutorstrahl und eine Erzeugende der Fläche \mathcal{P}_1 ist.) Die diesen sieben I Punkten zugeordneten Z Punkte auf der Geraden t_T geben mit den erwähnten neun Z Punkten die sechzehn Durchstosspunkte dieser Geraden mit der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}$ 16. Ordnung.

5. DIE KONGRUENZ DER INVOLUTORSTRAHLEN DES (VN) KOMPLEXES

a) Die Ordnung der Kongruenz

Wie bekannt, ist die Ordnung einer Kongruenz gleich der Zahl ihrer, einen beliebigen Raumpunkt enthaltenden Strahlen.

Alle (VN) Komplexstrahlen, die einen beliebigen Raumpunkt T enthalten, bilden als Erzeugenden, einen Kegel T^8 8. Grades. Zwischen diesen Erzeugenden befinden sich auch die Involutorstrahlen dieses Komplexes, bzw. die zwei Erzeugenden jener Fläche F des Büchels $|F^2|$ die den Punkt T enthalten. Obwohl diese zwei Erzeugenden die zweifachen (VN) Komplexstrahlen sind, sind sie, wie bekannt, keine Involutorstrahlen. Die I -Punktkurve i^9 aller (VN) Komplexstrahlen des Kegels T^8 ist 9. Ordnung, auf der der Punkt T einfach ist, während für die Z -Punktkurve z^{11} dieser Strahlen der Punkt T ein dreifacher ist. /Satz A 7./

Wir haben noch im Satz A 7, die Ordnung der Kurven i^9 und z^{11} festgestellt aber die Erkenntnisse, die uns damals zur Verfügung standen, waren nicht ausreichend, um auch die Fernpunkte dieser Kurven zu bestimmen. Wir haben nun die Möglichkeit dies zu zeigen.

Die Fernebene muss die Kurve i^9 9. Ordnung in neun Punkten schneiden. Ein endlicher (VN) Komplexstrahl kann seinen I Punkt in der Fernebene nur dann haben, wenn dieser I Punkt auf der Kurve μ liegt. Es ist weiterhin bekannt, dass die Z Punkte jener (VN) Komplexstrahlen, die den I Punkt auf der Kurve μ haben, längs jenes (TK) Komplexstrahles liegen, der diesem I Punkt zugeordnet ist /Satz C 12. und D 2 b/. Alle solche (VN) Komplexstrahlen bilden ein Büschel paralleler Strahlen. Ein Strahl dieses Büschels enthält einen beliebigen Raumpunkt T genau dann, wenn sich der Punkt T in der Ebene dieses Büschels befindet. Durch die Punkte der Kurve μ 3. Ordnung und die ihnen ein-eindeutig zugeordneten Strahlen des (TK) Komplexes, die die Erzeugenden der Fläche \mathcal{P}_2 6. Grades sind, sind jene Ebenen bestimmt, die, nach Chasles, eine Torse 9. Klasse einhüllen. Den Punkt T enthalten also neun dieser Ebenen, woraus folgt, dass den Punkt T auch neun jener (VN) Komplexstrahlen enthalten, denen sich die I Punkte in der Fernebene auf der Kurve μ befinden.

Die Kurve z^{11} schneidet die Fernebene in elf Punkten. Da sich der Z Punkt eines endlichen (VN) Komplexstrahles fern befinden könnte, müsste sich sein I Punkt oder im Mittelpunkt der Fläche des Büschels $|F^2|$, oder auf der »Fläche \mathcal{A} 4. Ordnung, befinden

Schneiden wir den Kegel T^8 8. Grades mit einer beliebigen, den Scheitelpunkt T nicht enthaltenden Ebene, muss die Zahl der zweifachen Punkte der Schnittkurve 8. Ordnung, gleich der Zahl der zweifachen Erzeugenden dieses Kegels sein. Da eine ebene Kurve 8. Ordnung höchstens 21 zweifache Punkte haben kann, könnte die grösste Zahl der Involutorstrahlen die den Punkt T enthalten, gleich neunzehn sein, da die zweifachen, aber keinen Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, die zwei Erzeugenden der Inzidenzfläche F des Büschels $|F^2|$ sind.

