

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI  

---

RAZRED ZA MATEMATIČKE, FIZIČKE I TEHNIČKE ZNANOSTI

VILIM NIČE

DER Achsenkomplex eines kubischen Nullraumes

*Poseban otisak*

»RAD« 370, knjiga XIV

ZAGREB 1975.

Vilim Niče:

## DER ACHSENKOMPLEX EINES KUBISCHEN NULLRAUMES

*Einführung*; Ordnet man eineindeutig die Punkte und Ebenen des Euklidischen projektiven Raumes einander so zu, dass die einem Punkt zugeordnete Ebene diesen Punkt enthält und der einer Ebene zugeordnete Punkt in dieser Ebene liegt, wird auf diese Weise ein Nullraum definiert. Wenn in einem derartigen Nullraum die den Ebenen eines Punktes zugeordneten Punkte in einer Ebene liegen und die den Punkten einer Ebene zugeordneten Ebenen ein Ebenenbündel bilden, wird auf diese Weise ein linearer Nullraum bestimmt. Wenn die den Ebenen eines Punktes zugeordneten Punkte eine Fläche 2. Grades bilden und den Punkten einer Ebene zugeordneten Ebenen eine Fläche 2. Klasse einhüllen, wird auf diese Weise ein quadratischer Nullraum gegeben. Das Analoge gilt auch für kubische, biquadratische usw. Nullräume. Die einem Punkt in einem Nullraum zugeordnete Ebene nennt man, wie bekannt, Nullebene dieses Punktes, und der einer Ebene zugeordnete Punkt ist der Nullpunkt dieser Ebene.

Stellt man innerhalb eines Nullraumes in jedem Raumpunkt die Normale auf seine Nullebene, wird dadurch eine stetige dreidimensionale Geradenmenge gebildet, also ein Strahlkomplex. Einen derartigen Strahlkomplex eines Nullraumes werden wir als den Achsenkomplex dieses Nullraumes bezeichnen. Wie bekannt hat jeder Strahlkomplex seinen Grad, also die Ordnung und die Klasse dieses Komplexes sind gleich.

Ein derartiger Achsenkomplex des bekannten linearen Nullraumes, der durch eine spezielle Lage zweier korrelativ zugeordneter Räume bestimmt ist, ist, wie bekannt, quadratisch. Mittels einer Fläche 2. Grades kann jedem Raumpunkt diejenige seiner Ebenen zugeordnet werden, die mit der Polarebene dieses Punktes, bezüglich dieser Fläche 2. Grades, parallel ist. Auf diese Weise ist ein bekannter quadratischer Nullraum gegeben, und der ihm auf die eben beschriebene Weise zugeordnete Achsenkomplex ist identisch mit dem bekannten quadratischen Achsenkomplex des durch die erwähnte Fläche 2. Grades als Inzidenzfläche bestimmten Polarraumes. Wie bekannt, ist dieser Strahlkomplex ein tetraedrales, dessen Haupttetraeder durch die unendlich ferne Ebene und seine drei Symmetrieebenen gebildet wird.

In dieser Arbeit wird ein derartiger Achsenkomplex eines kubischen, durch ein Plücker'sches Konoid bestimmten Nullraums, betrachtet.

1. *Der durch das Plückersche Konoid bestimmte kubische Nullraum.* Alle ebenen Schnittkurven des Plückerschen Konoids werden, wie bekannt, parallel mit der Doppelgeraden auf eine Richtungsebene in zirkuläre Kurven projiziert. Jede zirkuläre Kurve 3. und 2. (Kreis) Ordnung hat, offenbar, einen vierfachen Brennpunkt, welcher die eben erwähnte Projektion eines in der Schnittebene liegenden Punktes ist. In der Arbeit »Über eine Quasi-Nullraumabbildung« ist bewiesen worden, dass jeder Ebene des Raumes auf diese Weise durch ein Plückersches Konoid einer ihrer Punkte, und jedem Punkt des Raumes eine seiner Ebenen zugeordnet sind. Für den so entstandenen Nullraum ist ausgeführt, dass er ein kubischer ist.

Wird auch in diesem Nullraum in jedem Raumpunkt die Normale auf seine Nullebene gestellt, bekommt man auf diese Weise eine dreidimensionale stetige Geradenmenge, die wir als Achsenkomplex dieses Nullraumes schon vorher bezeichnet haben.

