JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VILIM NIČE

DER KUBISCHE NULLRAUM ZWEIER LINEAREN KONGRUENZEN

KUBIČNI NIŠTIČNI PROSTORI DVIJU LINEARNIH KONGRUENCIJA

ZAGREB

1977

Vilim Niče:

DER KUBISCHE NULLRAUM ZWEIER LINEAREN KONGRUENZEN

Herrn Prof. Dr. Fritz Hohenberg zum 70. Geburtstag gewidmet

Einführung: Wird jedem Raumpunkt eine oder mehrere seiner Ebenen und jeder Ebene des Raumes einer oder mehrere ihrer Punkte zugeordnet, so wird auf diese Weise, wie bekannt, ein Nullraum gebildet. In unseren Untersuchungen in dieser Arbeit werden nur diejenigen Nullräume in Betracht gezogen, in welchen jeder Ebene des Raumes nur einer ihrer Punkte und jedem Punkt des Raumes nur eine seiner Ebenen zugeordnet sind. Also, nach den bekannten Sturmschen Bezeichnungen wird in unseren Fällen $\alpha = 1$ und $\beta = 1$ sein.

In der Arbeit »Prilog načinima izvođenja ploha 3. reda«, RAD knj. 292 (1952), str. 171—191. Jugoslav. akad. znan. i umjet. Zagrebu, (Contribution aux méthodes de génération des surfaces du 3^e ordre. Bulletin international, livre 13, Extrait de RAD de l'Académie Yougoslave, Tome 292, pp. 171—191.) ist die bekannte Grassmmansche Erzeugungsart der Flächen 3. Ordnung in einer neuen Art ausgeführt worden. Eine Fläche 3. Ordnung entstand hier als das Erzeugnis eines Ebenenbündels mit dem Scheitel P und zweier linearen Kongruenzen so, dass jeder Ebene des Bündels (P) der Schnittpunkt der zwei in dieser Ebene ligenden Strahlen der zwei gegebenen Kongruenzen zugeordnet ist. Auf Grund der in dieser Arbeit ausgeführten Eigenschaft, dass die den Punkten einer Geraden g des Raumes die auf diese Weise zugeordneten Ebenen ein kubisches Ebenengewinde bilden, war es leicht zu beweisen, dass die den ∞^2 Ebenen eines Punktes P auf diese Weise zugeordneten ∞^2 Punkte eine allgemeine Fläche 3. Ordnung bilden.

Es ist in dieser Arbeit auch ausgeführt worden, dass die den Ebenen einer Geraden g auf die eben beschriebene Weise zugeordneten Punkte eine Raumkurve 3. Ordnung bilden, für welche die Gerade g eine Bisekante ist. Auf Grund dessen folgt weiter, dass die den Punkten einer Ebene auf die beschriebene weise zugeordneten Ebenen eine Fläche 3. Klasse einhüllen.

Da wir den Scheitel P des Ebenenbündels (P) in jedem Raumpunkt annehmen können, gilt also das Folgende: *Wenn zwei lineare Strahlkongruenzen gegeben sind, sind auf die eben beschriebene Weise jedem Raumpunkt eine seiner Ebenen, und jeder Ebene des Raumes einer ihrer*

Punkte zugeordnet. Es ist also auf diese Weise ein Nullraum gebildet, in welchem jedem Nullpunkt eine Nullebene, und jeder Nullebene ein Nullpunkt zugeordnet sind. Diese Zuordnung ist offenbar involutorisch. Da aber, wie schon erwähnt, auf jeder Geraden des Raumes in diesem Nullraum zwei Nullpunkte liegen, deren Nullebenen diese Gerade enthalten, gilt für die bekannten Sturmschen Charakteristiken eines höheren Nullraumes, dass hier $\alpha = 1$, $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ ist. Auf Grund dessen ist auch klar ($1 + 2 = 3$), dass es sich hier bei unserem Nullraum um einen kubischen Nullraum handelt, wass eigentlich auch in der vorne erwähnten Arbeit schon ausgeführt und bewiesen worden ist, ohne dass dabei ein Nullraum erwähnt wurde. Je nach dem, welche zwei von den drei bekannten linearen Kongruenzen angenommen sind, und wie viele ihrer Leitgeraden sich schneiden, werden die in den durch sie bestimmten Nullräumen den Ebenen eines Punktes zugeordneten Nullpunkte kubische Flächen bilden, welche alle derselben Art sein werden bezüglich der Realität ihrer Geraden und der Zahl und Art ihrer Doppelpunkte. Die den Raumpunkten auf diese Weise in unserem Nullraum zugeordneten kubische Flächen werden als die den Raumpunkten zugeordneten Nullflächen bezeichnet.

Auf Grund der Definition unseres kubischen Nullraumes ist leicht zu ersehen: a) *Jeder Raumpunkt P liegt auf der ihm zugeordneten kubischen Nullfläche des gegebenen Nullraumes.* b) *Jeder Punkt des Raumes liegt auf ∞^2 kubischen Nullflächen unseres Null raumes, die den Punkten seiner Nullebene zugeordnet sind.* c) *Von den ∞^2 den Punkten einer Ebene π zugeordneten kubischen Nullflächen enthalten einen beliebigen Raumpunkt ihrer ∞^1.* d) *Jeder Raumpunkt E liegt auf einer der ∞^1 den Punkten einer Geraden zugeordneten kubischen Nullflächen, wenn diese Gerade nicht in der dem Punkt E zugeordneten Nullebene ε liegt.*

Die Eigenschafte a) und b) gehen aus der Definition des Nullraumes hervor. Die Eigenschaft c) ist folgend zu verstehen: Ein Punkt E gehört zu seiner Nullebene ε, welche die Nullebene π des Punktes P in einer Geraden e schneidet. Die den Punkten der Geraden e zugeordneten kubischen Nullflächen enthalten den Punkt E. Die Eigenschaft d) ist auch sehr leicht zu erkennen: Jede Gerade des Raumes schneidet die Nullebene ε irgend eines Raumpunktes E in einem Punkt P. Die dem Punkt P zugeordnete kubische Nullfläche enthält den Punkt E, weil sich der Punkt P in der Nullebene ε des Punktes E befindet.

In unseren Ausführungen in dieser Arbeit werden nur diejenigen kubischen Nullflächen betrachtet, welche durch zwei lineare hyperbolische Strahlkongruenzen bestimmt sind, und die zwei reelle gemeinsame Strahlen haben. In der vorher erwähnten Arbeit ist ausgeführt worden, dass die einem Punkt zugeordnete kubische Nullfläche in diesem Fall 27 reelle Geraden enthält. Also alle betrachteten kubischen Nullflächen unseres Nullraumes gehören in diesem Fall zu der allgemeinsten Art kubischer Flächen, die 27 reelle Geraden enthalten.

Der stetigen linearen Punktmenge einer Geraden g im Raum ist in unserem eben erwähnten Nullraum eine stetige lineare Menge kubischer Nullflächen zugeordnet. Die gleichnamigen Geraden dieser ∞^1 kubischen

Nullflächen bilden stetige lineare Geradenmengen, elso Regelflächen oder Geradenbüschel, oder zusammenfallende Geraden, die in dieser Arbeit betrachtet werden.

Die den Punkten der quadratischen stetigen Punktmenge einer Ebene zugeordneten kubischen Nullflächen bilden eine stetige quadratische Menge derartiger kubischer Flächen. Alle gleichnamigen Geraden dieser ∞^2 Nullflächen bilden offenbar eine stetige quadratische Geradenmenge, also eine Strahlkongruenz. Gewisse dieser Kongruenzen werden sich als Strahlfeld erweisen, und einige ziehen sich in eine Gerade zusammen.

Die 27 reellen Geraden auf einer kubischen Fläche schneiden einander in 135 Punkten. Jeder dieser Schnittpunkte wird im ersten beschrieuenen Fall eine stetige lineare Punktmenge bilden, also eine Raumkurve. In dem anderen erwähnten Fall bilden diese Schnittpunkte eine stetige quadratische Punktmenge, also eine Fläche. Alle diese Raumkurven und Flächen, mit allen ihren Ausartungen, haben wir die Absicht in dieser Arbeit zu bestimmen und zu untersuchen.

1. *Über die 27 Geraden der kubischen Nullflächen unserer Nullraumes.*

Es seien zwei lineare hyperbolische Kongruenzen $[ab]$, $[cd]$ durch ihre Leitgeraden a, b und c, d gegeben. Die zwei reellen gemeinsamen Strahlen, also Transversalen der Geraden a, b, c, d sollen mit u, v bezeichnet werden. In der in der Einleitung erwähnten Arbeit ist bewisen worden, dass diese sechs Geraden auf jeder der ∞^3 den Raumpunkten zugeordneten kubischen Nullflächen liegen.

Wenn eine Ebene zwei Geraden einer kubischen Fläche enthält, liegt in ihr offenbar noch eine dritte Gerade dieser Fläche. Diese dritte Gerade einer kubischen Fläche wird durch acht ihrer weiteren Geraden geschnitten, die in dieser Ebene selbstverständlich nicht liegen, weil jede Gerade einer Fläche 3. Ordnung durch 10 andere ihrer Geraden geschnitten wird. Auf Grund dessen bekommt man folgende für unsere weiteren Betrachtungen wichtige Eigenschaft der kubischen Flächen mit 27 reellen Geraden:

Satz 1. *Wenn eine Ebene zwei sich schneidende Geraden einer kubischen Fläche enthält, dann muss jede weitere Gerade dieser Fläche, welche diese zwei nicht schneidet, die dritte in dieser Ebene liegende Gerade dieser Fläche schneiden.*

Da die Geraden u, v die vier Leitgeraden a, b, c, d schneiden, liegt auf jeder kubischen Nullfläche unseres Nullraumes noch eine Gerade in den Ebenen der Geradenpaare au, bu, cu, du, av, bv, cv und dv, welche wier mit (au), (bu), (cu), (du), (av), (bv), (cv), (dv) bezeichen werden. Also, auf einer einem Raumpunkt P zugeordneten kubischen Nullfläche in unserem Nullraum, haben wir bisher 14 ihrer Geraden bestimmt. Auf dieser dem Punkt P zugeordneten kubischen Nullfläche befinden sich, wie aus der vorne erhähnten Arbeit ersichlich ist, auch die diesen Punkt enthaltenden s_1, s_2 der Kongruenzen $[ab]$, $[cd]$. Da der Strahl s_1 durch die Geraden a, b geschnitten ist, und der Strahl s_2 durch die Geraden c, d, aber keine dieser sechs Geraden die Geraden u, v schneidet, liegt in der Ebene der Geraden s_1, s_2 eine drite Gerade l dieser kubischen Nullfläche, welche die Schnittpunkte der Geraden u, v in der Ebene der Geraden s_1, s_2 verbindet. Man sieht hier, dass die Geraden l aller kubischen Nullflächen unseres Nullraumes Strahlen der linearen hyperbolischen Kongruenz $[uv]$ der Leitgeraden u, v, sind. Also liegt jeder Strahl l auf ∞^1 Nullflächen unseres Nullraumes.

Wie eben gezeigt, schneidet die Gerade s_1 die Geraden a, b, und die Gerade s_2 die Geraden c, d. In der Ebene der Geraden a, s_1 liegt offenbar noch eine dritte Gerade der betrachteten kubischen Nullfläche, welche die Geraden c, d schneiden muss, weil diese zwei Geraden keine der Geraden a, s_1 schneiden. Alle derartigen Geraden $(as_1) = m$ sind demnach Strahlen der Kongruenz $[cd]$. Ganz analog ist auch die Gerade $(bs_1 = n$ ein Strahl dieser Kongruenz. Die Geraden $(cs_2) = m_1$ und $(ds_2) = n_1$ sind auf dieselbe Weise Strahlen der Kongruenz $[ab]$. Man hat also bisher 21 Geraden der kubischen Nullflächen in unserem Nullraum gefunden.