Es ist weiterhin bekannt, dass die Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z} 16. Ordnung ein Ort der involutorisch zugeordneten I - Z Punkte auf den Involutorstrahlen des (VN) Komplexes ist, so dass auch jeder, den Punkt T enthaltende Strahl dieses Komplexes die beiden sich zugeordneten Punkte auf der Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z} haben muss. Die Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z} 16. Ordnung zerfällt, wie bekannt in die Ferneebene und in die Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z}^{15} 15. Ordnung, die die Ferneebene in einer Kurve k^{15} 15. Ordnung schneidet $|D 4|$. Alle endlichen Involutorstrahlen haben die ihnen zugeordneten I - Z Punkte auf der Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z}^{15} und umgekehrt, alle jene Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, die die ihnen zugeordneten I - Z Punkte auf der Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z}^{15} haben, müssen ein Bestandteil des endlichen Teiles der Kongruenz dieser Involutorstrahlen sein. Deshalb werden jene Involutorstrahlen, die die ihnen zugeordneten I - Z Punkte auf der Fernkurve der Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z}^{15} haben, nur als Fernteile der Involutorstrahlenkongruenz in der Endlichkeit betrachten. Alle übrigen Involutorstrahlen, die in der Ferneebene liegen und denen sich die zugeordneten I - Z Punkte nicht auf der Kurve k^{15} befinden, bilden eine Kongruenz 0-ter Ordnung und 1-ter Klasse, woraus offensichtlich folgt, dass die Strahlen dieser Kongruenz im allgemeinen keinen Einfluss auf die Ordnung der Kongruenz der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes haben können.

/Satz C 16./ Wie bekannt, ist jeder Mittelpunkt O der Fläche des Büschels $|F^2|$ ein ∞^1 -deutiger I Punkt des Büschels der (VN) Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf dem Fernstrahl

$$t = \varphi(0) \text{ für } 0 \in k_c^3$$

befinden. Zwischen den Punkten der Kurve k_c^3 3. Ordnung und der Tangenten der Kurve 2. Klasse, die die diesen Punkten zugeordneten Fernstrahlen des (TK) Komplexes bilden, besteht ein-eindeutige Zuordnung, so dass auf Grund des Chasles Satzes folgt, dass alle Ebenen die durch diese Zuordnung bestimmt sind eine Torse 5. Klasse einhüllen. Jeden beliebigen Raumpunkt T enthalten also fünf dieser Ebenen, bzw. den Punkt T enthalten fünf solche (VN) Komplexstrahlen, die die I Punkte in den Mittelpunkten der Flächen des Büschels $|F^2|$ haben und denen sich die Z Punkte in der Ferneebene befinden.

Uns fehlen noch sechs (VN) Komplexstrahlen, die die Z Punkte in der Ferne haben und denen die I Punkte nur auf der »Fläche \mathcal{A} « liegen können. Da der absolute Kegelschnitt aus ∞^2 Paaren konjugiert imaginären Punkte besteht, die auf die bekannte Weise definiert sind, besteht auch die »Fläche \mathcal{A} « 4. Ordnung aus ∞^2 der ihnen zugeordneten (TK) Komplexstrahlen, die konjugiert imaginären Geraden 2. Art, bzw. die ∞^1 konjugiert imaginären Geraden 1. Art sind $|C 5. b|$. Auf Grund des Chasles-en Satzes kann man auch eine »Torse« jener imaginären Ebenen bestimmen, die durch die beiderseitige eindeutige Zuordnung der Punkte des absoluten Kegelschnittes und der Erzeugenden der »Fläche \mathcal{A} « 4. Ordnung erzeugt werden kann, so dass diese »Torse« 6. Grades ist. Dies bedeutet, dass den reellen beliebigen Punkt T drei Paare konjugiert imaginären Ebenen dieser Torse enthalten und drei Paare jener isotropen Geraden 1. Art, die auch die (VN) Komplexstrahlen sind und die die I Punkte auf der »Fläche \mathcal{A} « haben und denen die Z Punkte in der Ferneebene auf dem absoluten Kegelschnitt liegen.