2. *Der Grad des dem Nullraum eines dem Plückerschen Konoid zugeordneten Achsenkomplexes.* Die Doppelgerade  $d$  des Plückerschen Konoids sei auf einer seiner Richtungsebenen orthogonal in den Punkt  $d'$  projiziert. Abb. 1. Die Geraden  $t'_1, t'_2$  ( $t'_1 \perp t'_2$ ) des Punktes  $d'$  werden wir als der-

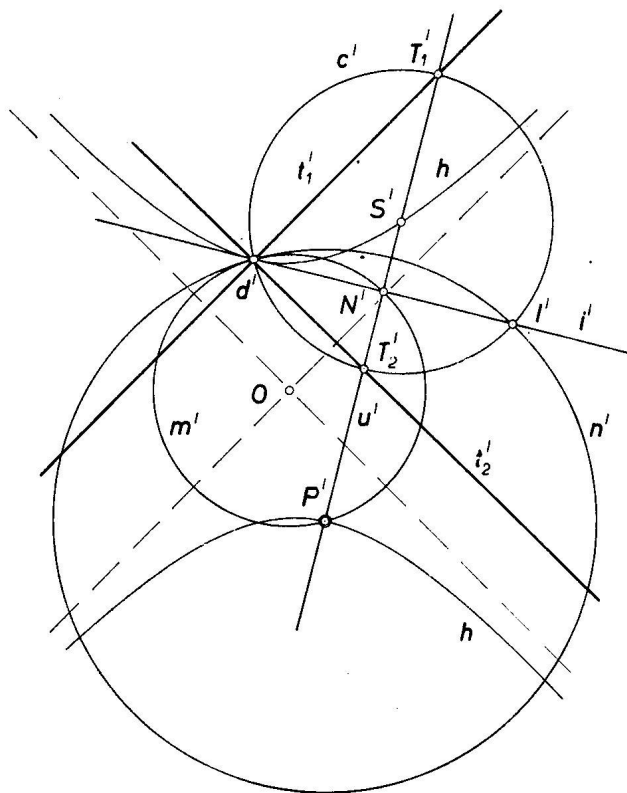


Abb. 1.

artige Projektionen der Torsalgeraden dieses Konoids auf dieselbe Bildebene betrachten. Die Gerade  $i'$  des Punktes  $d'$  sei die beschriebene Projektion einer Erzeugenden  $i$  dieses Konoides auf dieselbe Bildebene. Der Punkt  $P'$  sei eine derartige Projektion auf dieselbe Bildebene eines im Raum beliebig angenommenen Punktes  $P$ . Man ziehe eine den Punkt  $P'$  enthaltende Gerade  $u' \perp i'$ , welche die Geraden  $t'_1, t'_2, i'$  in Punkten  $T'_1, T'_2, N'$  schneidet. Wie bekannt, liegen die den Projektionen  $T'_1, N', T'_2$  auf den Geraden  $t'_1, i', t'_2$  im Raum zugeordnete Punkte  $T_1, N, T_2$  der Geraden  $t_1, i, t_2$  auf der Transversalen  $u \perp i$  der Geraden  $t_1, i, t_2$ . Der durch die Punkte  $d', T'_1, T'_2$  bestimmte Kreis  $c'$  ist die beschriebene Projektion derjenigen Ellipse  $c$  des Plückerschen Konoids, die die Schnittkurve dieses Konoids mit der Ebene der Erzeugenden  $i$  und der Transversalen  $u$  ist. Der Schnittpunkt  $\mathcal{J}'$  des Kreises  $c'$  und der Geraden  $i'$  ist die Projektion des Berührungspunktes  $\mathcal{J}$  des Plückerschen Konoids mit der Ebene  $(ui)$ . Der Hälftepunkt  $S'$  der Länge  $T'_1 T'_2$  ist der Mittelpunkt des Kreises  $c'$ , also sein vierfacher Brennpunkt. Alle im Raum mit der Ebene  $(ui)$  parallele Ebenen schneiden das Plückersche Konoid in Ebenenkurven 3. Ordnung vom Geschlecht Null, die sich auf die erwähnte Weise auf dieselbe Bildebene in zirkuläre Kurven 3. Ordnung projizieren, deren vierfacher Brennpunkt in den Mittelpunkt  $S'$  des Kreises  $c'$  fällt. Die den Mittelpunkt  $S'$  enthaltende Gerade  $s \parallel d$  schneidet die Ebenen dieses Parallelebenenbüschels in ihren Nullpunkten des zu untersuchenden kubischen Nullraumes. Die diesen Nullpunkten auf der Geraden  $s$  zugeordneten Strahlen des durch diesen kubischen Nullraum bestimmten Achsenkomplexes sind offenbar, parallel, da sie alle auf den Ebenen dieses Parallelebenenbüschels senkrecht stehen. Alle diese Strahlen projizieren sich auf bekannte Weise in die Gerade  $u'$ , und einer von ihnen enthält den Punkt  $P$ . Jeder dieser parallelen Achsenkomplexstrahlen steht senkrecht auf allen ihren Nullebenen, also alle diese Nullebenen stehen senkrecht auf allen diesen parallelen Achsenkomplexstrahlen.

