JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
Razred za matematičke, fizičke i tehničke znanosti

Vilim Niče

ÜBER DIE MITTELS DER POLARFELDER BESTIMMTEN NULLRÄUME

Poseban otisak
iz Rada 396 str. 29—44

ZAGREB 1982

ÜBER DIE MITTELS DER POLARFELDER BESTIMMTEN NULLRÄUME

Vilim Niče, Zagreb

Einführung. Ein Polarfeld ist, wie bekannt, durch zwei kollokale korrelativ involutorisch zugeordnete Felder bestimmt. In jedem Polarfeld befindet sich ein Inzidenzkegelschnitt, dessen Punkten seine Tangenten in diesen Punkten zugeordnet sind.

Eine quadratische stetige Raumgeradenmenge, in welcher jeder Raumpunkt eine Gerade dieser Geradenmenge enthält und in jeder Ebene des Raumes eine dieser Ebenen liegt, ist als eine lineare Strahlkongruenz bekannt. Z. B. die Transversalen zweier reellen sich nicht schneidenden Geraden *a*, *b* bilde die bekannte hyperbolische lineare Strahlkongruenz der Leitgeraden *a*, *b*.

Wird m Raum irgend eine Zuordnung so duchgeführt, dass jedem Punkt eine seiner Ebenen, und jeder Ebene einer ihrer Punkte zugeordnet sind, wird auf diese Weise ein *Nullarum* bestimmt.

Liegen die Nullpunkte aller Ebenen eines Punktes in der Nullebene dieses Punktes, resp. enthält der Nullpunkt einer Ebene die Nullebenen aller ihrer Punkte, wird auf diese Weise der bekannte lineare Nullraum zweier korrelativ zugeordneter Räume bestimmt. Die Nullraumzuordnung zweier Punkt — Ebenen Räume, die nicht korrelativ zugeordent sind, kann auf mehrere Weisen durchgeführt werden. Z. B. der Nullraum zweier linearen Kongruenzen [1], und der durch ein Plückersches Konoid bestimmte Nullraum [2], sind vor nicht langer Zeit betrachtet worden. Gleich so wie in den zwei erwähnten Fällen werden auch den hier betrachteten Nullräumen eine analoge Ordnung und eine analoge Klasse zugeordnet. In dem linearen Nullraum liegen die Nullpunkte aller Ebenen eines Punktes in seiner Nullebene und die Nullebenen der Punkte einer Ebene enthalten alle ihren Nullpunkt. In unserem, in dieser Arbeit betrachteten Fall, werden die Nullpunkte der Ebenen eines Punktes eine stetige quadratische Menge bilden, also eine Fläche,. deren Ordnung als Ordnung dieses Nullraumes angenommen wird. Als Klasse dieses Nullraumes wird die Klasse derjenigen Fläche angenommen, welche die Nullebenen der Punkte einer Ebene einhüllen. Es bestehen Nullräume in welchen einem Punkt mehrere Nullebenen, und einer Ebene mehrere Nullpunkte zugeordnet sind, wie z. B. die Nullräume der Strahlkongruenzen [3], aber solche werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. In den Nullräumen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, hat jeder Punkt nur eine Nullebene und jede Ebene nur einen Nullpunkt.

In dieser Arbeit wird im Raum ein Polarfeld (π) in einer Ebene π, mit einer reellen Inzidenzkonik k, und eine lineare hyperbolische Kongruenz (ab) der reellen Leitgeraden a, b angenommen. Diese Kongruenz schneidet die Ebene π in einem Punktfeld, welchem in dem Polarfeld (π) ein Geradenfeld zugeordnet ist. Jeder Punkt R des Raumes enthält einen Strahl r der linearen hyperbolischen Kongruenz (ab), der die Ebene π in einem Punkt R schneidet. In dem Polarfeld (π) ist diesem Punkt R eine Gerade $\bar{r}$ zugeordnet. Die Ebene ϱ des Punktes R und der Geraden $\bar{r}$ nehme man als die Nullebene des Punktes R an. Nimmt man zuerst die Ebene ϱ an, dann schneidet diese die Ebene π in der Geraden $\bar{r}$, welcher in dem Polarfeld (π) der Punkt R zugeordnet ist. Der diesen Punkt enthaltende Strahl der Kongruenz (ab) schneidet die Ebene ϱ im Punkt R, welcher der Nullpunkt der Ebene ϱ ist. Auf diese Weise können mittels des gegebenen Polarfeldes (π) und der gegebenen lineraren hyperbolischen Kongruenz (ab) jedem Punkt R des Raumes seine Nullebene ϱ, und jeder Ebene ϱ ihr Nullpunkt R zugeordnet und gefunden werden.

1. Der Nullraum eines Polarfeldes und einer linearen Kongruenz.

Wie man eben sah ist auf die beschriebene Weise jedem Raumpunkt R eine seiner Ebenen ϱ zugeordnet, wie auch jeder Ebene ϱ des Raumes einer ihrer Punkte R, wenn sich diese Ebene und dieser Punkt nicht in einer speziellen Lage beziglich der Kongruenz (ab), oder des Polarfeldes (π), befindet. Zicht man auf dem Kongruenzstrahl r alle seine Punkte R_i in Betracht, dann sehen wir, auf Grund der Definition dieses Nullraumes, dass die allen diesen Punkten R_i zugeordneten Nullebenen ϱ_i die gemeinsame Gerade $\bar{r}$ enthalten. Es folgt also dieser Satz:

1 *a*). *Die den Punkten eines Strahles der Kongruenz* (ab) *zugeordenten Nullebenen bilden einen Büschel, dessen Achse in dem Polarfeld* (π) *liegt.*

Offenbar gilt auch dieser Satz:

1 *b*). *Die Ebenen einer im Polarfeld* (π) *liegenden Geraden haben ihre Nullpunkte auf einem Strahl der Strahlkongruenz* (ab).

Diesen zwei Sätzen werden später ergänzende Zusätze hergeleitet bezüglich der singulären Punkte auf den Leitgeraden, a, b der hyperbolischen Kongruenz (ab), oder der in dem Polarfeld (π).

Wie bekannt, sind in einem Polarfeld den Punkten der Inzidenzkonik ihre Tangenten in diesen Punkten zugeordnet. Man betrachte nun so einen Punkt T der Inzidenzkonik k und ihre Tangente t in diesem Punkt. Da alle Ebenen der Geraden t den den Punkt T enthaltenden Strahl z der Kongruenz (ab) in diesem Punkt schneiden, ist offensichtlich der Punkt T der Nullpunkt aller Ebenen der Geraden t $(t \equiv \bar{t})$. Es gilt also auch dieser Satz:

1 *c*). *Alle eine Tangente der Inzidenzkonik* k *enthaltenden Ebenen haben ihren gemeinsamen Nullpunkt in dem Berührungspunkt dieser Tangente.*

Da die den Punkten des Kongruenzstrahles z zugeordneten Nullebenen die Tangente t im Punkt T enthalten müssen, gilt offenbar auch diesser Satz:

1 *d*). *Alle Punkte desjenigen Kongruenzstrahles* z *welcher die Inzidenzkonik* k *des Polarfeldes* (π) *schneidet, haben eine gemeinsame Nullebene die diesen Strahl* z *enthält und die Inzidenzkonik* k *berührt.*

Da diejenigen Strahlen der Kongruenz (ab), welche die Inzidenzkonik k schneiden, eine Regelfläche 4. Grades VII Art bilden, folgt auf Grund dieser Tatsache der Satz:

1 *e*). *Diejenigen Strahlen der Kongruenz* (ab) *deren allen Punkten nur eine Nullebene zugeordnet ist, bilden eine Regelfläche* 4. *Grades VII art.*

Wie man eben sah, bilden die Nullebenen aller Punkte eines Strahles der Kongruenz (ab) eine Ebenenbüschel, dessen Achse in der Ebene π des Polarfeldes (π) liegt. Da aber jeder Punkt der Ebene π auf einem Strahl der Kongeuenz (ab) liegt, gilt, ebenso, auch folgender Satz:

1 *f*). *Die Ebene* π *des Polarfeldes* (π) *ist die Nullebenen aller ihrer Punkte.*

Oder: *Jeder Punkt der Ebene* π *ist der Nullpunkt dieser Ebene.*

Die einen Punkt R der Leitgeraden a enthaltenden Strahlen der Kongruenz (ab) bilden ein Geradenbüschel (R) in der Ebene α des Punktes R und der Leitgeraden b. Die Schnittpunkte der Strahlen des Büschels (R) in der Ebene π liegen auf einer Geraden $\overline{e}$, welcher in dem Polarfeld (π) ein Punkt E zugeordnet ist. Den Punkten der Geraden $\overline{e}$ sind in diesem Polarfeld (π), wie bekannt, die Geraden des Punktes $\overline{E}$ zugeordnet. Also die den Punkten eines Strahles des Büschels (R) zugeordneten Nullebenen bilden ein Ebenenbüschel dessen Achse in der Ebene π liegt, und den Punkt $\overline{E}$ enthält. Diejenige Ebene dieses Nullebenenbüschels welche den Punkt R enthält, ist also die Nullebene dieses Punktes. Da dies für jeden Strahl des Kongruenzstrahlenbüschels (R) gilt sehen wir, dass dem Punkt R auf der Leitgeraden a ∞^1 Nullebenen zugeordnet sind, die alle auch den Punkt $\overline{E}$ in der Ebene π enthalten. So wie dies für alle Punkte der Leitgeraden a gültig ist, gilt dies ebenso auch für alle Punkte der Leitgeraden b. Man bekommt also auch den folgenden Satz:

1 *g*). *Jedem Punkt der Leitgeraden a und b sind* ∞^1 *Nullebenen zugeordnet, die für jeden solchen Pugkt ein Ebenenbüschel bilden.*

Die Schnittpunkte der Leitgeraden a, b mit der Ebene π bezeichne man mit A, B, und ihre Verbindungsgerade mit s. Die Ebenen α_n der Geraden b, welche in Punkten R_n die Gerade a schneiden, bilden ein Ebenenbüschel $[b]$. Dieser Büschel $[b]$ schneidet die Ebene π in dem Geradenbüschel (B) des Schnittpunktes B. Die den Strahlen $\overline{e}_n$ dieses Geradenbüschels im Polarfeld (π) zugeordneten Punkte $\overline{E}$ liegen auf der Geraden $\overline{b}$, welche in diesem Feld dem Schnittpunkt B zugeordnet ist, und bilden eine Punktreihe $(\overline{b})$. Jedem Punkt R der Punktreihe auf der Geraden a ist auf dieser ein Punkt $\overline{E}$ der Punktreihe $(\overline{b})$ zugeordnet. Die Punktreihe der Punkte R_n auf der Geraden a sei mit (a) bezeichnet. Wegen $(a) \overline{\wedge}$ $\overline{\wedge}$ $[b]$ und $[b] \overline{\overline{\wedge}} (B)$ und $(B) \overline{\wedge} (\overline{b})$ im Polarfeld (π), gilt auch $(a) \overline{\wedge} (\overline{b})$. Wie man soeben sah, sind die Verbindungsgeraden der zugeordneten Punkte R_n und $\overline{E}_n$ auf diesen zwei Punktreihen die Achsen des Nullenenbüschels der Nullebenen jedes Punktes R_n auf der Leitgeraden a. Alle diese Achsen bilden also das Erzeugnis zweier projektiv zugeordneten Punktreihen. Für die Punkte der Leitgeraden b gilt offenbar das Analoge. Man hat demnach auch folgenden Satz festgestellt:

1 *h*). *Die Achsen der den Punkten der Leitgeraden a, b, zugeordneten Nullebenenbüschel bilden für jede Leitgerade eine Regelfläche* 2. *Grades.*

Nimmt man den Punkt R_n der Leitgeraden a, oder b, in dem Schnittpunkt A, resp. B, dan fällt in die Ebene π auch die diesen Punkten zugeordnete Erzeugende der im Satz 1 h) erwähnten Regelfläche 2. Grades. Die Ebene π des Polarfelds (π) berührt also beide diese Regelflächen 2. Grades.

2. Die Nullpunkte der Ebenen eines Ebenenbüschels.

Nebst der Strahlkongruenz (ab) und dem Polarfeld (π) in der Ebene π sei beliebig im Raum eine Gerade p, mit ihrem Ebenenbüschel $[p]$, gegeben. Das Ebenenbüschel $[p]$ schneidet das Polarfeld (π) in dem Geradenbüschel $(\overline{P})$ des Schnittpunktes $\overline{P}$ der Geraden p mit diesem Polarfeld, dessen Strahlen man mit $\overline{r}$ bezeichne. Diesem Strahlenbüschel $(\overline{P})$ ist im Polarfeld (π) eine Punktreihe $(\overline{p})$ projektiv zugeordnet, deren Punkte $\overline{R}$ auf der Geraden $\overline{p}$ liegen. In jeder Ebene γ des Büschels $[p]$ liegt, offenbar, ihre Schnittgerade $\overline{r}_g$ mit der Ebene π, welcher in der dem Punkt $\overline{P}$ zugeordneten Punktreihe $(\overline{p})$ ein Punkt $\overline{R}_g$ zugeordnet ist. Da alle diese eineindeutigen Zuordnungen projektiv sind, ist auch dem Ebenenbüschel $[p]$ der Ebenen γ die Punktreihe (p) der Punkte $\overline{R}_g$ auf der Geraden $\overline{p}$ projektiv zugeordnet. Diejenigen Strahlen der Kongruenz (ab), die die Punkte $\overline{R}_g$ der Punktreihe $(\overline{p})$ auf der Geraden $\overline{p}$ enthalten, bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades. Jede Ebene γ der Geraden p schneidet die auf die beschriebene Weise ihr zugeordnete Erzeugende der erwähnten Regelfläche 2. Grades in dem ihr zugeordneten Nullpunkt. Da die Erzeugenden dieses Systems dieser Regelfläche den Ebenen γ des Ebenenbüschels $[p]$ projektiv zugeordnet sind, wird ihr Erzeugniss eine Raumkurve u^3 dritter Ordnung. Man bekommt also auch folgenden Satz:

2 a). *Die Nullpunkte der Ebenen eines Ebenenbüschels bilden eine Raumkurve* 3. *Ordnung.*

Auf Grund der Tatsache dass die Gerade p, als Achse des Ebenenbüschels $[p]$, die Regelfläche 2. Grades derjenigen Strahlen der Kongruenz (ab), die die Punkte $\overline{R}_g$ der Punktreihe $(\overline{p})$ enthalten, in zwei Punkten schneidet, muss die Gerade p eine Bisekante der kubischen Raumkurve u^3 sein, weil in diesen Schnittpunkten zwei Erzeugenden der erwähnten Regelfläche 2. Grades die ihnen zugeordneten Ebenen in dem Ebenenbüschel $[p]$ treffen.

Da weiterhin der Punkt $\overline{P}$ zwei Tangenten (reelle oder konjugiert imaginäre) der Inzidenzkonik k enthält, durch deren Berührungspunkte die Gerade $\overline{p}$ der Punktreihe $(\overline{p})$ läuft, wird die Inzidenzkonik k in diesen zwei Punkten die kubische Raumkurve u^3 schneiden, da im diesen Punkten der Punkt $\overline{R}_g$ mit der ihm zugeordneten Ebene γ des Ebenenbüschels $[p]$ zusammenfällt. Der dritte Schnittpunkt der Ebene π mit der kubischen Raumkurve u^3 befindet sich auf der Verbindungsgerade s der Punkte A, B der Leitgeraden a, b. Die Ursache dafür ist die folgende: Der Verbindungsgeraden s ist im Polarfeld (π) der Schnittpunkt $\overline{S}$ der Geraden $\overline{a}, \overline{b}$ zugeordnet, welche den Punkten A, B in diesem Polarfeld (π) zugeordnet sind. Der der Verbindungsgeraden $\overline{PS} = \overline{t}$ im Geradenbüschel $(\overline{P})$ zugeordnete Punkt $\overline{T}$ muss demnach in dem Polarfeld (π) auf der Geraden s liegen. Da die Gerade e ein Strahl der Kongruenz (ab) ist, welcher den Punkt $\overline{T}$ enthält, ist ihr Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden $\overline{t} \equiv \overline{P}\overline{S}$ auch ihr Schnittpunkt mit der Ebene der Geraden p und des Punktes $\overline{S}$, also der Nullpunkt dieser Ebene.