Wie wir eben sahen, schneidet jede Gerade l die Geraden u, v. Also liegt in der Ebens der Geraden l, u eine weitere Gerade r_1 der kubischen Nullfläche, und in der Ebene der Geraden l, v noch eine r_2. Man sah auch oben, dass die Geraden m, n die Geraden c, d schneiden. Also liegt in der Ebene der Geraden m, c noch eine Gerade (mc) unserer kubischen Nullfläche. Weil die Geraden m, c die Gerade b nicht schneiden, muss die Gerade (mc) die Gerade b schneiden. Also ist jede Gerade (mc) ein Strahl der linearen hyperbolischen Kongruenz $[bc]$ der Leitgeraden b, c. Ganz auf die gleiche Weise ist die Gerade (nc), in der Ebene der Geraden n, c, ein Strahl der Kongruenz $[ac]$ der Leitgeraden a, c, wie auch die analogen Geraden (md) und (nd) Strahlen der Kongruenzen $[bd]$, resp. $[ad]$ der Leitgeraden b, d, resp. a, d, sind.

Auf die gleiche Weise müssen auch die analogen Geraden $(m_1 a)$, $(m_1 b)$, $(n_1 a)$, $(n_1 b)$ auf unserer kubischen Nullfläche liegen. In der in der Einleitung erwähnten Arbeit wurde bewiesen, dass $(mc) = (n_1 b)$, $(nc) = = (n_1 a)$, $(md) = (m_1 b)$ und $(nd) = (m_1 a)$ gilt. Es sind also alle 27 Geraden jeder kubischen Nullfläche in unserem Nullraum gefunden und geordnet, so wie auch jede von ihnen mit einem Zeichen (Namen) versehen, was für unsere weiteren Betrachtungen sehr wichtig sein wird.

2. *Die stetigen linearen und quadratischen Mengen der den Punkten einer Geraden und einer Ebene zugeordneten kubischen Nullflächen.*

a) Alle ∞^3 der den Punkten des Raumes in unserem Nullraum zugeordneten kubischen Nullflächen enthalten, wie gezeigt, die Geraden a, b, c, d, u, v. Dies gilt also auch für diejenigen ∞^1, die den Punkten einer beliebigen Geraden g zugeordnet sind. Die Durchdringungskurve irgendwelcher zwei dieser ∞^1 Flächen, die zwei Punkten der Geraden g zugeordnet sind, zerfällt also in diese sechs Geraden und eine Raumkurve 3. Ordnung k^3. Da die Ebenen der Geraden g alle Punkte der Geraden g enthalten, müssen auch die Nullpunkte dieser Ebenen auf allen den Punkten der Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen liegen, also auf dem kubischen Teil k^3 der Durchdringungskurve 9. Ordnung. Dass die den Ebenen einer Geraden g in unserem Nullraum zugeordneten

Nullpunkte eine Raumkurve 3. Ordnung bilden, war schon in der am Anfang erwähnten Arbeit ausgeführt. Dass ein Raumpunkt nur auf einer kubischen Nullfläche der linearen Menge der den Punkten einer Geraden g zugeordneten Nullflächen liegt, sahen wir schon vorher. Auf Grund dessen gelten folgende zwei Sätze:

Satz 2. *Die den Punkten einer Geraden in unserem Nullraum zugeordneten kubischen Nullflächen bilden ein Büschel, dessen Grundkurve in sechs Geraden und eine Raumkurve 3. Ordnung zerfällt, für welche diese Gerade eine Bisekante ist.*

Satz 3. *Durch irgendwelche zwei kubischen Nullflächen unseres Nullraumes ist ein Büschel derartiger Flächen bestimmt.*

Es ist leicht ersichtlich, dass auf Grund dieser zwei Sätze auch folgender Satz gültig ist:

Satz 4. *In unserem kubischen Nullraum gibt es ∞^4 Büschel kubischer Nullflächen, und jede von diesen ∞^3 kubischen Nullflächen befindet sich in ∞^1 dieser Büschel.*

b) Man nehme an, dass die Gerade g die Leitgerade a der Kongruenz $[ab]$ im Punkt A schneidet. Die den Ebenen dieser Geraden zugeordneten Nullpunkte bilden eine Kurve 2. Grades in der Ebene Ab des Punktes A und der Geraden b, die den Punkt A enthält. In der Ebene der Geraden a, g befindet sich die Gerade m $(= as_1)$ (Strahl der Kongruenz $[cd]$) aller ∞^2 den Punkten dieser Ebene zugeordneten kubischen Nullflächen. Da die Gerade g in dieser Ebene liegt, gilt dies offenbar auch für die den Punkten der Geraden g zugeordneten Nullflächen. Anstatt der Leitgeraden a kann selbstverständlich jede der vier Leitgeraden der Kongruenzen $[ab]$, $[cd]$ analog in Betracht gezogen werden. Es gilt also auch das Folgende:

Satz. 5. *Wenn eine Gerde g eine der Leitgeraden der Kongruenzen $[ab]$, $[cd]$ schneidet, bilden die den Punkten dieser Geraden in unserem Nullraum zugeordneten kubischen Nullflächen ein Büschel, dessen Grundkurve in 7 Geraden und einen Kegelschnitt zerfällt.*

Da im Raum vier Mengen von ∞^3 Geraden bestehen, die je eine der Leitgeraden a, b, c, d der zwei gegebenen Kongruenzen schneiden, gibt es demnach in unserem kubischen Nullraum auch vier Mengen von ∞^3 der im Satz 5. beschriebenen Büschel. Weil weiterhin jeder Raumpunkt durch ein Strahlenbüschel mit jeder der Leitgeraden a, b, c, d verbunden werden kann, folgt auch folgender Satz:

Satz 6. *In einem durch zwei lineare hyperbolische Kongruenzen bestimmten Nullraum bestehen ∞^3 Büschel kubischer Nullflächen dieses Nullraumes, deren Grundkurve in 7 Geraden und einen Kegelschnittzer-*

fallen. Jede kubische Nullfläche dieses Nullraumes befindet sich in ∞^1 *dieser Büschel.*

Man nehme die Gerade g im raum so an, dass sie die Leitgeraden a, b der Kongruenz $[ab]$ in Punkten A, B schneidet. Die den Ebenen dieser Geraden zugeordneten Nullpunkte befinden sich auf dieser Geraden, weil diese Gerade g die gemeinsame Gerade s_1 aller den Punkten dieser Geraden zugeordneten kubischen Nullflächen ist. Alle diese Flächen haben, auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen, auch die Geraden m $(= as_1)$ und n $(= bs_1)$ gemeinsam, weil die Gerade g die Geraden a, b schneidet. Also, alle diese den Punkten dieser Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen, haben die Geraden g, m, n gemeinsam. Offenbar gilt das ganz Analoge, wenn die Gerade g die Leitgeraden c, d der Kongruenz $[cd]$ schneidet. Da jeder Raumpunkt einen Strahl der Kongruenz $[ab]$ und einen Strahl der Kongruenz $[cd]$ enthält, gilt auch fogender Satz:

Satz 7 *In den durch zwei lineare hyperbolische Kongruenzen bestimmten kubischen Nullraum bilden die den Punkten eines Strahles der Kongruenzen* $[ab]$, *oder* $[cd]$ *zugeordneten kubischen Nullflächen ein Nullflächenbüschel, dessen Grundkurve 9. Ordnung in 9 Geraden zerfällt. Sechs vom ihnen sind, wie bekannt, die Geraden* a, b, c, d, u, v *und von den drei letzten ist eine ein Strahl der einen Kongruegz, und die zwei anderen sind Strahlen der anderen Kongruenz. Jede der* ∞^3 *Kubischen Nullflächen unseres Nullraumes befindet sich in zwei derartigen Büscheln.*

Dass jeder Punkt des Raumes, ausserhalb dieser neun Geraden, nur auf einer Fläche eines derartigen Büschels liegt, ist klar auf Grund früherer Ausführungen.

d) Man nehme an, dass die Gerade g die Leitgerade a der Kongruenz $[ab]$ und die Leitgerade c der Kongruenz $[cd]$ in den Punkten A, C schneidet. Die in den Ebenen dieser Geraden g liegenden Strahlen s_1 bilden in der Ebene Ab das Strahlenbüschel (A) und die in diesen Ebenen liegenden Strahlen s_2 bilden das in der Ebene Cd liegende Strahlenbüschel (C). Die sich in den Ebenen der Geraden g befindenden Geraden s_1, s_2 schneiden sich also auf einem Strahl s_2 der Kongruenz $[bd]$ der Leitgeraden b, d. Dieser Strahl liegt demnach auf allen den Punkten dieser Geraden g zugeordneten kubischen Nullfächen. Da die g die Leitgeraden a und c schneidet, haben, auf Grund der in der Abt. 1. ausgeführten Betrachtungen, alle die ihren Punkten zugeordneten kubischen Nullflächen die Geraden m und m_1 gemein. Also auch in diesem Fall bekommt man ein Büschel kubischer Nullflächen in unserem Nullraum, dessen Grundraumkurve 9. Ordnung in neun Geraden a, b, c, d, u, v, s, m und m_1 zerfällt. Was für den Strahl g (die Gerade g) der Kongruenz $[ac]$ gilt, gilt offenbar auch für die Strahlen der Kongruenzen $[ad]$, $[bc]$ und $[bd]$. Es gilt also auch folgender Satz:

Satz 8. *Wenn eine Gerade* g *eine Leitgerade der Kongruenz* $[ab]$ *und eine Leitgerade der Kongruenz* $[cd]$ *schneidet, bilden die ihren Punk-*

ten zugeordneten kubischen Nullflächen auch einen Flächenbüschel dessen Grundkurve 9. Ordnung in neun Geraden zerfällt. Jeden Punkt im Raum enthält offenbar je eine Fläche der Nullflächenbüschel dieser Art.

e) Nimmt man die Gerade g so an, dass sie die Gerade u schneidet, dan bilden die diese Gerade g schneidenden Strahlen der Kongruenzen $[ab]$, $[cd]$ zwei Regelflächen 2. Grades, die sich in den Gerden g, u und in einem diese Gerade schneidenden Kegelschnitt durchdringen. Die Punkte dieses Kegelschnittes sind, wie bekannt, die Nullpunkte der die Gerade g enthaltenden Ebenen. Also ist dieser Kegelschnitt ein quadratischer Teil der Gerndraumkurve 9. Ordnung des dieser Geraden g zugeordneten Nullflächenbüschels. Auch hier zerfällt also diese Grundraumkurve in 7 Geraden und einen Kegelschnitt. Dasselbe gilt offenbar wenn die Gerade g die Gerade v schneidet.

Wenn die Gerade g die Gerade u und die Gerade v schneidet, wird offenbar der eben erwähnte Kegelschnitt in zwei weitere Geraden zerfallen. Also auch in einem solchen Fall bekommt man in unserem Nullraum ein Nullflächenbüschel dessen Grundraumkurve in 9 Geraden zerfällt. Dasselbe tritt offenbar auch dann ein, wenn die Gerade g die Gerade u, oder die Gerade v, und noch eine der Geraden a, b, c, d schneidet. Alle diese Arten hier näher zu betrachten haben wir nicht die Absicht.

f) Es war schon in der Einführung erwähnt, dass auf Grund der Definition unseren kubischen Nullraumes jeden Raumpunkt P ∞^2 kubischer Nullflächen unseres Nullraumes enthält. Die Nullpunkte dieser ∞^2 Nullflächen liegen in der Nullebene π des Punktes P. Durch jeden Punkt im Raum ist also in unserem kubischen Nullraum eine derrartige stetige quadratische Menge kubischer Nullflächen gegeben, die wir als ein *Nullflächenbündel* bezeichnen werden. Die dem Punkt P zugeordnete Nullfläche werden wir als *Hauptnullfläche* des diesem Punkt P zugeordneten Nullflächenbündels betrachten. Durch die Geraden der Ebene π, die den Punkt P enthalten (das Gerdenbüschel (P)), sind ∞^1 Nullflächenbüschel dieses Nullflächenbündels bestimmt, wo alle diese Nullflächenbüschel die Hauptnullfläche dieses Büschels enthalten. Jeder Punkt A des Raumes liegt auf einer Nullfläche eines jeden dieser ∞^1 Nullflächenbüschel, weil die Nullebene α des Punktes A jeden Strahl des Strahlenbüschels (P) in der Ebene π in einem Punkt schneidet.