Ist der Scheitelpunkt T des Kegels T^8 8. Grades der (VN) Komplexstrahlen ein Fernpunkt, zerfällt dieser Kegel in einen Kegel T^6 ($\equiv M^6$) 6. Grades und in ein Fernbüschel (T) der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes $/D$ 3./ Die Kurve i^9 der I Punkte (bzw. die Kurve z^{11} der Z Punkte) dieser Strahlen zerfällt in eine Kurve 6. Ordnung (bzw. 8. Ordnung) auf dem Kegel T^6 und in die Fernkurve ω 3. Ordnung, die durch die I - Z Punkte des Ferninvolutorstrahlenbüschels (T) gebildet ist. Es ist weiterhin gezeigt, dass den Punkt T ($\equiv M$) acht endliche Involutorstrahlen des (VN) Komplexes enthalten, die die Erzeugenden des Kegels T^6 sind $/Satz D$ 20./

Der Grund dafür, dass die Ferninvolutorstrahlen des Büschels (T) die Involutorstrahlen sind, liegt, wie gezeigt, darin dass sie in der Fernebene liegen. Uns interessieren deshalb nur jene dieser Strahlen des Büschels (T) , die die beiden zugeordneten Punkte auf der Fernkurve k^{15} haben.

Die involuotrisch zugeordneten I - Z Punkte aller Strahlen des (VN) Komplexes des Büschels (T) befinden sich auf einer Kurve ω 3. Ordnung, die durch die Berührungspunkte jener Berührungsgereaden gebildet sind, die aus dem Punkt T auf die Kurven des Fernkurvenbüschel f_n^2 2. Grades gelegt sind und wo f_n^2 ein Schnittkurvenbüschel ist in dem die Fernebene das Büschel $/F^2/$ schneidet. Diese Kurve ω enthält auch vier Grundpunkte L_n ($n = 1, 2, 3, 4$) des Büschels f_n^2 , wie auch drei Fernmittelpunkte U, V, Y der hyperbolischen Paraboloiden des Büschels $/F^2/$, wo diese Mittelpunkte auch die Eckpunkte des Polardreieckes des Büschels f_n^2 sind. Ändert der Fernpunkt T seine Stellung, so ändert sich auch die Fernkurve ω , wo jede von ihnen aber die sieben erwähnten Fernpunkte enthält. Diese sieben Punkte enthält auch die Kurve k^{15} , da sie in die zweifache Kurve μ 3. Ordnung, dann in die drei Kanten des Polardreieckes UVY und in die sechs Fernerzeugenden der drei hyperbolischen Paraboloiden des Büschels $/F^2/$, zerfällt $/D$ 4./ Obwohl die Punkte L_n auf der Grundkurve k^4 liegen und in ihnen die I - und Z Punkte desselben Strahles zusammenfallen, sind diese Strahlen als Fernstrahlen auch die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes. Die Verbindungsgerade jedes Fernpunktes T mit dem Punkt L_n ($n = 1, 2, 3, 4$) ist ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes, der die ihm zugeordneten I - Z Punkte auf der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}^{15}$ hat. Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass z. B. jede Verbindungsgerade TU ein solcher Involutorstrahl des (VN) Komplexes ist, dem sich die beiden ihm zugeordneten Punkte auf der Kurve k^{15} befinden u.zw. ein in dem Punkt U und der andere im Schnittpunkt U_1 der Geraden TU mit der Geraden VY . Da für jeden der Strahlen TU, TV, TY gilt, dass die ihm zugeordneten Punkte $U-U_1, V-V_1, Y-Y_1$ auf der Fernkurve der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}^{15}$ liegen, sind auch diese, den Punkt T enthaltenden Strahlen die Ferninvolutorstrahlen jenes Teiles der Involutorstrahlenkongruenz die sich im Endlichen befindet.