Man nehme jetzt an, dass die Gerade p, welche die Ebene π im Punkt durchstösst, den Punkt U auf der Geraden a enthält. Dem Punkt $\overline{P}$ ist im Polarfeld (π), wie gezeigt, die Gerade $\overline{p}$ zugeordnet. Die den Strahlen $\overline{r}$ des Strahlenbüschels $(\overline{P})$ zugeordneten Punkte $\overline{R}$ bilden die Punktreihe $(\overline{p})$ auf der Geraden $\overline{p}$. Die Regelfläche 2. Grades derjenigen Strahlen der Kongruenz (ab) die die Punkte R der Punktreihe $(\overline{p})$ enthalten, enthalten auch die Leitgeraden a, b in ihrem zweiten Erzeugendensystem. Es folgt also, dass jeden Punkt dieser Leitgeraden a, b eine Erzeugende des ersten Systems enthält, also auch der Punkt U eine dieser Erzeugenden enthält. Auf Grund dessen, folgt dass eine Ebene des Ebenenbüschels $[p]$ die ihr zugeordnete Erzeugende der beschriebenen Regelfläche 2. Grades auch in dem Punkt U trifft. Also, der Punkt U liegt auf der dem Ebenenbüschel $[p]$ zugeordneten kubischen Raumkurve u^3, und ist der Nullpunkt derjenigen Ebene des Büschels $[p]$ welche die Achse des Nullebenenbüschels des Punktes U enthält (Satz 1 *g*). Da die Gerade p eine Bisekante der Raumkurve u^3 ist, und jede ihrer Ebenen diese Raumkurve noch in einem Punkt schneidet, sieht man, dass hier keine singuläre Entartung erwartet werden kann, da jede Ebene eine kubische Raumkurve nur in drei Punkten schneiden kann.

Wenn die Gerade p beide Leitgeraden a, b schneidet, muss aus derselben Gründen die zugeordnete Raumkurve u^3 beide dieser Schnittpunkte enthalten und kann nicht zerfallen. Es gilt also auch dieser Satz:

2 *b*). *Die den Ebenen eines Ebenenbüschels, dessen Achse eine oder beide Leitgarden der Kongruenz (ab) schneidet, zugeordnete kubische Raumkurve schneidet die Leitgeraden a, b in ihren Schnittpunkten mit der Achse dieses Ebenenbüschels.*

3. Die den Punkten einer Geraden zugeordneten Nullebenen.

Wie bisher sei eine Gerade p nebst dem Polarfeld (π) und der Kongruenz (ab) ganz beliebig angenomen. Die diese Gerade p schneidenden Strahlen der Kongruenz (ab) bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem (i_n) einer Regelfläche 2. Grades, welche die Ebene π des Polarfeldes (π) in einer Konik u^2 schneidet. Den Punkten der Konik u^2, als Schnittpunkten $\overline{I}_n$ der Erzeugenden i_n, sind im Polarfeld (π) die Geraden $\overline{i}_n$ zu geordnet, die eine der Konik u^2 zugeordnete Konik $\overline{u}^2$ einhüllen, also ein quadratisches Geradenbüschel $(\overline{u}^2)$ bilden. Jedem Punkt der Geraden p ist auf diese Weise eine Erzeugende des Systems (i_n) zugeordnet, welcher in dem Polarfeld (π) eine Tangente der Konik $\overline{u}^2$ zugeordnet ist. Die Punktreihe (p) auf der Geraden p ist mit dem quadratischen Geradenüschel $(\overline{u}^2)$, offenbar, projektiv zugeordnet.

Wie bekannt bilden die Oskulationsebenen einer Raumkurve 3. Ordnung ein kubisches Ebenengewinde, dessen Ebenen jede seiner Ebenen in Biplanaren schneidet, die eine Konik einhüllen. Alle Biplanaren werden durch die Ebenen des Ebenengewindes in projektiven Punktreihen geschnitten, welche auch zu dem Strahlenbüschel 2. Klasse projektiv zugeordnet sind, den die Biplanaren in einer Ebene des Ebenengewindes einhüllen. Ein kubisches Ebenengewinde ist also das Erzeugnis einer Punktreihe und eines Strahlenbüschels 2. Klasse, wenn sie im Raum projektiv zugeordnet sind.

Auf Grund dessen sehen wir, dass das Erzeugnis der projektiv zugeordneten Punktreihe (p) und des quadratischen Strahlenbüschels $(\overline{u}^2)$ ein kubisches Ebenengewinde sein muss. Es folgt also auch dieser Satz:

3 *a*). *Die den Punkten einer Geraden zugeordneten Nullebenen hüllen ein kubisches Ebenengewinde ein, also sind Oskulationsebenen einer Raumkurve* 3. *Ordnung.*

Da die Gerade p zwei Ebenen enthält die die Konik $\overline{u}^2$ berühren, folgt offenbar, dass auch die Gerade p eine Biplanare dieses Ebenengewindes ist. Da die dem Schnittpunkt $\overline{P}$ der Geraden p mit der Ebene π zugeordnete Tangente der Konik $\overline{u}^2$ auch in der Ebene π liegt sehen wir, dass die Ebene π sich in den kubischen Ebenengewinden aller Geraden des Raumes befinden.

Wenn die Gerade p ein Strahl der Kongruenz (ab) ist, dann bilden, wie schon gezeigt, die Nullebenen ihrer Punkte, ausser den Schnittpunkten mit den Leitgeraden a, b, ein Ebenenbüschel mit der Achse in der Ebene π. Jedem der Schnittpunkte mit dem Leitgeraden a, b sind ∞^1 Nullebenen zugeordnet die, wie gezeigt, je ein Ebenenbüschel bilden. Es gilt demnach auch dieser Satz:

3 *b*): *Das dem Strahl p der Kongruenz* (ab) *zugeordnete kubische Ebenengewinde zerfällt in drei Ebenenbüschel.*

Man nehme die Gerade p jetzt so an, dass sie die Leitgerade a im Punkt M schneidet. Die Ebene (ap) der Geraden a, p schneide die Leitgerade b im Punkt N. Das Geradenbüschel (N) des Punktes N in der Ebene (pa) schneidet die Geraden p, a in zwei perspektiv zugeordneten Punktreihen $(p) \overline{\overline{\wedge}} (a)$. Die Ebene (pa) schneidet die Ebene π in den Geraden m, welche den Schnittpunkt A der Leitgeraden a mit der Ebene π enthält, und welcher durch den Geradenbüschel (N) in der Ebene (pa) in einer Punktreihe $(\overline{m}) \overline{\overline{\wedge}} (p) \overline{\overline{\wedge}} (a)$ geschnitten wird. Der Punktreihe $(\overline{m})$ ist im Polarfeld (π) ein Geradenbüschel $(\overline{M})$ zugeordnet, dem der der Geraden $\overline{m}$ zugeordnete Scheitel $\overline{M}$ auf derjenigen Geraden $\overline{a}$ liegt, die in dem Polarfeld (π) dem Schnittpunkt A der Leitgeraden a zugeordnet ist. Wie bekannt sind in dem Polarfeld (π) die Punktreihe (m) und das Geradenbüschel (M) projektiv zugeordnet. Also $(\overline{m}) \overline{\wedge} (\overline{M})$. Wegen $(\overline{m}) \overline{\overline{\wedge}} (p) \overline{\overline{\wedge}} (a)$ und $(\overline{m}) \overline{\wedge}$ $\wedge (\overline{M})$ gilt auch $(p) \overline{\wedge} (\overline{M})$. Also jedem Punkt der Geraden p ist ein Strahl des Geradenbüschels $(\overline{M})$ zugeordnet, und zwar so, dass die Ebene des Punktes auf der Geraden p und die ihm zugeordnete Gerade in dem Büschel $(\overline{M})$ die Nullebene dieses Punktes bestimmen. Also, der geometrische Ort der den Punkten der Geraden p zugeordneten Nullebenen ist das Erzeugnis der projektiv zugeordneten Punkt-Strahlen Paare der Punktreihe (p) der Geraden p und des Strahlenbüschels $(\overline{M})$ der Geraden $\overline{m}$ in der Ebene π. Solch ein Erzeugnis ist, wie bekannt, ein Kegel 2. Grades, welchen diese ∞^1 Ebenen einhüllen. Da für die Punkte der Geraden b dasselbe gilt wie für die Punkte der Geraden a, gilt auch dieser Satz:

3 *c*). *Die Nullebenen der Punkte einer Geraden die eine der Leitgeraden a, oder b, schneiden, hüllen einen Kegel* 2. *Grades ein, der die Ebene* π *des Polarfeldes* (π) *berührt.*

Wie bekannt ist dem Schnittpunkt M der Geraden a, p ein Nullebenenbüschel zugeordnet. Also, das dieser Gerade p zugeordnete kubische Ebenengewinde zerfällt in diesem Fall in einen linearen und einen quadratischen Ebenenbüschel.

4. Die Ordnung und die Klasse des Nullraumes eines Polarfeldes und einer linearen Kongruenz.

Nebst dem Polarfeld (π) und der linearen Strahlkongruenz (ab) sei im Raum ein ganz beliebiger Punkt P gegeben. Die den Ebenen des Ebenenbündels $[P]$ zugeordneten Nullpunkte bilden eine stetige quadratische Punktmenge, also eine Fläche, welche wir als Nullfläche des Punktes P kennen. Wie man es im Satz 3 *a*) sehen kann, bilden die Nullebenen der Punkte einer Geraden p ein kubisches Ebenengewinde. Jeder Punkt des Raumes enthält drei dieser Ebenen, was selbstverständlich auch für den Punkt P gilt. Die Nullfläche des Punktes P hat demnach mit der Geraden p drei Punkt gemein. Es gilt also dieser Satz:

4 *a*). *Die Nullflächen der Raumpunkte in dem Nullraum eines Polarfeldes und einer linearen Strahlkongruenz sind* 3. *Ordnung. Dieser Nullraum ist also* 3. *Ordnung.*

Nebst unserem Nullraum sei jetzt im Raum eine beliebig liegende Ebene τ gegeben. Der stetigen quadratischen Punktmenge dieser Ebene ist eine stetige quadratische Nullebenenmenge zugeordnet, deren Ebenen eine Fläche einhüllen, die als Nullfläche der Ebene τ schon benannt wurde. Dem Satz 2 *a*) nach sehen wir, dass die den Ebenen einer Geraden p zugeordneten Nullpunkte eine kubische Raumkurve 3. Ordnung bilden. Weil diese Raumkurve die Ebene τ in drei Punkten schneidet, enthält die Gerade p drei Berührungsebenen der Nullfläche der Ebene τ. Es gilt also auch dieser Satz:

4 *b*). *Die Nullflächen der Ebenen in den Nullräumen eines Polarfelds und einer linearen Kongruenz sind* 3. *Klasse.*

Auf Grund dieser zwei Sätze gilt offenbar auch der folgende:

4 *c*). *Der Nullraum eines Polarfeldes und einer linearen Kongruenz ist dritten Grades.*

Da die den Berührungsgeraden der Inzidenkonik k im Polarfeld (π) zugeordneten Punkte die Berührungspunkte dieser Berührungsgeraden auf der Konik k sind, folgt der Satz:

4 *d*). *Die Inzidenzkonik k des Polarfeldes (π) befindet sich auf allen Nullflächen der Punkte im Nullraum dieses Polarfeldes und der linearen Kongruenz.*

Die Verbindungsgerade s der Schnittpunkte A, B der Leitgeraden a, b mit der Ebene π des Polarfeldes (π) ist offenbar auch ein Strahl der Kongruenz (ab), welchem, wie schon erwähnt, in diesem Polarfeld ein Punkt $\overline{S}$ zugeordnet ist. Jede Gerade p des Raumes enthält eine Ebene ϱ die den Punkt $\overline{S}$ enthält und die Ebene π in einer Geraden $\overline{r}$ des Punktes $\overline{S}$ schneidet. Der dieser Geraden $\overline{r}$ im Polarfeld (π) zugeordnete Punkt $\overline{R}$ liegt offenbar auf der Geraden s, da die Gerade $\overline{r}$ den Punkt $\overline{S}$ einthält. Der den Punkt $\overline{R}$ enthaltende Strahl der Kongruenz (ab), und das ist die Gerade s, schneidet die Ebene ϱ in ihrem Nullpunkt, also im Schnittpunkt der Geraden s und $\overline{r}$. Da dies für alle Geraden des Raumes gilt, also auch für die jenigen welche einen beliebigen Raumpunkt P enthalten, folgt dass die Nullflächen aller Nullpunkte die Gerade s in der Ebene π enthalten. Auf Grund dessen und des Satzes 2 *b*) folgt auch dieser Satz:

4 *e*). *Die Nullflächen aller Punkte des Nullraumes eines Polarfeldes und einer linearen Strahlkongruenz enthalten die Leitgeraden dieser Kongruenz und ihren Strahl s in der Ebene des Polarfeldes.*

5. Singuläre Fälle der Nullflächen der Punkte.

Es sei in der Ebene π des Polarfeldes (π) dem Punkt $\bar{R}$ die Gerade $\bar{r}$ zugeordnet. Jeder Geraden $\bar{n}$ des Geradenbüschels $(\bar{R})$ in der Ebene π ist ein Punkt $\bar{N}$ auf der Punktreihe $(\bar{r})$ der Geraden $\bar{r}$ zugeordnet. Die Ebenen der Geraden $\bar{n}$ schneiden, wie bekannt, denjenigen Strahl der Kongruenz (ab) der den Punkt $\bar{N}$ enthält im Nullpunkt N_n dieser Ebenen. Da aber die Strahlen der Kongruenz (ab), die die Punkte $\bar{N}$ der Punktreihe $(\bar{r})$ enthalten, eine Regelfläche 2. Grades bilden, und jede Ebene des Punktes $\bar{R}$ eine Gerade $\bar{n}$ des Geradenbüschels $(\bar{R})$ enthält, also ihr Nullpunkt sich auf dem den Punkt $\bar{N}$ der Punktreihe $(\bar{r})$ enthaltende Strahl der Kongruenz (ab) befindet, folgt auch dieser Satz:

5 *a*). *Die kubische Nullfläche eines Punktes in der Ebene π des Polarfeldes (π) zerfällt in diese Ebene π und in eine Regelfläche* 2. *Grades.*

Wie bekannt bilden die die Inzidenzkonik k schneidenden Strahlen der Kongruenz (ab) eine Regelfläche 4. Grades VII Art. Alle Punkte einer Erzeugenden dieser Regelfläche 4. Grades haben eine gemeinsame, diese Erzeugende enthaltende Nullebene, welche die Inzidenzkonik k berührt. Auf Grund dessen gilt auch der Satz:

5 *b*). *Die Nullregelfläche* 2. *Grades eines Punktes $\bar{R}$ der Inzidenzkonik k berührt die Regelfläche* 4. *Grades der Leitgeraden a, b und der Inzidenzkonik k längs der gemeinsamen Erzeugenden die den Punkt $\bar{R}$ enthält.*