3. *Der Zerfall der Grundraumkurve 9. Ordnung in 9 Geraden in den Büscheln der kubischen Nullflächen.*

Schneidet man mit einer Ebene α der Geraden a andere Teile der zerfallenen Grundraumkurve 9. Ordnung eines Nullflächenbüschels in unserem Nullraum, bekommt man 8 Schnittpunkte, von welchen diejenige, die nicht auf der Geraden a liegen, auf allen kubischen Nullflächen dieses Nullflächenbüschels liegen müssten. Ausserdem müssten sich alle diese Schnittpunkte auf einem Kegelschnitt befinden, welcher sich auf jeder Nullfläche dieses Büschels bedindet. Dies aber ist nur dann möglich, wenn vier von diesen acht Schnittpunkten auf der Geraden a liegen, und vier ausserhalb dieser Geraden sind. Diese letzten vier sind dann die Grundpunkte eines Kurvenbüschels 2. Grades, wo sich jede seiner Kurven auf einer Nullfläche des betrachteten Büschels befindet. Wie dies im ersten betrachteten Fall der in 9 Geraden zerfallenen Grundraumkurve 9. Ordnung aussieht, werden wir gleich erörtern.

Man betrachte zu erst den Fall wo die Gerade eines derartigen Nullflächenbüschels ganz beliebig im Raum steht, sodann soll sie die Gerade a schneiden, und zuletzt möge diese Gerade die Geraden a und b schneiden.

a) Wir sahen schon, dass die den Punkten einer Geraden g in allgemeiner Lage zugeordneten kubischen Nullflächen ein Nullflächenbüschel bilden, dessen Grundraumkurve 9. Ordnung in die Geraden a, b,c, d, u, v und eine Raumkurve k^3 3. Ordnung zerfällt Es ist leicht zu sehen, dass die Geraden g, a, b, c, d Bisekanten der kubischen Raumkurve k^3 sind. Eine Ebene α, z. B. der Geraden a, schneidet die Geraden b, c, d, u, v und die kubische Raumkurve k^3 in acht Punkten, von welchen die Schnittpunkte mit den Geraden u, v und die mit der Raumkurve k^3 auf dieser Geraden a liegen. Also, diese restlichen vier Punkte sind Grundpunkte des vorher erwähnten Kurvenbüschels 2. Grades .Es ist offenbar ganz gleich, od die Ebene α die Gerade a, die Gerade b, die Gerade c, oder die Gerade d enthält. Wenn in der Ebene die Gerade u liegt, wird diese Gerade durch die Geraden a, b, c, d geschnitten, und ihre Schnittpunkte mit der Geraden v und der kubischen Raumkurve k^3 sind Grundpunkte des betrachteten Kurvenbüschels 2. Grades.

b) Es schneide die Gerade g die Leitgerade a im Punkt A. Die den Punkten dieser Geraden zugeordneten kubischen Nullflächen bilden ein Büschel, dessen Grundraumkurve 9. Ordnung, wie vorher gezeigt, in die Geraden a, b, c, d, u, v und ihre gemeinsame Gerade m, wie auch in einen in der Ebene Ab liegenden Kegelschnitt e zerfällt. Der Kegelschnitt e schneidet offenbar die Gerade b in zwei Punkten und die Geraden c, d, m, a in je einem Punkt, und zwar die Gerade a im Punkt A. Eine Ebene α der Geraden a schneidet den Kegelschnitt e im Punkt A, wie auch die Geraden m, n, v in Punkten, die alle auf der Geraden a liegen. Die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Geraden b, c, d und ihr zweiter Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt e bilden die vier Grundpunkte des eben erwähnten Kegelschnittbüschels. Als Beispiel schneide eine Ebene der Geraden c die Geraden u, v, m und den Kegelschnit e in je einem Punkt, die alle vier auf der Geraden c liegen. Die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Geraden a, b, c und ihr zweiter Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt e sind die betrachteten Grundpunkte des erwähnten Kegelschnittbüschels. Ganz analog ist es leicht dasselbe zu beweisen, wenn die Ebene α irgend eine andere der Geraden der zerfallenen Raumgrundkurve 9. Ordnung enthält.

c) Man nehme jetzt an, dass die Gerade g die Geraden a, b in den Punkten A, B, schneidet. Die den Punkten dieser Geraden zugeordneten kubischen Nullflächen bilden, wie gezeigt, ein Büschel, dessen Raumgrundkurve 9. Ordnung in neun Geraden a, b, c, d, u, v, m, n und die Gerade g zerfällt, weil diese Gerade $g = s_1$ ein Strahl der Kongruenz [ab] ist. Auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen folgt, dass z. B.

die Gerade a die Geraden u, v, m und g schneidet. Man bezeichne dies so: $a \times u, v, m, g$. Auf die gleiche Weise gilt das Folgende:

$a \times u, v, m, g$	$d \times u, v, m, n$	$m \times a, c, d, g$
$b \times u, v, n, g$	$u \times a, b, c, d$	$n \times b, c, d, g$
$c \times u, v, m, n$	$v \times a, b, c, d$	$g \times a, c, m, n$

Man sieht also, dass auch hier die vorher festgestellte Bedingung befriedigt ist, da in jeder Ebene dieser neun Geraden vier der betrachteten Schnittpunkte auf dieser Geraden bleiben, während die anderen vier die besprochenen Grundpunkte der in diesen Ebenen bestehenden Kegelschnittbüschel sind. Es gilt also auch folgender Satz:

Satz 9. *Die den Punkten der Strahlen der Kongruenzen* [ab], [cd] *zugeordneten kubischen Nullflächen bilden ein Nullflächenbüschel, deren Grundraumkurve 9. Ordnung in 9 Geraden zerfällt, von welchen jede durch vier andere dieser Geraden geschnitten wird.*

Offenbar, muss dies auch in den anderen vorher beschriebenen Fällen des Zerfallens der Grundkurve gelten. Man kann dies also als eine Bedingung des Bestehens eines derartigen Büschels betrachten.

4. *Über die lineare stetige Menge der gleichnamigen Geraden auf den kubischen Flächen eines Nullflächenbüschels.*

Man nehme wieder an, dass zwei lineare hyperbolische Kongruenzen [ab], [cd], mit zwei gemeinsamen reellen Strahlen u, v, durch ihre Leitgeraden a, b und c, d gegeben sind. Durch die Punkte einer im Raum beliebig sich befindenden Gerade g sei auch hier, auf bekante Weise, ein Büschel kubischer Nullflächen in unserem Nullraum gegeben.

Der stetigen Punktmenge auf der Geraden g ist eine stetige Menge der diesen Punkten zugeordneten kubischen Nullflächen zugeordnet, die das bekannte Büschel bilden. Jede gleichnamige Gerade auf diesen Flächen erzeugt eine stetige Geradenmenge, ausser der Geraden a, b, c, d, u, v, die sich, wie bekannt, auf allen kubischen Nullflächen unseres Nullraumes befinden. Also, jede der restlichen 21 Geraden muss eine Regelfläche, oder ein Geradenbüschel erzeugen.

Wenn in dieser Abt. z. B. über die Geraden s_1 l oder irgendwelche andere ausser der sechs erwähnten, gesprochen wird, dann sind die Geraden s_1, l ... auf allen kubischen Nullflächen dieses Nullflächenbüschels gemeint.

a) Da die Geraden s_1, s_2 die die Gerade g schneidenden Strahlen der Kongruenzen [ab], [cd] sind, bilden die Strahlen s_1 ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades, und die Strahlen s_2 ein Erzeugendensystem einer anderen. Die Durchdringungskurve dieser zwei Regelflächen ist, wie vorher gezeigt, die Gerade g und die kubische Raumkurve k^3, vobei die deren Punkten zugeordneten Nullebenen die Gerade g enthalten. Die Ebenen des Geradenpaares $s_1 s_2$ hüllen ein Ebenengewinde ein, welches sehr leicht als das Erzeugnis dreier projektiv zugeordneter Punkreihen erhalten werden kann, also ein kubisches Ebenengewinde ist.

In den Ebenen der Geradenpaare $s_1 s_2$ befinden sich die vorne mit l bezeichneten Geraden. Da die Geraden $s_1 s_2$ die Geraden u, v, nicht schneiden, müssen die Geraden l diese zwei Geraden schneiden. Also, die Geraden l sind Strahlen der Kongruenz $[uv]$ der Leitgeraden u, v und bilden in dieser Kongruenz eine stetige lineare Geradenmenge. Die den Ebenen eines die Gerade g in einem Punkt P schneidenden Strahles e der Kongruenz $[uv]$ zugeordneten Nullpunkte liegen auf einem Strahl f der Kongruenz $[uv]$, weil die in diesen Ebenen liegenden Strahlen s_1, s_2 zwei Regelflächen 2. Grades bilden, die sich in diesem Stral e, in den Geraden u ,v und in einem Strahl f der Kongruenz $[uv]$ durchdringen. Nämlich! Die zu den Schnittpunkten der Geraden e und der Geraden u, v gehörenden Geraden $s_1 s_2$ fallen zusammen, weil sie mit diesen Geraden u, v zusammenfallen. Die Geraden u, v liegen also auf beiden besprochenen Regelflächen 2. Grades.