Einen beliebigen Fernpunkt T enthalten deshalb fünfzehn Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, von denen acht im Endlichen und sieben in der Fernebene liegen. Es ist für alle diese Strahlen charakteristisch, dass sich die ihnen involuotrisch zugeordneten I - Z Punkte auf der Fläche $\mathcal{S}-\mathcal{Z}^{15}$ befinden, aber auch, dass auf diese Weise alle Erzeugenden des zerfallenen Kegels T^8 als potentielle Involutorstrahlen dieses Komplexes in Betracht genommen sind.

Ist der Punkt T kein Fernpunkt, müssen auch diesen fünfzehn jener Involutorstrahlen des (VN) Komplexes enthalten, denen die zugeordneten I - Z Punkte auf der Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z}^{15} liegen. Dieser Beschluss ist auf Grund jener Tatsache ausgeführt, dass wir im Falle wenn sich der beliebige Punkt T in der Fernebene befindet, alle jene den Punkt T enthaltenden Involutorstrahlen des (VN) Komplexes in Betracht genommen haben, denen die zugeordneten Punkte auf der Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z}^{15} liegen, während die Involutorstrahlenkongruenz O -ter Ordnung in der Fernebene, keinen Einfluss auf die Änderung der Ordnung der Involutorstrahlenkongruenz im Endlichen haben kann.

Es gilt:

Satz D 23.

Die Kongruenz der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes ist 15. Ordnung.

b) Die Klasse der Kongruenz

Die Klasse einer Kongruenz ist, wie bekannt, der Zahl der in einer Ebene liegenden Strahlen dieser Kongruenz gleich.

Alle in einer beliebigen Ebene R liegenden Strahlen des (VN) Komplexes hüllen eine Kurve 8. Klasse ein, während die I -Punktkurve i^5 dieser Strahlen 5. Ordnung hat und die Z -Punktkurve z^7 siebenter Ordnung ist. Alle in dieser Ebene R liegenden Involutorstrahlen dieses Komplexes müssen als Bestandteil dieser Kurve 8. Klasse betrachtet werden und die diesen Strahlen zugeordneten I - Z Punkt liegen in den Schnittpunkten der Kurven i^5 und z^7 . Jeder dieser 35 Schnittpunkte ist aber, wie es gezeigt wird, dem Involutorstrahl nicht zugeordnet. Die Ebene R berührt, wie bekannt, drei Flächen des Büschels $|F^2|$ und die diesen Berührungspunkten zugeordneten Strahlen des (TK) Komplexes befinden sich in der Ebene R . Auf Grund dessen folgt, dass jeder solcher Berührungspunkt der I Punkt für einen und Z Punkt für drei Strahlen des (VN) Komplexes in der Ebene R ist, die untereinander verschieden sind und verschiedene anderen ihnen zugeordneten Punkte haben. Jeder dieser drei Berührungspunkte ist deshalb ein dreifacher Schnittpunkt der Kurven i^5 und z^7 , denen aber kein Involutorstrahl des (VN) Komplexes zugeordnet ist. Es ist weiterhin bekannt, dass jede Ebene die Grundkurve k^4 des Büschels $|F^2|$ in vier Punkten schneidet und in jeder Ebene vier solche (VN) Komplexstrahlen liegen, denen der I - und Z Punkt im Durchstosspunkt der Kurve k^4 mit dieser Ebene zusammenfällt. Diese Strahlen sind aber keine Involutorstrahlen /Satz B 8./ . Von den 35 Schnittpunkten der Kurven i^5 und z^7 sind also nur 22 Punkte geblieben, von denen je zwei demselben Involutorstrahl zugeordnet sind. Daraus folgt, dass sich in der Ebene R elf Involutorstrahlen befinden, bzw., dass die Klasse der Involutorstrahlenkongruenz gleich elf ist. Da jede Ferngerade ein Involutorstrahl ist folgt, dass sich in jeder endlichen Ebene zehn endliche Involutorstrahlen befinden.