6. Eine Eigenschaft der Nullflächen der Raumpunkte.

Die einem Raumpunkt T zugeordnete Nullebene τ schneide die Ebene π des Polarfeldes (π) in einer Geraden $\bar{t}$. In dem Strahlbüschel (T) des Punktes T in der Ebene τ nehme man beliebig einen Strahl n an, welcher die Gerade $\bar{t}$ im Punkt $\bar{N}$ schneidet. Da der Strahl n die Ebene τ enthält, muss die kubische Raumkurve der Nullpunkte der Ebenen des Strahles n den Punkt T enthalten. Wie gezeigt ist der Strahl n eine Bisekante der ihm auf die eben erwöhnte Weise zugeordneten kubischen Raumkurve. Die Gerade n hat also ausser dem Punkt T nur noch einen Punkt mit der Nullfläche des Punktes T gemein. Der Punkt T muss also auf dieser Nullfläche dritter Ordnung oder ein Doppelpunkt, oder ein zweideutiger Punkt auf der Geraden n sein. Der andere Schnittpunkt der Bisekante n kann kein Doppelpunkt sein, da in diesem Fall ein solcher Punkt auf jedem Strahl n des Strahlbüschel $(\bar{N})$ in der Ebene τ sein müsste. Also, die kubische Nullfläche des Punktes T müsste eine Doppellinie haben, was offenbar unmöglich ist. Der Punkt T kann auch kein Doppelpunkt seiner Nullfläche sein, da er der Nullpunkt nur der Ebene τ ist, und keiner anderen mehr. Die allen Strahlen n des Strahlenbüschels (T) in der Ebene τ zugeordneten beschriebenen kubischen Raumkurven enthalten den Punkt T, für welchen eben bewiesen wurde, dass er kein Doppelpunkt seiner Nullfläche sein kann. Es folgt also, dass der Punkt T nur ein zweideutiger Punkt auf allen seinen Strahlen n ist, also alle Strahlen n des Punktes T berühren in diesem Punkt die ihnen zugordneten kubischen Nullraumkurven, resp. die Ebene τ berührt in ihrem Nullpunkt T die diesem Punkt zugeordnete kubische Nullfläche. Es gilt also auch dieser Satz:

6 *a*). *Die Nullebene eines Raumpunktes berührt in diesem Punkt seine kubische Nullfläche.*

Man betrachte eine Gerade des Punktes T welche die Inzidenzkonik k im Punkt $\bar{R}$ schneidet. Wie gezeigt, liegt die kubische Raumkurve der Nullpunkte der Ebenen der Geraden $T\bar{R}$, auf Grund der Sätze 5 *a*) und 5 *b*), auf einer Regelfläche 2. Grades, die durch die Leitgeraden a, b und die Berührungsgerade der Inzidenzkonik k im Punkt $\bar{R}$ bestimmt ist. Wie man es im Satz 5 *b*) sah berührt diese Regelfläche 2. Grades die Regelfläche 4. Grades der Leitlinien a, b, k längs der gemeinsamen, den Punkt $\bar{R}$ enthaltenden Erzeugenden. Also die kubische Raumkurve der Nullpunkte der Ebenen der Geraden $T\bar{R}$ berührt im Punkt $\bar{R}$ auch die erwähnte Regelfläche 4. Grades. Offenbar gilt dies für alle Punkte $\bar{R}$ der Inzidenzkonik k. Die ∞^1 kubische Raumkurven, die auf die eben beschriebene Weise den Geraden $T\bar{R}$ (Erzeugenden des Kegels (Tk)) zugeordnet sind, bilden offenbar die dem Punkt T zugeordnete kubische Nullfläche, da jede Ebene des Punktes T die Inzidenzkonik k in einem Paar reeller, konjugiert imaginärer, oder zusammenfalender Punkte schneidet. Da der Punkt T irgendwo im Raum angenommen werden kann, gilt also auch dieser Satz:

6 *b*). *Die Nullflächen aller Raumpunkte in dem Nullraum eines Polarfeldes* (π) *mit der Inzidenzkonik* k *und einer linearen Strahlkongruenz* (ab) *berühren längs der Inzidenzkonik* k *die Regelfläche* 4. *Grades VII Art der Leitgeraden* a, b *und* k.

7. Die Geraden der kubischen Nullfläche eines Raumpunktes.

Wie gezeigt ist durch die Leitgeraden a, b und die Inzidenzkonik k in der Ebene eine Regelfläche 4. Grades VII Art bestimmt, deren Erzeugenden Strahlen der linearen Kongruenz (ab) sind. Jeder Punkt K der Konik k enthält eine Erzeugende i dieser Regelfläche. Die Berührungsebene π dieser Regelfläche im Punkt K ist durch die Erzeugende i und die Berührungsgerade l der Konik k im Punkt K bestimmt. Die Ebene τ der Berührungsgeraden l ist die dem Punkt K zugeordnete Nullebene, da sie die Gerade l enthält, welche als Polare dem Pol K im Polarfeld (π) zugeordnet ist. Auf Grund der Definition unseres Nullraumes und des Satzes 5 *b*) folgt, dass die Ebene π die Nullebene aller auf der Erzeugenden i sich befindenden Punkt ist. Auf Grund dessen ergibt sich aber, dass die Nullflächen aller Punkte der Ebene τ die Erzeugende i enthalten, die Gerade i liegt also auf allen diesen Flächen.

Man betrachte wieder die Nullfläche eines beliebigen Punktes P. Auf dieser Nullfläche liegen, wie bekannt, die Geraden a, b und s. In den Berührungsebenen der eben erwähnten Regelfläche 4. Grades die den Punkt P enthalten und deren Berührungspunkt sich auf der Inzidenzkonik k befindet, befinden sich die Erzeugenden dieser Regelfläche, die diese Berührungspunkte enthalten, als Geraden auf der Nullfläche dieses Punktes P.

Die Berührungsebenen dieser Regelfläche 4. Grades in den Punkten der Inzidenzkonik k bilden ein Ebenengewinde, dessen Ordnung dem Rang dieser Regelfläche gleich ist, also gleich der Ordnung eines Berührungskegels dieser Regelfläche. Da diese Regelfläche 4. Grades VII Art den Rang vier hat, ist die Ordnung des erwähnten Ebenengewindes vier. Also der Punkt P enthält vier Ebenen dieses Ebenengewindes, und in jeder dieser Ebene befindet sich eine Erzeugende der besprochnen Regelfläche 4. Grades, die sich in der Nullfläche des Punktes P befindet. Man bezeichne diese vier Geraden mit i_1, i_2, i_3 und i_4. Diese vier Geraden sind Strahlen der Kongruenz (ab), schneiden also die Leitgeraden a, b. Auf Grund der Tatsache dass sich in der Ebene zweier sich schneidenden, und auf einer Fläche 3. Ordnung liegenden Geraden, immer noch eine Gerade dieser Fläche befindet, folgt, dass in den Ebene der Geraden s, a und s, b noch die dritte Gerade (sa), resp. (sb) auf dieser kubischen Fläche liegt. Da die Geraden i_1, i_2, i_3, i_4 der Nullfläche des Punktes P die Gerade a dieser Fläche schneiden, befinden sich in den Ebenen der sich schneidenden Geradenpaare ai_1, ai_2, ai_3, ai_4 neue vier Geraden $(ai_1), (ai_2), (ai_3), (ai_4)$ der Nullfläche des Punktes P. Ganz analog befinden sich auf dieser Nullfläche auch die in den Ebenen der Geradenpaare bi_1, bi_2, bi_3, bi_4 sich befindenden Geraden $(bi_1), (bi_2), (bi_3), (bi_4)$. Auf der kubischen Nullfläche des Punktes P hat man also bisher folgende 17 Geraden entdeckt: $a, b, s, (as), (bs), i_1, i_2, i_3, i_4, (ai_1), (ai_2), (ai_3), (ai_4), (bi_1), (bi_2), (bi_3)$, und (bi_4).