Da die die Punkte P der Geraden g enthaltenden Strahlen s_1, s_2 sich auch in einer Ebene der Geraden e des Punktes P befinden, schneidet der jedem Punkt P auf die eben besprochene Weise zugeordnete Stahl f auch die den Punkt P enthaltende Strahlen s_1, s_2 der Kongruenzen $[ab]$, $[cd]$. Es folgt also dass $l = f$ ist.. Da das Ebenengewinde der Punktreihe P auf der Geraden g und der eineindeutig ihr zugeordneten stetigen Geradenmenge der Geraden l identisch mit dem Ebengewinde der Ebenen des Geradenpaares s_1, s_2 ist, kann die Geradenmenge der Geraden l nur ein Geradenbüschel 2. Ordnung bilden. Alle derartige Geraden l sind also Erzeugende einer Regelfläche 2. Grades in der Kongruenz $[uv]$, welche offenbar jenem System auf dieser Regelfläche angehören, in dem sich die Geraden u, v nicht befinden. Es gilt also folgender Satz:

Satz 10. *Die Geraden s_1, s_2, l der Punkten einer Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen bilden ein Erzeugendensystem je einer Regelfläche 2. Grades, von welchen sich die der Geraden s_1 in der Kongruenz $[ab]$, dann die der Geraden s_2 in der Kongruenz $[cd]$, und die der Geraden l in der Kongruenz $[uv]$ befinden.*

b) In der Ebene der Geraden s_1, a einer kubischen Nullfläche unseres Nullraumes befindet sich deren Gerade $(s_1 a) = m$, welche, wie vorher gezeigt, ein Strahl der Kongruenz $[cd]$ ist, welcher die Gerade a schneidet. Also, die auf den den Punkten der Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen sich befindenden Geraden m sind Strahlen der Kongruenz $[cd]$, die die Leitgerade a schneiden. Sie bilden also ein Erzeugendensystem einer durch die Leitgeraden a, c, d bestimmten Regelfläche 2. Grades. Ebenso bilden die Geraden n dieser kubischen Nullflächen die Erzeugenden der durch die Leitgerade b, c, d bestimmten Regelfläche 2. Grades. Das ganz Analoge gilt offenbar auch für die Geraden m_1 und n_1 dieser kubischen Flächen, da dieselben Erzeugende der durch die Leitgeraden c, a, b, resp. d, a, b, bestimmten Regelfläche 2. Grades sind. Da sich auf diesen vier Regelflächen die Geraden u, v befinden, ist klar, da die Geraden u, v, alle vier Leitgeraden a, b, c, d schneiden. Wie gezeigt, gehören die Geraden u, v, zu den Erzeugendensystemen der Geraden m, n, m_1, n_1 auf diesen Regelflächen 2. Grades. Es folgt demnach auch folgender Satz:

Satz 11. *Die Geraden m, n, m_1, n_1 der den Punkten der Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen bilden jeweils eine Regelfläche 2. Grades. Alle vier dieser Regelflächen enthalten die Geraden u, v und ein System ihrer Erzeugenden sind die Strahlen (m, n) der Kongruenz [cd], resp. der Kongruenz [ab] für die Geraden m_1, n_1.*

c) Da die Geraden a, b, c, d, u, v sich auf allen kubischen Nullflächen unseres Nullraumes befinden, liegt in jeder Ebene dieser zwei sich schneidenden Geraden noch eine Gerade auf jeder dieser Nullfläche. Durch die Namen der zwei sich schneidenden Geraden, z. B. a, u, ist auch die in dieser Ebene sich befindende dritte Gerade, wie früher, mit (au) bezeichnet. Die Geraden (au) der den Punkten der Geraden g zugeordneten Nullflächen bilden also in der Ebene der Geraden a, u eine lineare stetige Geradenmenge, die wir jetzt untersuchen wollen.

Da die Geraden s_2 und n die Geraden a, u nicht schneiden, muss die Gerade (au) von diesen Geraden geschnitten werden, weil sie in der Ebene der Geraden a, u liegt. Wie aber aus Satz 11. sichbar ist, bilden die Geraden n aller den Punkten der Geraden g zugeordneten Nullflächen ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades, in welchem System sich auch die Geraden u, v, befinden. Diese Regelfläche wird demnach durch die Ebene der Geraden a, u in noch einer Erzeugenden e des zweiten Systems geschnitten. Jede Erzeugende des ersten Systems, die die Gerade n einer kubischen Nullfläche des betrachteten Büschels ist, schneidet die Erzeugende e in einem Punkt E, welchen die betreffende Gerade (au) enthält. Wie bekannt, bilden auch die Geraden s_2 des betrachteten kubischen Nullflächenbüschels ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades, welches die Ebene der Geraden a, u in einem Kegelschnitt f^2 schneidet, da sich in dieser Ebene keine Erzeugende dieser Regelfläche befindet. Jede Erzeugende s_2 dieser Regelfläche schneidet die Ebene der Geraden a, u in einem Punkt F des Kegelschnittes f^2, welcher Punkt F auf dieselbe Weise derselben Nullfläche, so wie der Punkt E, zugeordnet ist. Er enthält also auch die Gerade (au) dieser kubischen Nullfläche. Durch das den Punkten der Geraden g zugeordnete kubische Nullflächenbüschel sind also in der Ebene der Geraden a, u eine lineare (E^n) und eine quadratische (F^n) Punktreihe gegeben, deren Verbindungsgeraden der eineindeutig zugeordneten Punkte die Geraden (au) dieses kubischen Nullflächenbüschels sind. Das Erzeugnis dieser zwei Punktreihen müsste also eine Kurve 3. Klasse sein. Wie aber bekannt, sind die Geraden n dieses kubischen Nullflächenbüschels Transversalen der Geraden b, c, d, während die Geraden s_2 dieses Nullflächenbüschels die Transversalen der Geraden g, c, d sind. Da die Geraden b, g, c, d zwei gemeinsame Transversalen haben, die offenbar auch konjugiert imaginär sein können, haben auch die eben beschriebenen zwei eineindeutig zugeordneten Punktreihen zwei zusammenfallende Punktepaare gemein. Also das Erzeugniss dieser zwei Punktreihen zerfällt in drei Strahlbüschel, von welchen eines durch die Geraden (au) der kubischen Nullflächen des betrachteten, der Geraden g zugeordneten Büschels zusammengesetzt ist.

Was für die Geraden (au) in der Ebene der Geraden a, u ausgeführt worden ist, kann ganz analog auch für die Geraden (bu), (cu), (du) und (av), (bv), (cv), (dv) in den betreffenden Ebenen ausgeführt werden. In unserem kubischen Nullraum gilt also für einen Nullächenbüschel auch das Folgende:

Satz 12. *Jede der Geraden* (au), (bu), (cu), (du), (av), (bv), (cv) *und* (dv) *auf den den Punkten einer Geraden* g *zugeordneten kubischen Nullflächen bildet ein Geradenbüschel in der Ebene seiner zwei Stammgeraden.*

d) Verbindet man einem Punkt S der Geraden g mit dem Schnittpunkt der Geraden a, u, dann liegen die den Ebenen dieser Verbindugsgeraden sugeordneten Nullpunkte auf einer Geraden $((bu)$ in der Ebene der Geraden b, u, die sich auf der dem Punkt S zugeordneten kubischen Nullfläche befindet. Das ganz Analoge gilt offenbar auch für die Geraden (au), (cu), (du), (av), (bv), (cv), (dv) dieser kubischen Nullfläche. Da dies für jeden Punkt S der Geraden g gilt, haben wir auch auf diese Weise die in dem Satz 12. besprochenen acht Geraden entdeckt.

Findet man für die vier Geraden (au), (bu), (cu), (du) der einem Punkt S der Geraden g zugeordneten kubischen Nullfläche die zweite gemeinsame Transversale r_2, die erste ist die Gerade u, dann liegt auch diese Gerade r_2 auf der erwähnten kubischen Nullfläche, da sich auf dieser Fläche vier Punkte dieser Geraden befinden. Die den Ebenen jeder Verbindungsgeraden des Punktes S mit irgendwelchem Punkt der Geraden u zugeordneten Nullpunkte liegen, wie bekannt, auf einem Kegelschnitt. Dieser stetigen linearen Verbindungsgeradenmenge ist eine stetige Kegelschnittmenge auf der dem Punkt P zugeordneten Nullfläche zugeordnet. Da aber in der Ebene eines auf einer kubischen Fläche liegenden Kegelschnittes noch eine Gerade dieser Fläche sich befinden muss, müssen die Ebenen dieser ∞^1 Kegelschnitte offenbar ein Ebenenbüschel bilden, dessen Achse samt dieser Kegelschnitte auf dieser Nullfläche liegen muss, weil diese dritter Ordnung ist. Da die vorher erwähnten vier Geraden (au), (bu), (cu), (du) zu den vier zerfallenen Kegelschnitten dieser Kegelschnittmenge gehören, kann die Achse des eben erwähnten Ebenbüschels nur die Gerade r_2 sein. Die Nullpunkte, die den Ebenen der den Punkt S enthaltenden Transversale e der Geraden u, v zugeordnet sind, liegen, wie bekannt, auf der Geraden l, die auch eine Transversale der Geraden u, v ist. Da die Transversale e zu den vorber angenommenen Verbindungsgeraden des Punktes S mit den Punkten der Geraden u gehört, folgt offenbar, dass die Gerade l die Gerade r_2 schneiden muss. In der Ebene dieser zwei Geraden liegt, wie gezeigt, noch eine dritte Gerade der betreffenden Nullfläche. Da keine der zwei Geraden l, r_2 von den Geraden a, b, c, d geschnitten wird, müssen diese Geraden die dritte Gerade in der Ebene der Geraden l, r_2 schneiden. Die dritte Gerade in dieser Ebene ist also die Gerade v. Das ganz Analoge gilt selbstverständlich auch für die Gerade r_1 in der Ebene der Geraden l, u.

Man sieht also, dass die Geraden r_2 der den Punkten der Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen eine stetige lineare Geradenmenge, also eine Regelfläche, bilden, deren jede Gerade (Erzeugende) die Gerade v schneidet. Auf dieser Regelfläche befindet sich also die einfache Gerade v, deren jede Ebene diese Regelfläche noch in einer Geraden dieser Geradenmenge schneidet. Diese Geradenmenge der Geraden r_2 ist also ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades. Die Geraden r_1 bilden in demselben kubischen Nullflächenbüschel ein analoges Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades, auf welcher sich die Gerade u befindet. Es gilt also auch folgender Satz:

Satz 13. *Die auf den Punkten einer Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen liegenden Geraden r_1 und r_2 bilden ein Erzeugendensystem je einer Regelfläche 2. Grades für jede dieser Geraden, von welchen die erste die Gerade u, und die zweite die Gerade v in ihrem zweiten Erzeugendensystem enthalten.*

e) In den Ebenen der sich schneidenden Geraden *mc, nc, md, nd* befinden sich, wie früher gezeigt, die Geraden (*mc*), (*nc*), (*md*), (*nd*) der betreffenden kubischen Nullflächen. Die Gerade (*mc*) schneidet, wie bekannt, ausser der Geraden *m, c* auch die Gerade *b*, ist also ein Strahl der Kongruenz [*bc*] der Leitgeraden *b, c*. Dies gilt offenbar für alle solchen auf den den Punkten der Geraden *g* zugeordneten kubischen Nullflächen sich befindenden Geraden (*mc*). Alle diese Geraden bilden auch eine lineare Geradenmenge, die sich in der Kongruenz [*bc*] befindet. Die Erzeugenden dieser Regelfläche sind also Strahlen dieser Kongruenz. Wir sahen vorher auch, dass die Geraden *n* auch Strahlen der Kongruenz [*bc*] sind und ein Erzeugendensystem einer Regelfläche. 2. Grades bilden. Da zur Geradenmenge der Geraden (*mc*) auch die Geraden *u, v* gehören, welche sich, wie bekannt, auch auf der Regelfläche der Geraden *n* befinden, sehen wir, dass sich die Regelfläche 2. Grades der Geraden *n* und die lineare stetige Geradenmenge der Geraden (*mc*) in den Geraden *u, v, b, c* durchdringen. Die lineare stetige Geradenmenge der Geraden (*mc*) ist also ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades, in welchen sich auch die Geraden *u, v* befinden. Die Geraden *b, c* gehören offenbar dem anderen Erzeugendensystem dieser beiden Regelflächen an. Das ganz Analoge kann auch für die Geraden (*md*), (*nc*), (*nd*) gezeigt werden. Es gilt also folgender Satz:

Satz 14. *Jede der Geraden (mc), (md), (nc), (nd) auf der den Punkten einer Geraden zugeordneten kubischen Nullfläche unseres Nullraumes bildet ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades, in welchem sich die Geraden u, v befinden, und jede dieser Regelflächen enthält eines der Gerdenpaare bc, ac, bd und ad.*

Auf diese Weise haben wir die stetigen Geradenmengen aller 27 Geraden des betrachteten kubischen Nullflächenbüschels gefunden und untersucht.

Unsere in dieser Abt. 4 ausgeführten Betrachtungen könnten offenbar auf diejenige kubische Nullflächenbüschel erweitert werden, deren

Grundraumkurve in 7 Geraden und einen Kegelschnitt, oder 9 Geraden zurfallen ist. In dieser Arbeit haben wir aber nicht die Absicht auch diese spezielle Fälle näher zu untersuchen.