Satz D 24.

Die Involutorstrahlenkongruenz ist 11. Klasse.

Eine einfache Nachprüfung dieses können wir in jenen Singulärebenen durchführen, die in [1] gründlicher bearbeitet sind.

1. *Die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes in der Seitenebene des Polartetraeders ABCD.* Wählen wir z. B. die Seitenebene (BCD) des Polartetraeders. Jeder der Eckpunkte B, C, D ist der Träger dreier Involutorstrahlen in dieser Ebene, von denen je zwei die Seiten des Dreiecks BCD sind, während der dritte Strahl einen der zugeordneten zwei Punkte im Eckpunkt und den anderen an der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks hat [1] Abt. C 4/. Es gibt also in der Ebene BCD sechs Involutorstrahlen des (VN) Komplexes, die wenigstens einen der zwei zugeordneten Punkte im Eckpunkten B, C bzw. D haben.

Weiterhin ist es in Abt. C 4 gezeigt, dass jene (VN) Komplexstrahlen, die in der BCD Ebene eine Kurve 5. Klasse einhüllen, haben ihre I Punkte auf einer Kurve 5. Ordnung und die Z Punkte auf einer Kurve 4. Ordnung. Diese I -Punktkurve hat in jedem diesen Eckpunkt einen zweifachen Punkt, während die Z -Punktkurve 4. Ordnung in jedem solchen Eckpunkt einen einfachen Punkt hat. Die Kurven 5. und 4. Ordnung schneiden sich in 20 Punkten, von denen vier die Schnittpunkte der Ebene (BCD) mit der Kurve k^4 sind; je zwei weitere befinden sich in jedem Eckpunkt des Dreiecks BCD , die aber keine neue Involutorstrahlen des (VN) Komplexes geben, während die übrigen zehn Schnittpunkte noch fünf weitere Involutorstrahlen bestimmen. In einer Seitenebene des Polartetraeders gibt es also elf Involutorstrahlen des (VN) Komplexes.

2. *Die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes in einer Berührungsebene einer Singulärfläche des Büschels $|F^2|$.* Wählen wir nun den Kegl A^2 mit dem Scheitelpunkt A und seine Erzeugende AA_1 , wie es in Abt. C 3 b) [1] dargestellt ist [Abb. 1. [1]]. Die I -Punktkurve der (VN) Komplexstrahlen in der Berührungsebene (AA_1K) längs ihrer Erzeugenden AA_1 , zerfällt in die Gerade AA_1 und in eine Kurve 4. Ordnung, während die Z -Punktkurve dieser Strahlen in die dreifache Gerade AA_1 , in die Gerade A_1K und in eine Kurve 3. Ordnung zerfällt. Das Gesagte in Abt. C 3 b) in Betracht nehmend, folgt, dass den Punkt A drei Involutorstrahlen enthalten und die übrigen acht Involutorstrahlen in dieser Ebene je einen der zugeordneten Punkte auf der Geraden AA_1 haben, während die anderen in den Schnittpunkten der erwähnten Kurven 4. und 3. Ordnung sind. Von diesen zwölf Schnittpunkten müssen wir zwei Berührungspunkte T_1 und T_2 der Ebene (AA_1K) mit der Grundkurve k^4 abnehmen, wie auch den Punkt K , der als I Punkt ein einfacher und als Z Punkt ein zweifacher ist. Die übrigen acht Schnittpunkte sind als I - Z Punkte den erwähnten acht Involutorstrahlen zugeordnet.