Wie bekannt haben vier windschiefe Geraden im Raum zwei reelle, oder konjugiert imaginäre Transversalen, die auch zusammenfallen können. Die auf der Nullfläche des Punktes P sich befindenden windschiefe Geraden $(as), (ai_1), (ai_2), (ai_3), (ai_4)$ schneiden die Gerade a, welche also eine ihrer zwei Transversalen in jedem Quadrupel dieser fünf Geraden ist. In jedem Quadrupel dieser fünf Geraden, und es bestehen deren fünf, besteht noch die zweite Transversale die mit der kubischen Nullfläche des Punktes P vier Punkte gemein hat, also ganz auf dieser Fläche liegt. Man bezeichne diese fünf Transversalen der Geraden a mit a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Ganz analog gehören zur Geraden b die auf der Nullfläche des Punktes P liegenden Transversalen b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. Wie gesehen hat man auf diese Weise alle 27 Geraden der kubischen Nullflächen aller Raumpunkte entdeckt.

8. Die Arten der Nullräume eines Polarfeldes und einer linearen Kongruenz.

In den bisherigen Betrachtungen bediente uns ein Polarfeld mit reelle Koinzidenzkonik und eine lineare hyperbolische Kongruenz. Aber bekanntlich bestehen drei lineare Kongruenzen. Denn ausser der hyperbolischen besteht noch die elliptische und die parabolische Strahlkongruenz. Das Polarfeld kann ausserdem endlich oder undendlich weit liegen, mit einer reellen oder imaginären Inzidenzkonik. Da jeder Nullraum durch ein Polarfeld und eine lineare Kongruenz bestimmt ist, sehen wir, dass von unseren kubischen Nullräumen zwelf Hauptarten bestehen, da jede lineare Kongruenz mit einem endlichen, oder einem unendlichformen Polarfeld mit einer reellen oder konjugiert imaginären Inzidenzkonik gepaart werden kann. Selbstverständlich werden die Nullflächen der Raumpunkte in diesen Nullräumen ganz verschieden sein, besonders bezüglich der Realität der Geraden auf diesen kubischen Flächen. Aber diese verschiedenen Arten solcher kubischer Nullräume wollen wir nicht untersuchen. Eventuell den Fall mit dem unendlichfernen Polarfeld.

9. Der Nullraum einer linearen Kongruenz und eines unendlich fernen Polarfeldes.

Es sei ein kubischer Nullraum durch eine lineare hyperbolische Kongruenz (ab) und ein unendlichfernes Polarfeld (π) gegeben. Die reelle unendlichferne Inzidenzkonik k sei durch einen Direktionskegel 2. Grades gegeben. Die Nullebene eines Punktes P ist, offenbar, mit derjenigen Ebene des Scheitels des Direktionskegels parallel, welche derjenigen Geraden dieses Scheitels konjugiert ist, die mit dem den Punkt P enthaltendem Strahl der Kongruenz (ab) parallel ist. Die Nullebenen der Punkte eines Strahles der Kongruenz (ab) sind offenbar parallel. Die Achsen der Büschel der den Punkten der Leitlinien a, b zugeordneten Nullebenen bilden hier ein Erzeugendensystem eines hyperbolischen Paraboloides, und die gemeinsamme Gerade $s = AB$ aller dieser Nullflächen leigt selbstverständlich unendlich fern.

Nimmt man in der unendlichfernen Ebene des Polarfeldes (π) den absoluten Kegelschnitt als die Inzidenzkonik an, wird die Nullfläche eines jeden Raumpunktes die Fusspunktfläche der linearen Kongruenz (ab) und dieses Raumpunktes. Jede Nullfläche in diesem Nullraum enthält also den absoluten Kegelschnitt, und die kubische Raumkurve u^3 der Nullpunkte der Ebenen einer Geraden schneidet den absoluten Kegelschnitt in zwei absoluten Punkten, ist also eine zirkuläre Kurve.

Auf Grund der Bisher ausgeführten Betrachtungen ist leicht ersichtlich, dass wegen der Imaginarität der Inzidenzkonik k im Polarfeld (π) auf der kubischen Fusspunktfläche einer hyperbolischen Kongruenz sich fünf reelle Geraden befinden. Unter den vorher erwähnten 27 Geraden sind es die Geraden a, b, s, (as) und (bs). Auf Grund der Tatsache dass alle ebene Schnitte einer Fusspunktfläche zirkulär sind, und auf Grund der Tatsache dass die Gerade s in der Ebene des absoluten Kegelschnittes liegt, gilt der Satz:

9 *a). Auf jeder Fusspunktfläche einer linearen hyperbolischen Kongruenz befinden sich vier Geraden deren Ebenen diese Fusspunktfläche in Kreisen scheiden.*

Auf der Fusspunktfläche einer elliptischen linearen Kongruenz ist nur die Gerade s reell, und demnach enthält sie keine Kreise. Analoge Betrachtungen könnte man auch für die Fusspunktfläche einer linearen parabolischen Kongruenze durchführen.

10. Die Nullräume eines Polarfeldes und eines Geradenbündels.

Nebst dem Polarfeld (π) der Ebene π mit der reellen Inzidenzkonik k sei ein Geradenbündel $\{D\}$ eines Punktes D gegeben. Also anstatt einer linearen Kongruenz nehmen wir jetzt dieses Geradenbündel zu Hilfe um einen Nullraum aufzubauen. Jeder Raumpunkt A enthält einen Strahl des Strahlenbündels $\{D\}$, welcher die Ebene π des Polarfeldes (π) im Punkt $\bar{A}$ schneidet. Im Polarfeld (π) ist dem Punkt $\bar{A}$ eine Gerade $\bar{a}$ zugeordnet. Die Ebene der Geraden $\bar{a}$ und des Punktes A ist, wie vorher schon gezeigt, die Nullebene α dieses Punktes. Nimmt man zuerst die Ebene α an kommt man in umgekehrten Sinn zu dem Punkt A zurück, ehen so wie bei der linearen Kongruenz. Also auch hier sind den Punkten der Geraden a Nullebenen zugeordnet, die die Gerade $\bar{a}$ enthalten, also auch hier ein Ebenenbüschel bilden. Man versuche jetzt in solch einem Nullraum die Ordnung und die Klasse der Nullfläche eines Punktes und einer Ebene zu finden.

Die Strahlen des Strahlenbündels $\{D\}$ schneiden die Ebene π in seinem Punktfeld, welchem in dem Polarfeld (π) sein Geradenfeld korrelativ involutorisch zugeordnet ist. Die einen Punkt A enthaltende Ebenen bilden ein Ebenenbündel $[A]$ das die Ebene π in dem erwähnten Geradenfeld schneiden. Jedem Strahl des Strahlenbündels $\{D\}$ ist eine Ebene des Ebenenbündels $[A]$ auf diese Weise involutorisch korrelativ zugeordnet. Auf Grund dieser polaren Zuordnung des Punktfeldes und des Geradenfaldes in der Polarebene π folgt, dass das Ebenenbündel $[A]$ und das Strahlenbündel $\{D\}$ korrelativ zugeordnet sind. Die Nullfläche eines jeden Raumpunktes A ist also das Erzeugnis solcher zwei korrelativ zugeordneten Bündel $[A]$ und $\{D\}$, also eine Fläche 2. Ordnung. Es gilt demnach folgender Satz:

10 *a). Die Nullflächen der Raumpunkte in dem Nullraum eines Polarfeldes und eines Strahlbündels sind 2. Ordnung.*

Es sei in einer Ebene α ihr Punktfeld mit (α) bezeichnet. Der Strahlbündel $\{D\}$ bildet perspektiv dieses Punktfeld (α) auf die Ebene π in ihr Punktfeld, ab, welches polar ihrem Geradenfeld (π) zugeordnet ist. Jedem Punkt des Punktfeldes (α) ist auf diese Weise korrelativ eine Gerade in dem Polarfeld (π) zu-geordnet. Die den Punkten der Ebene α zugeordneten Nullebenen in solch einem Nullraum hüllen also eine Fläche ein, die das Erzeugnis zweier korrelativ zugerdneten Felder ist, also eine Fläche 2. Klasse. Es gilt also auch dieser Satz:

10 *b). Die Nullflächen der Ebenen in dem Nullraum eines Strahlenbündels und eines Polarfeldes sind 2. Klasse.*

Auf Grund dieser zwei Sätze folgt offenbar der Satz:

10 *c). Der Nullraum eines Strahlenbündels und eines Polarfeldes ist 2. Grades, also ein quadratischer Nullraum.*

Es ist leicht ersichtlich dass die Nullflächen aller Raumpunkte auch in solch einem Nullraum den Inzidenzkegelschnitt k des Polarfeldes (π) enthalten. Auch die den Punkten eines Strahles a des Bündels $\{D\}$ zugeordneten Nullebenen bilden hier das Ebenenbüschel der dem Schnittpunkt $\bar{A}$ zugeordneten Geraden $\bar{a}$ in dem Polarfeld (π). Da aber alle Strahlen des Strahlenbündels $\{D\}$ den Bündelscheitel D enthalten, gilt offenbar auch dieser Satz:

10 *d). Alle Ebenen des Scheitelpunktes D des Strahlenbündels $\{D\}$ sind Nullebenen dieses Punktes in den Nullraum eines Polarfeldes und dieses Strahlenbündels $\{D\}$.*

Im Strahlenbündel $\{D\}$ nehme man den Kegel (Dk), der den Inzidenzkegelschnitt k in dem Polarfeld (π) enthält. Wie bekannt sind im Polarfeld (π) den Tangenten des Inzidenzkegelschnittes k deren Berührungspunkte zugeordnet. Es sei ein Punkt A auf der Erzeugenden a des Kegels (Dk) gegeben, welche Erzeugenden die Ebene π im Punkt T auf der Inzidenzkonik k schneidet. Die Berührungsgerade der Konik k im Punkt T sei mit t bezeichnet. Die Nullebenen aller Punkte A_n der Erzeugenden a enthalten, wie bekannt, die Tangente t, da in solch einem Fall $T \equiv \bar{A}$ und $\bar{a} \equiv t$. ist. Also, alle diese Nullebenen der Punkte A_n auf der Erzeugenden a des Kegels (Dk) befinden sich in der Berührungsebene dieses Kegels längs der Erzeugenden a. Es gilt demnach der Satz:

10 *e). Die Berührungsebenen des Kegels (Dk) längs jeder seiner Erzeugenden sind Nullebenen aller Punkte dieser Erzeugenden.*

Offffenbar gilt auch dieser Satz:

10 *f). Die Ebenen jeder Berührungsgeraden t der Inzidenzkonik k sind Nullebenen des Berührungspunktes T dieser Berührungsgeraden t.*

Es sei in unserem Nullraum des Polarfeldes (π) und des Geradenbündels $\{D\}$ beliebig eine Gerade p gegeben, welche die Ebene π des Polarfeldes (π) im Punkt $\bar{P}$ schneidet. In dem Polarfeld (π) ist, sowie bisher, dem Punkt $\bar{P}$ eine Gerade $\bar{p}$ zugeordnet. Wie bekannt ist in der Ebene π dem Geradenbüschel $(\bar{P})$ des Punktes $\bar{P}$ die Punktreihe $(\bar{p})$ der Gerade $\bar{p}$ projektiv zugeordnet. Also $(\bar{P}) \barwedge (\bar{p})$. Da aber den Geradenbüschel $(\bar{P})$ des Punktes $\bar{P}$ in der Ebene π ihre Schnittgeraden mit den Ebenen des Ebenenbüschels $[p]$ der Geraden p bilden, muss auf Grund $(\bar{P}) \barwedge (\bar{p})$, resp. $(P) \barwedge [p]$, auch $[p] \barwedge (\bar{p})$ gelten. Die Verbindungsgeraden des Punktes D mit den Punkten der Punktreihe $(\bar{p})$ bilden einen Geradenbüschel (Dp) des Scheitels D, für welchen auf Grund $(Dp) \barwedge (\bar{p})$ auch $(Dp) \barwedge [p]$ ist. Da die Nullpunkte der Ebenen der Geraden p auf den Geraden des Geradenbüschels (Dp) liegen, wird der geometrische Ort dieser Nullpunkte das Erzeugnis des Geradenbüschels (DP) und des Ebenenbüschels $[p]$, welches, wegen $(Dp) \barwedge$ $\barwedge [p]$, ein Kegelschnitt in der Ebene des Büschels (Dp) sein muss. Da die den die Gerade p enthaltenden Berührungsebenen der Inzidenzkonik k zugeordneten Nullpunkte in ihren Berührungspunkten auf dieser Konik liegen, schneidet der Kegelschnitt der Nullpunkte der Ebenen des Büschels $[p]$ die Inzidenzkonik k auch hier in zwei Punkten. Man bekommt also diesen Satz:

10 *g*). *Die Nullpunkte der Ebenen einer Geraden in dem quadratischen Nullraum eines Polarfeldes* (π) *und eines Geradenbündels* $\{D\}$ *bilden einen Kegelschnitt, der in zwei Punkten die Inzidenzkonik schneidet und den Scheitelpunkt D des Geradenbündels* $\{D\}$ *enthält.*

Die den Ebenen eines Strahles q des Geradenbündels $\{D\}$ zugeordneten Nullpunkte bilden einen in zwei reelle Geraden zerfallenen Kegelschnitt die den Punkt D enthalten, aber auch, offenbar, die Inzidenzkonik k schneiden, was auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen leicht ersichtlich ist.

Man betrachte jetzt die Nullebenen der Punkte T_n einer Geraden p. Wie bekannt, bekommt man die Nullebene eines Punktes T in unserem quadratischen Nullraum so, dass wir dem Schnittpunkt $\bar{T}$ der Ebene π des Polarfeldes (π) mit dem Strahl DT des Bündels $\{D\}$ die Gerade $\bar{t}$ im Polarfeld (π) zuordnen. Die Ebene τ dieser Geraden $\bar{t}$ und des Punktes T ist die diesem Punkt zugeordnete Nullebene. Die Ebene des Scheitels D des Geradenbündels $\{D\}$ welche die Gerade p, also alle ihre Punkte T_n, enthält, schneidet die Ebene π in der Punktreihe $(\bar{T}_n)$ der Schnittpunkte der Strahlen DT_n in dieser Ebene. In dem Polarfeld (π) ist dieser Punktreihe $(\bar{T}_n)$ der Geradenbüschel $(\bar{t}_n)$ projektiv zugeordnet. Jedem Punkt T_n der Geraden p wird durch den diesem Punkt T_n zugeordneten Punkt T_n und die ihm zugeordnete Gerade $\bar{t}_n$ im Strahlenbüschel $(\bar{t}_n)$ seine Nullebene τ_n bestimmt. Das geometrische Ort der Nullebenen der Punkte auf einer Geraden p ist demnach das Erzeugnis der im Raum projektiv zugeordneten Punktreihe auf der Geraden p und eine Geradenbüschels in der Ebene π, also offenbar ein Kegel 2. Grades. Der Scheitel dieses Kegels ist, wie bekannt, im Scheitel des Geradenbüschels. Es gilt also auch dieser Satz:

10 *h*). *Die Nullebenen der Punkte einer Geraden p hüllen einen Kegel* 2. *Grades ein, welchen die Gerade p berührt, und dessen Scheitelpunkt in der Ebene* π *liegt.*

Betrachtet man anstatt der Geraden p einen Strahl q des Strahlenbündels $\{D\}$, so folgt auf Grund der bisherigen Betrachtungen und Schlüsse, dass der Kegel der Nullebenen der Punkte dieses Strahles q in zwei Ebenenbüschel zerfällt.