5. *Ein Bündel kubischer Nullflächen*

Wie vorne ausgeführt wurde, bilden die den Punkten einer Ebene π zugeordneten kubischen Nullflächen eine stetige quadratische Nullflächenmenge, deren alle ∞^2 Flächen den Nullpunkt P der Ebene π enthalten. Jeden anderen Raumpunkt E enthalten, wie leicht zu sehen ist, ∞^1 dieser Nullflächen. Diese üuadratische stetige Nullflächenmenge werden wir als ein »*Nullflächenbündel*« bezeichnen.

Da jedem Raumpunkt E eine Nullebene ε zugeordnet ist, deren Punkten die Nullflächen eines Nullflächenbündels zugeordnet sind, sehen wir dass auch folgender Satz gültig ist:

Satz 15. *In dem kubischen Nullraum der linearen hyperbolischen Strahlkongruenzen* [ab], [cd] *ist durch einen Raumpunkt E ein Nullflächenbündel bestimmt, deren sämtliche Nullflächen diesen Punkt E enthalten, und die diesen Nullflächen zugeordneten Nullpunkte liegen in der Nullebene ε des Punktes E.*

Offenbar befindet sich auch die dem Punkt E zugeordnete Nullfläche in diesem Nullflächenbündel. Alle diese ∞^2 Nullflächen eines derartigen Bündels haben, wie bekannt, die sechs Geraden a, b, c, d, u, v gemein. Derartiger Nullflächenbündel gibt es offenbar in unserem Nullraum ∞^3 und ein jedes dieser ∞^3 Nullflächenbündel ist mit jener seiner Fläche speziell verbunden, die dem Nullpunkt E der gegebenen Ebene ε zugeordnet ist. Wir nennen diese Fläche, wie schon erwähnt, die Hauptnullfläche des gegebenen kubischen Nullflächenbündels. Da sich in der Ebene ε des gegebenen Nullflächenbündels ∞^2 Geraden befinden, kann ein derartiges Nullflächenbündel in ∞^2 der diesen Geraden zugeordneten Nullflächenbüschel zerlegt werden, in welchem jede ihrer Nullflächen, auf Grund des Satzes 15, den Nullpunkt E der Ebene ε enthält. Der Punkt E befindet sich offenbar auf allen kubischen Grundkurventeilen der diesen Geraden zugeordneten Nullflächenbüschel.

Betrachtet man in der Ebene ε das Geradenbüschel (E) des Nullpunktes E, so wird jedem Strahl dieses Büschels, resp. seinen Punkten, ein Nullflächenbüschel zugeordnet, und allen diesen Nullflächenbüscheln ist die Hauptnullfläche des Nullflächenbündels gemeisam.

Da die Ebenen aller Strahlen des Büschels (E) den Punkt E enthalten, so wird die Hauptnullfläche offenbar durch die stetige Menge der kubischen Grundkurventeile der diesen Strahlen des Büschels (E) zugeordneten Nullflächenbüschel gebildet.

6. *Die stetige quadratische Geradenmenge der gleichnamigen Geraden der Nullflächen eines Nullflächenbündels.*

Die Geraden a, b, c, d, u, v erscheinen hier als ∞^2-deutige Geraden, die sich auf allen Nullflächen eines Nullflächenbündels befinden. Die

Geraden s_1 dieser Nullflächen bilden offenbar die Kongruenz [ab], während die Geraden s_2 Strahlen der Kongruenz [cd] sind. Die Geraden l dieser Nullflächen sind, wie früher gezeigt, die Strahlen der Kongruenz [uv].

Rufen wir uns jetzt die Tatsache ins Gedächtnis zurück, dass die den Punkten einer Geraden zugeordneten Nullflächen ein Nullflächenbüschel bilden und dass die Nullflächenbüschel der Strahlen des Büchels (E) in der Ebene ε alle die dem Punkt E zugeordnete Nullfläche enthalten. Die gleichnamigen Geraden der Nullflächen dieser Büschel, ausser den Geraden a, b, c, d, u, v bilden, wie wir sahen, in jedem Büschel eine lineare stetige Geradenmenge. Die gleichnamigen Geraden auf der Nullfläche des Punktes E, also der Hauptnullfläche unseres Nullflächenbündels, gehören zu jeder dieser Geradenmenge.

a) Die Gerade $\bar{s}_1$ der Hauptnullfläche befindet sich also auf allen den Strahlen des Büschels (E) zugeordneten ∞^1 Regelflächen 2. Grades, deren ein Erzeugendensystem durch die Geraden s_1 gebildet wird. Da sich die Geraden a, b auch auf diesen Regelflächen befinden, folgt, dass alle diese Regelflächen 2. Grades in den Schnittpunkten der Geradenpaare $\bar{s}_1 a$ und $s_1 b$ durch die Ebenen dieser Geraden berührt werden. Jede einem Strahl des Büschels (E), resp. seinen Punkten, in der Ebene ε zugeordnete Regelfläche der Geraden s_1 wird in dem Punkt E durch die Ebene ε berührt, weil in diesem Punkt dieser Strahl, als Erzeugende des zweiten Systems, und die Gerade s_1 sich schneiden. Das Gleiche gilt auch für den Strahl s_2, da er eine Erzeugende der Regelfläche der die Geraden s_2 schneidenden Geraden s_1 ist. Also, alle ∞^1 der den Punkten der Ebene ε zugeordneten Regelflächen der Geraden s_1 in unserem Nullraum berühren sich in drei Punkten der Geraden $\bar{s}_1$, also in allen ihren Punkten. Es gilt demnach auch folgender Satz:

Satz 16. *Die auf den den Punkten der Strahlen des Büschels* (E) *zugeordneten kubischen Nullflächen liegenden Geraden s_1 bilden ein Regelflächenbüschel 2. Grades, desssen Flächen die Geraden a und b enthalten und längs der Geraden s_1 von der Ebene ε berührt werden.*

Sie bilden also ein spezielles Regelflächenbüschel 2. Grades. Das ganz Analoge gilt auch für die Geraden s_2, deren Regelflächen die Geraden c, d, enthalten und längs der Geraden s_2 von derselben Ebene ε berührt werden.

b) Die Geraden l aller ∞^2 Nullflächen unseres Nullflächenbündels schneiden die Geraden u, v, sind also Strahlen der linearen hyperbolischen Kongruenz [uv]. Die der Hauptnullfläche angehörende Gerade $l = \bar{l}$ liegt, wie eben erwähnt, auf allen Regelflächenbüscheln 2. Grades, die durch die Geraden l aller Nullflächen gebildet werden, welche den Punkten der Strahlen des Büschels (E) zugeordnet sind. Jedem solchen Strahl ist eine dieser Regelflächen, resp. ein ihrer Erzeugendensysteme der Geraden l zugeordnet. Alle diese Regelflächen 2. Grades enthalten offenbar die Geraden u, v, und die Gerade $\bar{l}$.

Die den Ebenen der Geraden $\bar{l}$ zugeordneten Nullpunkte liegen auf der den Punkt E enthaltenden Transversale e der Geraden u, v, da die

Gerade $\bar{l}$ diese zwei Geraden schneidet. Die den Ebenen der Geraden e zugeordneten Nullpunkte liegen, aus demselben Grund, auch auf einer Transversale l der Geraden u, v, die aber auch die Geraden $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ der Hauptnullfläche des Punktes E schneiden. Man sieht also, dass die den Schnittpunkten der Geraden $\bar{l}$ mit den Strahlen des Büschels (E) in der Ebene ε zugeordneten Nullflächen die gemeinsame Gerade $l = e$ haben. Die oben erwähnten ∞^1 Regelflächen der Geraden l enthalten also ausser den Geraden u, v, $\bar{l}$ auch die Gerade e. Man erhält auf diese Weise auch folgenden Satz:

Satz 17. *Die Geraden l der Nullflächen des Nullflächenbündels des Punktes E bilden innerhalb der Kongruenz $[uv]$ ein Regelflächenbüschel 2. Grades, dessen Grundraumkurve 4. Ordnung in vier Geraden u, v, l, e zerfält.*

c) Jede der Geraden m, n, m_1, n_1 auf den Nullflächen unseres Nullflächenbündels bildet, wie früher gezeigt wurde, ein Erzeugendensystem, so dass jede solche Erzeugende eines dieser Systeme denselben Namen auf allen Flächen des Systems hat. Z. B. die allen ∞^2 Punkten einer Ebene α der Geraden a zugeordneten Nullflächen, haben eine gemeinsame Gerade m. Zu jeder Ebene α der Geraden a gehört auf dise Weise eine Erzeugende m der erwähnten Regelfläche. Die den Punkten der Schnittgeraden der Ebenen α, ε zugeordneten Nullflächen haben offenbar auch die Gerade m gemeinsam. Dasselbe ist auch bei den Geraden m, n, m_1, n_1 leicht ersischtlich. Man bekommt also auch fogenden Satz:

Satz 18. *Jede der auf den Nullflächen des Nullflächenbündels des Punktes E sich befindenden Geraden m, n, m_1, n_1 bildet ein Erzeugendenlystem einer Regelfläche 2. Grades. Diese vier Regelflächen enthalten in demselben Erzeugendensystem die Geraden u, v, während die Regelflächen der Geraden m, n in ihrem anderen Erzeugendensystem die Geraden a, c, d, resp. b, c, d enthalten. Die Regelfläche der Geraden m_1, n_1 gehören in ihrem zweiten Erzeugendensystem, ganz analog, die Geraden c, a, b resp. d, a, b an.*

d) Auf Grund des Satzes 14 ist leicht zu ersehen, dass die Geraden (mc) aller Nullflächen unseres Nullflächenbündels Strahlen der Kongruenz $[bc]$ der Leitgeraden b, c sind.

Die auf den den Punkten jedes Strahles des Büschels (E) zugeordneten Nullflächen liegenden Geraden (mc) bilden, nach Satz 14, ein Erzeugendensystem einer Regelfläche. 2. Grades, in welchem sich auch die Geraden u, v befinden. Auf Grund dessen folgt, dass die den Nullflächen unseres Nullraumes angehörenden Geraden (mc) ein Regelflächenbüschel 2. Grades bilden, dessen Grundraumkurve 4. Ordnung in vier Geraden u, v, b, c zerfallen muss. Das ganz Analoge gilt offenbar auch für die Geraden (nc), (md) und (nd). Es gilt also auch folgendes:

Satz 19. *Jede der Geraden (mc), (nc), (dm), (nd)) auf den Nullflächen des Nullflächenbündels des Punktes E, erzeugt ein Regelflächenbüschel, dessen Grundraumkurve im Falle der Geraden (mc) in die Ge-*

raden u, v, b, c zerfällt. In den Fällen der Geraden (nc), (md), (nd) zerfällt diese Grundraumkurve in die Geraden uvac, uvbd und uvad.

e) Nach Satz 12 bilden jede der Geraden (au), (bu), (cu), (du), (av), (bv), (cv), (dv), die sich auf den den Punkten einer Geraden zugeordneten Nullflächen befindet, ein Strahlbüschel in der Ebene seiner zwei Geraden. Da die Gerade (au) der Hauptnullfläche des Punktes E zu allen derartigen Strahlenbüscheln gehört, die die Geraden (au) der Nullflächen eines jeden Strahles des Büschels (E) bilden, folgt, dass die Scheitel aller dieser Büschel der Geraden (au), die auf die beschriebene Weise den Büscheln (E) zugeordnet sind, auf der Geraden (au) der Hauptnullfläche unseres Nullflächenbündels liegen.