LITERATUR

- [1] V. Šćurić-Čudovan, Der orientierte Niče-sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, I. Teil; Rad JAZU, 367 (1974.) 151-205
- [2] V. Niče, Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades; Rad JAZU, 331 (1965.) 145–172.
- [3] V. Niče, Zusätzliche Betrachtungen mit ergänzenden Sätzen über den Tangentialkurzwegekomples eines Flächenbüschels 2. Grades; Rad JAZU, 349 (1970.) 94–107.
- [4] V. Niče, Die Achsenregelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades; Glasnik matem., 1 (21) (1966) 215–221.
- [5] V. Niče, Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades; Glasnik mat.-fiz.-i astr., 2 (18) (1963.), 255–268.
- [6] H. G. Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie; Leipzig und Berlin, 1914.

Angenommen zur Veröffentlichung am 28. VI. 1974. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

ORIJENTIRANI NIČEOV KOMPLEKS ODREĐEN PRAMENOM PLOHA 2. STUPNJA

2. dio

Sadržaj

Ovaj je rad nastavak mogeg rada: »Orijentirani Ničeov kompleks određen pramenom ploha 2. stupnja«, 1. dio [1].

Neka je dan pramen ploha $|F^2|$ 2. stupnja i njime određeni pramen (F^2) polarnih prostora tih ploha. Zraka orijentiranog Ničeovog kompleksa ili kraće (VN) kompleksa definirana je kao okomica o položana iz bilo koje točke T prostora na toj točki pridruženu zraku t poznatog Reyeovog tetraedarskog kompleksa ili kraće (TK) kompleksa. Točka T zrake o nazvana je I točkom te zrake, a sjecište zraka $t \cap o$ njezinom Z točkom. Kako I i Z točka zrake o općenito nisu ravnopravne, određuju one na prirodan način orijentaciju zrake o . Na temelju činjenice da se na svakoj zraci (VN) kompleksa nalaze dvije njoj pridružene točke, te da je bilo koja točka prostora I točka za jednu i Z točka za tri zrake (VN) kompleksa, koje su sve komplanarne, istraživana su u [1] geomerijska mjesta I , odnosno Z točaka, kao i zraka (VN) kompleksa kada se Z , odnosno I točke tih zraka nalaze na pravcu, krivulji, ravnini ili plohi.

(VN) kompleks je 8. stupanja.

Pokazano je, nadalje, da u prostoru postoje i krivulje singularnih točaka od kojih su za naša dalja istraživanja najinteresantnije: krivulja k_c^3 3. reda središta ploha pramena $|F^2|$ i beskonačno daleka krivulja μ 3. reda. Bilo koje središte plohe pramena $|F^2|$ je ∞^1 -značna I točka pramena zraka (VN) kompleksa, kojima se Z točke nalaze duž beskonačno daleke zrake (TK) kompleksa, pridružene tom središtu. Svako središte singularne plohe pramena, koje se podudara s vrhom autopolarne tetraedra pramena (F^2) , jest ∞^2 -značna I točka snopa zraka (VN) kompleksa kojima se Z točke nalaze u tom vrhu nasuprotnoj ravnini tetraedra, ali je ujedno svaki takav vrh i ∞^1 -značna Z točka zraka (VN) kompleksa kojima se I točke nalaze duž krivulje 3. reda u spomenutoj ravnini tetraedra.

Točke beskonačno daleke krivulje μ također su geometrijska mjesta ∞^1 -značnih I točaka zraka (VN) kompleksa. Svaka je točka te krivulje I

točka za pramen međusobno usporednih zraka toga kompleksa kojima se pridružene Z točke nalaze duž konačne zrake (TK) kompleksa pridružene dotičnoj točki krivulje μ , ali kojoj se beskonačno daleka točka nalazi na krivulji μ .

Definirajmo involutornu zraku (VN) kompleksa kao onu njegovu zraku kojoj su I i Z točka pridružene involutorno, što znači da takva zraka mijenja samo orijentaciju kada na njoj involutorno pridružene točke I i Z zamijene svoj položaj.