11. Der quadratische Nullraum eines Strahlenbündels und eines unendlich fernen Polarfeldes.

Die Inzidenzkonik k^n im unendlich fernem Polarfeld $(\pi)^n$ kann mittels eines Direktionskegels bestimmt werden, oder durch eine Fläche 2. Grades die, diese Inzidenzkonik k^n enthält, also der Mittelpunkt S dieser Fläche der Scheitel ihres reellen oder imaginären asymptotischen Kegels ist. Durch diese Fläche ist, wie bekannt, das unendlich ferne Polarfeld $(\pi)^n$ betimmt. Nimmt man jetzt den Mittelpunkt S als Scheitel D des Geradenbündels $\{D\}$, gilt offenbar auch dieser Satz:

11 *a*). *Wird durch eine Fläche* 2. *Grades jedem Punkt des Raumes diejenige Ebene zugeordnet, die der Durchmessergeraden dieses Punktes bezüglich dieser Fläche* 2. *Grades konjugiert ist, und wird jeder Ebene des Raumes ihr Schnittpunkt mit der ihr konjugierten Durchmessergeraden bezüglich dieser Fläche* 2. *Grades zugeordnet, bekommt man einen quadratischen Nullraum dieser Fläche* 2. *Grades.*

Dieser Nullraum ist vom *R.* Sturm in der »Liniengeometrie I« erwähnt, aber nur erwähnt ohne irgend welche Betrachtungen.

Man sah bisher, dass die Nullflächen der Raumpunkte in allen Nullräumen eines Polarfeldes die Inzidenzkonik k enthalten. Auf Grund dieser Tatsache gilt für den quadratischen Nullraum einer Fläche 2. Grades und ihrer unendlich fernen Schnittkurve folgender Satz:

11 *b*). *Die den Raumpunkten in einem quadratischen Nullraum einer Fläche* 2. *Grades und ihrer unendlich fernen Konik zugeordneten Nullflächen sind mit dieser Fläche homothetisch im Raum geordnet.*

Offenbar gilt das ganz Analoge, wenn die Konik k auf einer Fläche 2. Grades in einer endlichen Ebene angenommen wird.

Betrachtet man nun zwei homothetische und konzentrische Flächen 2. Grades ist leicht zu sehen, dass beide Flächen denselben quadratischen, soeben betrachteten Nullraum bilden. Da durch jede Fläche 2. Grades ein Büschel derartiger konzentrischer Flächen bestimmt ist, folgt offenbar folgender Satz:

11 *c*). *Die Berührungsebenen und ihre Berührungspunkte im Büschel konzentrischer homothetischer Flächen* 2. *Grades bilden einen quadratischen Nullraum.*

12. Die quadratischen Nullräume des absoluten Kegelschnittes.

Wie bekannt ist durch das unendlich ferne Polarfeld des absoluten Kegelschnittes die Normalität im Raum bestimmt. Es genügt also zur Bestimmung eines quadratischen Nullraumes des absoluten Kegelschnittes nur den Scheitelpunkt D eines Geradenbündels $\{D\}$ anzunehmen. Die Nullebene irgend eines Punktes P des Raumes ist diejenige Ebene dieses Punktes, die auf der Verbindungsgeraden PD senkrecht steht, da PD der den Punkt P enthaltende Strahl des Strahlenbündels $\{D\}$ ist. Diesen einfachsten quadratischen Nullraum können wir also auf folgende Weise definieren. Satz:

12 *a*). *Die orthogonale Projektion eines gegebenen Punktes D auf alle Ebenen des Raumes sind Nullpunkte dieser Ebenen im quadratischen Nullraum des absoluten Kegelschnittes und dieses Punktes.*

Auch diesen Nullraum hat *R.* Sturm in seiner »Liniengeometrie I« erwähnt, ohne ihn näher zu betrachten.

Es ist leicht zu sehen, dass ein derartiger quadratischer Nullraum auch durch eine Kugel, oder einen konzentrischen Kugelbüschel mit dem Mittelpunkt D qestimmt ist, und dass in ihm die Nullflächen der Raumpunkte Kugeln, und die Nullflächen der Ebenen τ_n Drehparaboloide sind. Die Achsen dieser Drehparaboloide sind Strahlen des Strahlenbündels $\{D\}$, auf welchen der Punkt D der gemeinsame Brennpunkt der Meridiane dieser Drehparaboloide ist. Der Nullpunkt dieser Ebenen τ_n ist der Scheitelpunkt, und die Ebenen τ_n sind die Scheitelberührungsebenen dieser Drehparaboloide.

LITERATUR:

[1] *V. Niče*: Der kubische Nullraum zweier linearen Kongruenzen, Rad JAZU **374** (1977), 5—31.

[2] *V. Niče*: Über eine Quasi-Nullraumabbildung, Rad JAZU, **367** (1974) 37—55.

[3] *R. Sturm*: Liniengeometrie I, Teubner, Leipzig 1892, S. 78, 79.

Angenommen in II. Abteilung
12. 2. 1980.

O ništičnim prostorima određenim pomoću polarnog polja

Vilim Niče, Zagreb

Sadržaj

Pridružimo li točkovni i ravninski prostor tako da točki pridružena ravnina sadrži tu točku, te ravnini pridružena točka leži u toj ravnini, dobivamo na taj način ništični prostor. Ako dva korelativno pridužena prostora zadovoljavaju tim uvjetima, dobiva se poznati linearni ništični prostor.

U ovom su radu zadani jedna linearna kongruencija (ab), ravnalica a, b i jedno polarno polje (π) u ravnini π. Svaka ravnina ϱ prostora siječe ravninu π u nekom pravcu $\bar{r}$, kojemu je u polarnom polju (π) pridružena točka $\bar{R}$. Ovom točkom prolazi zraka r linearne kongruencije (ab), koja ravninu π probada u točki R. Uzmemo li najprije točku R i njome postavimo zraku r kongruencije (ab), probada ona ravninu π u točki $\bar{R}$. U polarnom polju (π) točki $\bar{R}$ je pridružen pravac $\bar{r}$, koji s točkom R određuje ravninu ϱ. Tako pridruženi parovi točka-ravnina čine kubični ništični prostor, koji je istražen u ovom radu. Budući da polarno polje (π) može biti u konačnosti ili beskonačnosti s realnom ili imaginarnom inicidentnom konikom, a linearne kongruencije postoje tri, to postoji 12 vrsta takvih kubičnih ništičnih prostora.

Nakon što je određena kubična prostorna krivulja ništičnih točaka ravnina jednog pravca, te kubična omotaljka ništičnih ravnina točaka jednog pravca, izveden je red plohe ništičnih točaka ravnina jednog svežnja, kao i razred one koju omataju ništične ravnine točaka jedne ravnine. Red prve plohe daje nam red, a razred druge plohe daje nam razred zadanog ništičnog prostora. Izvedene su i neke osobine tih kubičnih ništičnih ploha, a nađeno je i njihovih 27 pravaca. Ovaj rad je razdijeljen u 12 dijelova s ovim podnaslovima:

Uvod. 1. Ništični prostor jednog polarnog polja i linearne kongruencije. 2. Ništične točke ravnina jednog pramena ravnina. 3. Točkama jednog pravca pridružene ništične ravnine. 4. Red i razred ništičnog prostora jednog polarnog polja i jedne linearne kongruencije. 5. Singularni slučajevi ništičnih ploha jedne točke. 6. Jedna osobina ništičnih ploha jedne točke prostora. 7. Pravci kubične ništične plohe jedne točke prostora. 8. Vrste ništičnih prostora jednog polarnog polja i jedne linearne kongruencije. 9. Ništični prostor linearne kongruencije i jednog neizmjerno dalekog polarnog polja. 10. Ništični prostori polarnog polja i jednog svežnja pravaca. 11. Kvadratni ništični prostor jednog svežnja pravaca i neizmjerno dalekog polarnog polja. 12. Kvadratni ništični prostori apsolutne čunjosječnice.

Primljeno u II. razredu
12. 2. 1980.