Offenbar gilt für die Geraden (bu), (cu), (du), (av), (bv), (cv) und (dv) das Analoge. Man bekommt also auch das Folgende:

Satz 20. *Die auf den Nullflächen des Nullflächenbündels des Punktes E liegenden Geraden* (au), (bu), (cu), (du), (av), (bv), (cv) *und* (dv) *bilden in jeder der Ebenen der Geraden au, bu, cu, u. s. w., Strahlenbüschel, deren Scheitel auf dem in dieser Ebene liegendem gleichnamigen Strahl der Hauptnullfläche dieses Bündels liegen.*

f) Nach Satz 13 schneiden die Geraden r_1, die auf den den Punkten einer Geraden zugeordneten Nullflächen liegen, die Gerade v und bilden ein Erzeugendensystem einer Regelfläche. 2. Grades. Die den Strahlen des Büschels (E) auf diese Weise zugeordneten Regelflächen enthalten alle die Gerade v und diejenige Gerade $\bar{r}_1$, die sich auf der Hauptnullfläche unseres Nullflächenbüdels befindet. Alle diese Regelflächen berühren sich offenbar im Schnittpunkt dieser zwei Geraden.

Jede einer Nullfläche zugeordnete auf ihr liegende Gerade r_1 schneidet die auf dieser Nullfläche liegenden Geraden (au), (bu), (cu), (du). Also ist diese Gerade r_1 die zweite gemeinsame Transversale dieser vier Geraden, während die erste Transversale die Gerade u ist. Auf Grund dessen und des bisher festgestellten kann auch folgender Satz ausgesprochen werden:

Satz 21. *Die auf den den Punkten einer Ebene* ε *zugeordneten Nullflächen sich befindenden Geraden* r_1 *bilden eine Kongruenz innerhalb des singulären linearen Komplexes der Leitgeraden v, welche Kongruenz sich in eine lineare stetige Regelflächenmenge 2. Grades zerlegen lässt, deren sämtliche Flächen zwei gemeinsame sich schneidende Geraden haben. Für die Gerade* r_2 *der Nullflächen dieses Nullflächenbündels gilt dasselbe, wenn anstatt der Geraden v die Gerade u genommen wird.*

7. *Die stetigen Reihen der Schnittpunkte der Geraden, welche auf den Punkten einer Geraden zugeordneten Nullflächen liegen.*

Wie bekannt schneiden sich die 27 Geraden einer Flähe 3. Ordnung untereinander in 135 Schnittpunkten. Betrachtet man die lineare stetige Menge der den Punkten einer Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen in unserem Nullraum, so erzeugt jeder dieser Schnittpunkte auf dieser linearen Nullflächenmenge eine lineare stetige Punktmenge, also oder eine Raumkurve, oder eine ebene Kurve, oder in speziellen Fällen eine Gerade. Jede Gerade einer deratigen Fläche wird, wie bekannt, von zehn anderen ihrer Geraden geschnitten.

a) Wie wir sahen, befinden sich die Geraden a, b, c, d, u, v auf allen ∞^3 Nullflächen unseres kubischen Nullraumes. Also sie befinden sich auch auf denjenigen ∞^1, die den Punkten der Geraden g zugeordnet sind. Ausserdem schneiden die Geraden a, b, c, d die Geraden u, v in acht Schnittpunkten, die sich auf allen ∞^3 Flächen unseres Nullraumes befinden. Diese acht Schnittpunkte bilden also keine stetige Punktreihe, sondern je einen Punkt auf der besprochenen linearen stetigen Nullflächenmenge. Die weiteren acht Schnittpunkte auf jeder der Geraden a, b, c, d und sechs auf jeder der Geraden u, v, liegen, selbstverständlich, auf diesen Geraden und bilden, offebar, die stetige Punktmengen dieser sechs Geraden. Von den 135 erwähnten linearen stetigen Schnittpunktmengen haben wir also $8 + 4.8 + 2.6 = 52$ gefunden, die auf den Geraden a, b, c, d, u, v liegen.

Ausser von den Geraden u, v wird die Gerade a auch von den Geraden s_1, (au), (av), m, m_1, n_1, (nc) *und* (nd) geschnitten. Ebenso wird die Gerade b von den Geraden u, v, s_1, (bu), (bv), n, m_1, n_1, (mc) und (md), die Gerade c von den Geraden u, v, s_2, (cu), (cv), m, n, m_1, (mc) und (nc) und die Gerade d von den Geraden u, v, s_2, (du), (dv), m, n, n_1, (md) und (nd), geschnitten. Die Gerade u wird ausser von den Geraden a, b, c auch von den Geraden (au), (bu), (cu), (du), l und r_1 geschnitten, während die Gerade v, ausser der Geraden a, b, c, d, auch die Geraden (av), (bv), (cv), (dv), l und r_2 schneidet. Auf diese Weise sieht man, durch welche Geraden die 52 Schnittpunktmengen auf den Geraden a, b, c, d, u und v entstanden sind. Bei allen diesen Geraden, ausser den Geraden a, b, c, d, u und v sind unter ihrem Namen die Geradenmengen auf den den Punkten der Geraden g zugeordneten kubischen Nulllächen gemeint.

Die Schnittpunkte der Geraden s_1, s_2 aller den Punkten der Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen liegen auf der Geraden g. Also ist diese Gerade die 53-ste Schnittpunktmenge innerhalb der erwähnten 135 die wir untersuchen. Es kann also auch folgender Satz ausgeprochen werden.

Satz 22. *Die Schnittpunkte der auf den einer Geraden g zugeordneten Nullflächen liegenden Geraden bilden 135 lineare Punktmengen. 53 davon liegen auf sieben Geraden, von welchen nur eine nicht auf allen diesen Nullflächen liegt.*

b) Ausser den Geraden a, b, s_2 schneiden die Gerade s_1 auch die Geraden m, n, (cu), (du), (cv), (dv) und l. Die Geraden s_1, m, n, l der den Punkten der Geraden g zugeordneten Nullflächen bilden, wie wir eben sahen, je eine Regelfläche 2. Grades, und die Geraden (cu), (du), (cv) und (dv) dieser Flächen liegen in den Ebenen cu, du, cv, dv. Die Schnittpunktmengen der Geraden s_1 auf den betrachteten ∞^1 kubischen Nullflächen mit den in den Ebenen der Geraden cu, du, cv, dv liegenden Geraden (cu), (du), (cv), (dv) auf diesen Flächen bilden offenbar die Schnittkurven dieser Ebenen mit der Regelfläche der Geraden s_1, also einen Kegelschnitt.

Wie gezeigt, bilden die Geraden m, n, l, s_1 je eine Regelfläche 2. Grades. Die Durchdringungskurven der Regelflächen der Geraden m, n, l mit der Regelfläche der Geraden s_1 sind nichtzerfallene Raumkurven 4. Ordnung, die durch die Schnittpunkte der Geraden m, n, l mit der Geraden s_1 gebildet sind. Das ganz Analoge gilt offenbar auch für die Schnittpunkte der Geraden s_2 mit den Geraden m_1, n_1 l, (au), (bu), (av), (bv). Auf Grund dieser Betrachtungen haben wir also weitere 14 untersuschte Schnittpunktmengen gefunden. Es bleiben uns noch 135 — 53 — 14 = 68 zu untersuchen.

c) Die Gerade l schneidet ausser den Gerden s_1, s_2, u, v, deren Schnittunkte bereits betrachtet wurden, auch die Geraden r_1, r_2, (mc), (md), (nc), (nd). Die Geraden l der erwähnten kubischen Nullflächen, die den Punkten der Geraden g zugeordnet sind, bilden, wie bekannt, auch eine Regelfläche 2. Grades, welche die Geraden u, v in ihrem anderem Erzeugendensystem enthält. Die Geraden r_1 dieser Nullflächen bilden auch eine Regelfläche 2. Grades, die aber nur die Gerade v enthält. Die gesuchte Schnittpunkmenge der Geraden l und r_1 liegt also auf einer Raumkurve 3. Ordnung. Das ganz Analoge gilt offenbar auch für die Schnittpunktmenge der Geraden l, r_2, auf dem betrachteten Nullflächenbüschel. Es sind also auf diese Weise noch zwei weitere gesuchte Schnittpunktmengen gefunden.

Es wurde vorhin auch für die Geraden (mc), (nc), (md), (nd) ausgeführt (Satz 14), dass diese Geraden auf den den Punkten der Geraden g zugeordneten Nullflächen in unserem kubischen Nullraum je eine Regelfläche 2. Grades bilden. Alle diese Regelflächen enthalten die Geraden u, v im demselben Erzeugendensystem. Die Geraden l auf diesen kubischen Nullflächen bilden auch eine Regelfläche 2. Grades, die die Geraden u, v ebenfalls enthält, aber in dem anderen Erzeugendensystem. Die Regelflche der Geraden l durchdringt also jede dieser vier Regelflächen in zwei Geraden und einem Kegelschnitt, welcher die gesuchte Schnittpunktmenge trägt. Da auf diese Weise hier weitere vier Schnittpunktmengen gefungen sind, sind also nur noch 68 — 2 — 4 = 62 zu finden und zu untersuchen.

d) Die Geraden $r_1 (= lu)$ schneidet ausser den Geraden l, u auch die Geraden m, n, m_1, n_1, (av), (bv), (cv), (dv). Die Geraden m, n, m_1, n_1 und die Gerade r_1 der den Punkten der Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen, bilden, wie wir eben sahen, je eine Regelfläche 2. Grades. Da die Regelflächen der Geraden m, n, m, n_1, dem Satz 11 nach, die Geraden u, v enthalten, und auf der Regelfläche der Geraden r_1 sich die Gerade v befindet, durchdringt diese Regelfläche der Geraden r_1 jede der vier erwähnten Regelflächen der Geraden m, n, m_1, n_1 in der Geraden v und einer kubischen Raumkurve, auf welcher die hier gesuchte Schnittpunktmenge liegt. Das ganz Analoge gilt offenbar auch für die Schnittpunktmengen dieser vier Geradenmengen mit der Menge der Geraden r_2.

Da die Schnittpunktmenge der Geraden r_1 mit den Geraden (av) in der Ebene der Geraden a, v liegen, bilden sie den Schnittkegelschnitt dieser Ebene mit der Regelfläche der Geraden r_1. Dasselbe geschieht offenbar auch in den Ebenen der Geraden bv ,cv und dv.

Betrachtet man weiterhin in gleichem Sinn und auf dieselbe Weise auch die Geraden r_2, m, n, m_1, n_1, dann (av), (bv), (cv), (dv), so bekommt man weitere der beschriebenen Schnittpunktmengen. Man sieht also, dass die Schnittpunktmengen der Geraden r_1, r_2 mit den Geradenmengen m, n, m_1, n_1 acht Raumkurven 3. Ordnung bilden, während die Schnittpunktmengen dieser zwei Geradenmengen mit den Geradenmengen (av), (bv), (cv), (dv) und (au), (bu), (cu), (du) auf je einem Kegelschnitt in den Ebenen der betrachteten acht Geradenpaare liegen. Da wir auf diese Weise 16 weitere gesuchte Schnittpunktmengen gefunden haben, bleiben uns also nur nich $62 - 16 = 46$ zu finden.

e) Ausser den bisher betrachteten Schnittpunkte auf der Geraden m, schneidet diese Gerade auch die Geraden (bu), (bv), (mc), (md). Jede der zwei letzteren Geradenmengen, auf den den Punkten der Geraden g zugeordneten Nullflächen, bildet, wie vorher ausgeführt wurde, eine Regelfläche 2. Grades. In den Ebenen der Geraden paare bu und bv besteht diese Geradenmenge aus einem Strahlbüschel 1. Grades. Wie schon vorher gesehen worden ist, bilden die Geraden m eine Regelfläche 2. Grades, welche die Geraden u, v und c enthält, welche Gerade offenbar auch die Regelfläche der Geraden (mc) enthalten muss. Das ganz Analoge kann auch für die Geraden (md), (nc), (nd) ausgeführt werden. Weil aber die Ebenen der Geraden b, u und b, v die Gerade u, resp. die Gerade v enthalten, gilt auch das Folgende: Die Schnittpunktmengen der Geradenmenge m mit den Geraden (bu), (bv) liegen auf je einer Geraden, und die zwei Schnittpunktmengen der Geradenmengen (mc), (md) mit der Geradenmenge m liegen auch auf je einer anderen Geraden.