Pokazano je da je svaki pravac beskonačno daleke ravnine involutorna zraka (VN) kompleksa. Iz definicije i ranije spomenutog lako se vidi da je svaki vrh singularne plohe pramena $|F^2|$ vrh jednog stošca 3. stupnja involutornih zraka (VN) kompleksa.

Posebno su interesantne one involutorne zrake (VN) kompleksa koje su na bilo koji način vezane uz točke krivulja μ i k_c^3 .

Ploha \mathcal{P}_1 Svaka zraka (TK) kompleksa pridružena točki beskonačno daleke krivulje μ 3. reda, involutorna je zraka (VN) kompleksa. Zbog neprekidne povezanosti točaka krivulje μ neprekidno su povezane i tim točkama pridružene zrake (TK) kompleksa, pa sve one određuju plohu \mathcal{P}_1 za koju se dokazuje da je 6. stupnja. Na toj je plohi krivulja μ jednostruka, a krivulja k_c^3 trostruka. Na svakoj se izvodnici plohe \mathcal{P}_1 nalaze i dvije točke involutorno pridružene I - Z točke koje određuju krivulju η_1 18. reda. Pokazano je, nadalje, da ova krivulja ima devet dvostrukih točaka u središtima ploha pramena $|F^2|$, od kojih se tri nalaze beskonačno daleko u središtima hiperboličkih paraboloida.

Ploha \mathcal{P}_2 Svakom središtu plohe pridružene su tri involutorne zrake (VN) kompleksa koje imaju jednu od pridruženih I - Z točaka u dotičnoj točki krivulje k_c^3 , a drugu u točki krivulje μ , dok svaku točku krivulje μ sadrže dvije ovakve zrake. Sve one, neprekidno povezane u prostoru, određuju plohu \mathcal{P}_2 , koja je 12. stupnja. Krivulja μ je na toj plohi dvostruka, a krivulja k_c^3 trostruka. Krivulja η_2 pridruženih I - Z točaka svih izvodnica ove plohe prema tome je raspadnuta prostorna krivulja 15. reda.

Ploha \mathcal{P}_3 Znamo da svaka ploha F pramena $|F^2|$ ima tri međusobno okomite osi, koje se sijeku u središtu te plohe. V. Niče je u [4] pokazao da sve osi ploha pramena 2. stupnja određuju plohu 9. stupnja, kojoj se beskonačno daleka krivulja raspada u krivulju 3. reda i šest pravaca. Pokazano je, međutim, da je svaka os plohe pramena $|F^2|$ involutorna zraka (VN) kompleksa. Sve ovakve zrake određuju dakle plohu \mathcal{P}_3 9. stupnja, a njezina beskonačno daleka krivulja 3. reda je krivulja μ . Krivulja η_3 pridruženih I - Z točaka svih izvodnica plohe \mathcal{P}_3 je 27. reda.

Ovim je istraživanjima dokazano da je krivulja μ 3. reda geometrijsko mjesto vrhova autopolarne mreže konika što je određuju beskonačno daleki presječni pramen f_n^2 (u kojem beskonačno daleka ravnina siječe pramen ploha $|F^2|$) s apsolutnom konikom, pa izlazi da je krivulja μ Jacobijeva krivulja.

Dalja su istraživanja pokazala da svaku točku beskonačno daleke ravnine sadrži osam međusobno usporednih involutornih zraka (VN) kompleksa,

koje su u konačnosti. Sve involutorne zrake tog kompleksa određuju prema tome kongruenciju, za koju je pokazano da je 15. reda i 11. razreda. Svim tim zrakama pridružene I - Z točke određuju plohu 16. reda koja sadrži i beskonačno daleku ravninu kao jednostruku. Na toj se plohi nalaze krivulje k_c^3 i μ kao trostruke, a četiri spomenute krivulje u ravninama autopolarne tetraedra, kao i krivulje η_1 i η_3 kao jednostruke.

Primljeno za publikaciju 28. VI. 1974. u Razredu za matematičke, fizičke, i tehničke nauke Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.