Da die Gerade n, ausser den betrachteten Schnittpunkten, auch die Geraden (au), (av), (nc), (nd) schneidet, für welche dasselbe wie vorher gilt, kann auch hier das ganz Analoge ausgeführt werden. Das ganz Analoge kann auch für die Schnittpunktmengen der Geraden m_1 und n_1 gefunden werden. Wir haben hier also weitere 16 gesuchte Schnittpunktmengen gefunden. Zu untersuchen bleiben uns demnach noch $46 - 16 =$ $= 30$ derartige Schnittpunktmengen.

f) Ausser den fünf bisher betrachteten Schnittpunktmengen auf den Geraden (au), schneidet jede Gerade (au) auch die Geraden (bv), (cv), (dv), (mc) und (md) auf jeder Nullfläche unseres Nullraumes. Da die Geradenmengen (au), (bu), (cu), u. s. w. in je einer Ebene liegen, liegen die Schnittpunktmengen der Geraden (au) mit den Geradenmengen (bv), (cv), (dv) auf den Schnittgeraden der Ebene der Geraden a, u, mit den Ebenen der Geradenpaare bv, cv, dv.

Dasselbe gilt offenbar auch für die Schnittpunktmengen der Geradenmenge (bu) mit den Geradenmengen (av), (cv), (dv), dann der Geradenmenge (cu) mit den Geradenmengen (av), (bv), (dv), und der Geradenmenge (du) mit den Geradenmengen (av), (bv), (cv). Diese 12 gesuchte Schnittpunktmengen verringern die Zahl derjenigen, die zu untersuchen sind, auf $30 - 12 = 18$.

Da die Geradenmengen (mc), (md) innerhalb unserer Betrachtungen je eine Regelfläche 2. Grades bilden, auf welcher die Geraden u, v liegen, liegen die Schnittpunktmengen der Geradenmenge (au), mit den Geradenmengen (mc), (md) auf einer Geraden in der Ebene der Geraden (au). Auf dieselbe Weise können wir die zwei gleichwertigen betreffenden Geraden in den Ebenen der Geradenmengen (bu), (cu), (du), (av), (bv), (cv) und (dv) bestimmen. Da wir auf diese Weise weitere 16 gesuchte Schnittpunktmengen bestimmt haben, sind endlich nur noch die letzten zwei $(18 - 16 = 2)$ zu finden.

g) Auf Grund der in der vorne erwähnten Arbeit ausgeführten Schlüsse folgt, dass sich auch die Geradenpaare (mc), (nd) und (nc), (md) auf jeder Fläche unseres kubischen Nullraumes schneiden. Da jede dieser vier Geradenmengen in unseren bisherigen Ausführungen je eine Regelfläche 2. Grades bildeten, und die Regelflächen der zwei Strahlenmengenpaare (mc) (nd) und (nc) (md) die Geraden u, v gemein haben, liegen die zwei Schnittpunktmengen der Geraden (mc) (nd) und (nc) (md) auf je einer Kurve 2. Grades.

Man könnte hier die Frage stellen, wo befinden sich die Geraden $(m_1 a)$, $(n_1 a)$, $(m_1 b)$, $(n_1 b)$ der betrachteten kubischen Nullflächen, da sich die Geradenpaare $m_1 a$, $n_1 a$, $m_1 b$, $n_1 b$ auch untereinander schneiden. In der vorne angeführten Arbeit ist aber das Folgende bewiesen worden: $(n_1 a) = (nc)$, $(m_1 a) = (nd)$, $(n_1 b) = (mc)$ und $(m_1 b) = (md)$. Also in unsere Betrachtungen sind bisher alle 27 Gerden der kubischen Nullfläche unseres Nullraumes einbezogen worden. Auf diese Weise sind alle 135 eindimensionalen stetigen Schnittpunktmengen der gleichnamigen Geradenpaare auf den den Punkten einer Geraden g der in unserem kubischen Nullraum zugeordneten Nullflächen gefunden, und die Ordnungen und die Arten ihrer Kurven bestimmt.

3. *Die stetige quadratische Schnittpunktmenge der auf den den Punkten einer Ebene ε zugeordneten kubischen Nullflächen unseres Nullraumes sich befindenden Geraden.*

Da sich die Geraden a, b, c, d, u und v auf allen kubischen Nullflächen unseres Nullraumes befinden, liegen offenbar die Schnittpunkte dieser Geraden mit den betreffenden, diese Gerade schneidenden Geraden auf allen ∞^3 dieser Nullflächen. Sie liegen also auch auf denjenigen, die den Punkten einer Ebene zugeordnet sind. Der Nullpunkt der Ebene ε sei wieder mit E bezeichnet.

Auf Grund der in Abt. 4 durchgeführten Betrachtungen sind also 52 unserer quadratischen stetigen Schnittpunktmengen ausser Betracht zu lassen, da jede dieser Geraden eine ∞^2-deutige Schnittpunkmenge in unserem betrachtete Fall ist.

a) Da sich in jedem Punkt der Ebene ε die Geraden s_1, s_2 der diesem Punkt zugeordneten kubischen Nullfläche schneiden, ist diese Ebene ε die 53-ste quadratische Schnittpunktmenge der sich schneidenden Geraden auf den eben erwähnten kubischen Nullflächen, die zu dem gegeben Nullflächenbündel des Punktes E gehören.

Alle Geraden s_1, sind, der Definition unseres Nullraumes gemäss, Strahlen der Kongruenz $[ab]$, während die Geraden s_2 Strahlen der Kongruenz $[cd]$ sind. Die auf den den Punkten der Ebene ε zugeordneten kubischen Nullflächen sich befindenden Geraden l bilden, wie wir vorher sahen, die Kongruenz $[uv]$ der Leitgeraden u, v. Die Geraden (au) aller ∞^3 kubischen Nullflächen unseres Nullraumes liegen in der Ebene der Geraden a, u. Ausser der Geraden a, u wird die Gerade (au) noch durch die Geraden s_2, n, (bv), (cv), (dv), r_1, (mc) und (md) geschnitten. In der Ebene der der Geraden a, u liegen also acht quadratische Schnittpunktmengen der sich schneidenden Geraden auf den den Punkten der Ebene ε in unserem Nullraum zugeordneten kubischen Nullflächen. Da ganz analog dasselbe auch für die Geraden (bu), (cu), (du), (av), (bv), (cv), (dv) gilt ist offensichlich, mit Rücksicht auf die Tatsache, dass die Schnittpunkte der Geraden (au) mit den Geraden (bv), (cv), (dv), dann der Geraden (bu) mit den Geraden (av), (cv), (dv), wie auch der Geraden (cu) mit den Geraden (av), (bv), (dv) und der Geraden (du) mit den Geraden (av), (bv), (cv),zweimal, also ihrer 12, gezählt werden müssen. Und so haben wir auf diese Weise weitere $64 - 12 = 52$ gesuchten quadratischen Schnittpunktmengen gefunden. Also von den 135 bleiben uns noch $135 - 53 - 52 = 30$ zu finden.

b) Wie man in der Abt. 4 sehen kann, bilden die Geraden m aller den Punkten der Ebene ε zugeordneten kubischen Nullflächen eine Regelfläche 2. Grades, welche die Geraden c, d, u und v enthält. Wir haben vorher auch gesehen, dass eine Gerade m auf unseren kubischen Nullflächen liegt, die den Punkten einer Ebene der Geraden a zugeordnet sind. In unserem quadratischen Fall der Ebene ε liegt also jede der Geraden m auf denjenigen kubischen Nullflächen, welche den Punkten einer Geraden der Ebene ε zugeordnet sind, und welche Gerade den Schnittpunkt der Geraden a mit dieser Ebene ε enthält. Ausser den bisher betrachteten Schnittpunkten der Geraden m bleiben uns noch diejenigen mit den Geraden s_1, r_1, r_2 (mc) und (md) zu untersuchen. Da die Geraden m eine Regelfläche 2. Grades bilden, liegen offenbar auch ihre Schnittpunkte mit den fünf erwähnten Geraden auf dieser Regelfläche. Auf der Regelfläche 2. Grades der Geraden m befinden sich also weitere fünf der gesuchten quadratischen Schnittpunktmengen. Was für die Gerade m gilt, gilt offenbar ganz analog auch für die Geradenmengen der Geraden n, m_1 n_1. Man hat also auf diese Weise weitere $4.5 = 20$ der vorhandenen quagratischen Schnittpunktmengen bestimmt. Es bleiben uns demnach noch weitere zehn zu finden $(135 - 53 - 52 - 20 = 10)$.

c) Man weis, dass alle Geraden l Strahlen der linearen hyperbolischen Kongruenz $[uv]$ der Leitgeraden u, v sind. Die Geraden s_1, s_2 sind wie bekannt, Strahlen der gegebenen hyperbolischen linearen Kongruenzen $[ab]$, resp. $[cd]$.

Mann betrachte jetzt in der Ebene ε eine Gerade g, die den Nullpunkt E dieser Ebene enthält. Die auf den den Punkten der dieser Geraden zugeordneten kubischen Nullflächen liegenden Geraden l bilden, wie man es im Satz 10 sehen kann, eine Regelfläche 2. Grades, die sich in der Kongruenz $[uv]$ befindet. Jeder Geraden g des Punktes E in der Ebene ε ist eine solche Regelfläche 2. Grades zugeordnet, aber alle diese ∞^1 Regelflächen 2. Grades haben nicht nur die Geraden u, v gemein, sondern auch die dem Punkt E zugeordnete Gerade l, die auf der diesem Punkt zugeordneten kubischen Nullfläche (der Hauptnullfläche) liegt. Nach Satz 17 in der Abt. 6, b) enthalten alle diese Regelflächen auch den den Punkt E enthaltenden Strahl e der Kongruenz $[uv]$.

Alle diese Regelflächen bilden also ein Regelflächenbüschel 2. Grades, dessen Grundraumkurve 4. Ordnung in die Geraden u, v, l und e zerfällt. Schon vorher sahen wir auch, dass die auf diesen den Punkten jeder Geraden g zugeordneten kubischen Nullflächen liegenden Geraden s_1 eine Regelfläche 2. Grades bilden (Satz 10), die die Geraden a, b und die Gerade s_1 der dem Punkt E zugeordneten kubischen Nullfläche enthalten. Alle diese Regelflächen 2. Gradec bilden also nach Satz 16 auch ein Regelflächenbüschel 2. Grades. Durch die Strahlen des Geradenbüschels (E) in der Ebene ε ist jeder Regelfläche der Geraden s_1 auf die eben beschriebene Weise eine Regelfläche der Geraden l in diesem Büschel zugeordnet. Das Erzeugnis dieser zwei Flächenbüschel 2. Grades ist, wie bekannt, eine Fläche 4. Ordnung, welche die Schnittpunkte der auf den kubischen Nullflächen der Punkte der Ebene ε liegenden Geraden s_1, l bilden.

Das ganz Analoge gilt offenbar auch für die quadratische Schnittpunktmenge der ∞^2 Geradenpaare l, s_2.

Die Gerade l jeder kubischen Nullfläche unseres Nullraumes schneidet auch die Geraden (mc), (nc), (md), (nd). Die in useren dem Punkt E zugeordneten Nullflächenbündel sich befindenden Geraden (mc) bilden, nach Satz 19, ein Regelflächenbüschel 2. Grades, dessen Grundraumkurve in die Geraden u, v, b, c zerfällt. Die Geraden l der Flächen in diesem Nullflächenbündel bilden, wie wir eben sahen, auch ein Regelflächenbüschel 2. Grades, dessen Grundkurve in die Geraden u, v, l, e zerfällt. Wir haben also zwei eineindeutig zugeordnete Regelflächenbüschel, deren Erzeugnis eine Fläche 4. Ordnung ist, welche die Schnittpunktmenge der Schnittpunkte der auf den Flächen unseres Nullflächenbündels liegenden Geraden l und (mc) enthält.

Das ganz Analoge gilt offenbar auch für die analogen Schnittpunkmengen der Geraden l mit den Geraden (nc), mit der Geraden (md) und mit den Geraden (nd). Die nähere Untersuchung dieser Flächen 4. Ordnung, für die offenbar die Geraden u, v Doppelgeraden sind, haben wir hier nicht die Absicht durchzuführen.

Man hat also hier weitere sechs der beschriebenen quadratischen Schnittpunktmengen gefunden. Es bleiben uns noch vier dieser Schnittpunktmengen zu finden.

d) In unseren bisherigen Betrachtungen blieben nur di Schnittpunktmengen der Geraden l mit den Geraden r_1, der Geraden l mit den Geraden r_2, der Geraden (mc) mit den Geraden (nd) und der Geraden (nc) mit den Geraden (md), aus. Die in unseren Nullflächenbündel sich befindenden Geraden (mc), (nc), (md), (nd) bilden jede eine Regelfläche 2. Grades. Durch die Strahlen des Strahlenbüschelc (E) in der Ebene ε werden, wie wir vorher sahen (Satz 14), diese vier Geraden auf ∞^1 Regelflächen verteilt liegen, die ein Regelflächenbüschel 2. Grades für jede dieser Geraden bilden. Die Grundramkurve 4. Ordnung dieser vier Büschel zerfällt, wie man es im Satz 14 sehen kann, in die Geraden *uvbc, uvac, uvbd* und *uvad.* Die quadratische Schnittpunktmenge der Geraden (mc) und (nd) bekommt man hier als das Erzeugnis zweier eineindeutig zugeordneten Regelflächenbüschel 2. Grades .Diese Schnittpunktmenge liegt also auf einer Fläche 4. Ordnung, auf welcher die Geraden u, v ihre Doppelgeraden sind.

Das ganz Analoge gilt offenbar auch für die quadratische Schnittpunktmenge der ∞^2 Geradenpaare (nc) und (md) in unserem Nullflähenbündel der Nullebene ε des Punktes E. Es bleiben uns noch die quadratischen Schnittpunktmengen der ∞^2 Geraden l mit den ∞^2 Geraden r_2, und der ∞^2 Geraden l mit den ∞^2 Geraden r_1 zu finden. Die auf den Nullflächen unseres Nullflächenbündels sich befindende Geraden l bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem auf den Regelflächen eines Regelflächenbüschels 2. Grades, dessen Grundraumkurve aus den Geraden u, v, l, e besteht. Die Geraden r_1 der Nullflächen dieses Nullflächenbündels bilden, dem Satz 21 nach, eine lineare stetige Regelflächenmenge von Regelflächen 2. Grades, welche zwei gemeinsame Geraden haben, die sich schneiden, also auch eine gemeinsame Berührungsebene in dem Schnittpunkt dieser Geraden. Diese zwei Geraden sind die Gerade v und diejenige Gerade r^1 die sich auf der Hauptnullfläche unseres Nullflächenbündels befindet. Die Flächen des Regelflächenbüschels der Geraden l durchdringen die ihnen eineindeutig zugeordneten im Regelflächenbüschel der Geraden r_1, in der Geraden v und einer Raumkurve 3. Ordnung. Alle diese kubischen Raumkurven bilden also die die Schnittpunktmenge der Geraden l, r_1 enthaltenden Fläche. Da jede Regelfläche der Geraden l, und jede Regelfläche der Geraden r_1, die beide selbstverständlich 2. Grades sind, diese erzeugte Fläche in der Geraden v und einer Raumkurve 3. Ordnung durchdringt, kann diese Fläche nur 4. Ordnung sein, für welche die Gerade v eine Doppelgerade ist.

Das ganz Analoge kann offenbar auch für die Schnittpunktmenge der Geraden l mit den Geraden r_2 ausgeführt werden.

Wir haben also in unseren Betrachtungen in der Abt. 8 alle 135 quadratische Schnittpunktmengen auf den Flächen eines Nullflächenbündels gefunden.

9. *Nachwort.* Wie es schon in der Einleitung angeführt worden ist, wurden in dieser Arbeit nur diejenigen kubischen Nullräume betrachtet, die durch zwei lineare hyperbolische Strahlkongruenzen mit zwei reellen gemeinsamen Strahlen bestimmt sind. Durch beliebige Auswahl zweier linearen Kongruenzen innerhalb der bekannten hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Kongruenzen mit reellen oder konjugiert imaginären gemeinsamen Strahlen, wo sich die Leitgeraden auch schneiden können, können kubische Nullräume gegeben werden, in welchen die kubischen Nullflächen von jeder bekannten Art kubischer Flächen sein können, ohne oder mit Doppelpunkten, aber ohne die zweiteiligen.

Es wäre interessant, auf dieselbe Weise wie in dieser Arbeit, alle diese kubischen Nullraumarten zu entersuchen, besonders die, deren Nullraumflächen drei reelle Geraden, oder vier reelle Doppelpunkte, haben u. s. w. Es ist zu hoffen dass über diese Nullräume in weiteren Arbeiten analoge oder neue Betrahtungen angestellt werden, in welchen die imaginären Elemente offenbar eine besondere Rolle spielen müssten.

Institut für Mathematik
der Universität in Zagreb

Angenommen zur Veröffentlichung am 3. 6. 1976. in der Abteilung für mathematische, physikaliche und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

Vilim Niče:

KUBIČNI NIŠTIČNI PROSTORI DVIJU LINEARNIH KONGRUENCIJA

U radu »Prilog načinima izvođenja ploha 3. reda«, RAD knj. 292 (1952), str. 171—191, JAZU u Zagrebu, pokazan je novi pojednostavnjeni način Grassmmanova izvođenja općih ploha 3. reda. Namjesto tri kolinearna svežnja ravnina, zadane su tu dvije linearne kongruencije i svežanj (S) ravnina. U svakoj ravnini π svežnja (S) nalazi se po jedna zraka svake od tih kongruencija, koje se sijeku u točki P, koja je pridružena toj ravnini. Svih ∞^2 takvih točaka, pridruženih ravninama svežnja (S), čine opću plohu 3. reda.

Svakoj točki prostora pridružena je na ovaj način jedna njena ravnina i svakoj ravnini prostora jedna njena točka. Na taj je način definiran jedan kubični ništični prostor, koji je istražen u ovom radu.

Zadamo li u prostoru dva para mimosmjernih pravaca a, b i c, d, te ih uzmemo kao ravnalice linearnih hiperboličkih kongruencija [ab] i [cd], a ta četiri pravca imaju dvije realne transverzale u, v, tada će svakoj točki prostora na opisani način pridružene točke činiti opću plohu 3. reda s 27 realnih pravaca. Svakoj točki P prostora pridružena je ništična ravnina π i obrnuto, a svakoj točki prostora pridružena je i jedna ništična ploha takvog ništičnog prostora, na kojoj se i ta točka nalazi. Pravci a, b, c, d, u, v nalaze se na svih ∞^3 kubičnih ništičnih ploha takvog ništičnog prostora.

Pomoću činjenice da se u ravnini dvaju pravaca neke opće plohe 3. reda, koji se naravski sijeku, nalazi uvijek i treći pravac te plohe, kao i činjenice da je svaki pravac opće plohe 3. reda sječen s 10 ostalih njenih pravaca, lako je naći preostali 21 pravac na svakoj kubnoj plohi našeg ništičnog prostora, što je u sprijeda spomenutom radu i učinjeno.

Na nekom pravcu g prostora nalazi se neprekinuti linearni skup realnih točaka, kojima je u našem kubičnom ništičnom prostoru pridružen neprekinut linearni skup kubičnih ništičnih ploha. Sve te plohe čine *pramen ništičnih ploha 3. reda,* kojemu se temeljna krivulja 9. reda raspada u pravce a, b, c, d, u, v, jer se oni nalaze na svim ništičnim plohama našeg kubičnog ništičnog prostora, te na jednu prostornu krivulju 3. reda. Ova se prostorna temeljna krivulja 9. reda, za neke pravce g u osobitom položaju, može raspasti u 7 pravaca i u jednu koniku, kao i u 9 pravaca u prostoru, od kojih svaki mora sjeći četiri od preostalih. Istoimeni pravci na tih ∞^1 kubičnih ploha čine neprekinuti linearni skup pravaca, dakle ili pramen pravaca, ili sistem izvodnica neke pravčaste plohe 2. stupnja. Sve te pravčaste tvorevine nalaze se u osobitom odnosu prema pravcima a, b, c, d, u, v.

Točkama P, kao neprekinutom kvadratnom skupu točaka u nekoj ravnini ε, koja je ništična ravnina njene točke E, pridružene ništične plohe u našem kubnom ništičnom prostoru čine neprekinuti kvadratni skup ništičnih ploha, koji smo nazvali *svežnjem ništičnih ploha* tog ništičnog prostora. Točki E pridružena ništična ploha zove se *glavna ništična ploha* takvog svežnja. Svi istoimeni pravci ništičnih ploha takvog svežnja, osim pravaca a, b, c, d, u, v, čine neprekinuti kvadratni skup pravaca, a taj je skup ili kongruencija ili polje pravaca u nekoj ravnini. Osobine i povezanost tih pravčastih tvorevina međusobno kao i s pravcima a, b, c, d, u, v istraženi su u ovom radu.

27 pravaca neke opće plohe 3. reda sijeku se, kao što je poznato, u 135 sjecišta. U svakom pramenu kubičnih ploha našeg ništičnog prostora čini svako ovo sjecište linearni neprekinuti skup točaka, koji se nalazi ili na pravcu, ili na konici, ili na prostornoj krivulji 3. ili 4. reda. Dok su sva sjecišta pravaca a, b, c, d, u, v s ostalim pravcima koji ih sijeku na tim pravcima, sjecišta ostalih pravaca koji se sijeku ovise o vrsti tih pravaca kao i pramenu ništičnih ploha, odnosno položaju pravca g, kojim je takav pramen određen.

U jednom svežnju neke točke E takvih ništičnih ploha čine ova sjecišta, osim onih na pravcima a, b, c, d, u, v, neke neprekinute kvadratne skupove točaka, dakle ili ravninu ili plohu, koja se na pravcima a, b, c, d, u, v steže u te pravce. Pravcima točke E u njenoj ništičnoj ravnini ε pridruženi pramenovi ništičnih ploha u našem ništičnom kubičnom prostoru nalaze se naravski u svežnju takvih ploha pridruženih točkama ništične ravnine ε točke E. Pomoću povezanosti tih pramenova i njihovih kubičnih ploha izvedene su osobine, redovi i međusobni odnosi neprekinutih kvadratnih skupova takvih sjecišta, koji su ili ravnine, ili plohe 2., 3. ili 4. reda.

Na kraju je istaknuto da se odabiranjem po volji dviju kongruencija između triju poznatih (hiperbolična, eliptična i parabolična), kao i sječenjem njihovih ravnalica, mogu dobiti kubični ništični prostori kojima su ništične plohe bilo koje poznate vrste, s dvostrukim točkama, ili bez njih, osim onih koje se sastoje od dva dijela. Ovo je prema tome otvoreno polje za dalje radove na tom području matematičkih nauka.

Institut za matematiku
Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 3. 6. 1976. u Razredu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.