Wählt man jetzt beliebig die den Punkt  $P'$  enthaltende Gerade  $u'_n$ , resp. die Transversale  $u_n$  der Geraden  $t_1, i_n, t_2$ , dann geschieht dasselbe wie vorher. Alle Punkte  $N'_n$  bilden einen Kreis  $m'$ , und alle diesen Punkten zugeordneten Punkte  $\mathcal{J}'_n$  liegen auf den zugeordneten Kreisen  $c'_n$ , und alle diese Punkte  $\mathcal{J}'_n$  bilden einen Kreis  $n'$  mit dem Mittelpunkt  $P'$ . Die Kreise  $m', n'$  berühren sich in dem Punkt  $d'$ , und der Halbmesser des Kreises  $m'$ , ist der Hälfte des Halbmessers des Kreises  $n'$  gleich. Da die Kreise  $c', v', n'$  den Punkt,  $d'$  enthalten, sind sie die beschriebenen Projektionen bestimmter Ellipsen  $c, m, n$  des Plückerschen Konoids auf dieselbe Bildebene. Die Mittelpunkte  $S'_n$  der Kreise  $c'_n$  befinden sich auf einer gleichseitigen Hyperbol  $h$ , die als das Erzeugnis zweier projektiv zugeordneter Strahlenbüschel  $(d') \wedge (P')$  erscheint, welche zwei Paar parallel zugeordneter Strahlen  $(u'_1 \parallel t'_1), (u'_2 \parallel t'_2)$  haben und wie aus dem Bild ersichtlich ist, aufeinander senkrecht stehen. Auf Grund der Eigenschaften des Plückerschen Konoids ist leicht zu schliessen, dass die Strahlenpaare  $d' S'_n, P' S_n$  in den Strahlenbüscheln  $(d') \wedge (P')$  einander zugeordnet sind. Wegen  $T'_1 S' = S' T'_2$  schneiden die zugeordneten Strahlenpaare  $d' S_n, P' S'_n$  die unendlichferne Gerade

in zwei kollokalen projektiven Punktreihen, deren Doppelpunkte sich in den unendlichfernen Punkten der Geraden  $t_1', t_2'$  befinden.

Man sieht also, dass die den Punkt enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes des kubischen Nullraumes eines Plückerschen Konoids Normalen auf die Berührungsebenen des Plückerschen Konoids in den Punkten der Ellipse  $n$  auf diesem Konoid sind. Nimmt man  $P' d' = a$  an, ist leicht zu ersehen, dass die Berührungsgeraden der Hyperbel  $h$  in den Punkten  $d', P'$  parallel mit einer Geraden  $b$  sind, für welche  $(t_1' t_2' a b) = -1$  gilt. Die durch den Mittelpunkt  $O$  der Länge  $d' P'$  gezogene Parallelen mit den Projektionen der Torsalgeraden  $t_1, t_2$  sind also Asymptoten der Hyperbel  $h$ .

Die Berührungsebenen des Plückerschen Konoids in den Punkten  $\mathcal{F}_n$  der Ellipse  $n$  hüllen eine Torse ein, welcher wir den Grad auf folgende Weise bestimmen werden:

In der Berührungsebene eines jeden Punktes  $\mathcal{F}_n$  auf der Ellipse  $n$  befindet sich eine Transversale  $u_n \frown i_n$  der Torsalgeraden  $t_1, t_2$  und der Erzeugenden  $i_n$ . Die den Punkt  $P$  enthaltende Gerade  $p \parallel d$  projiziert sich auf die beschriebene Weise in den Punkt  $P'$ . Die diese Gerade  $p$  enthaltenden Ebenen ( $p u_n$ ) schneiden die Torsalgeraden  $t_1, t_2$ , in Punkten, deren Verbindungsgeraden  $u_n$  Transversalen dieser Torsalgeraden sind und ein Hyperboloid bilden, auf welchem sich auch die Geraden  $p$  und  $d$  befinden. Zu jeder Transversalen  $u_n$  gehört eine Erzeugende  $i_n$ , die die unendlichferne Leitgerade  $l$  des Plückerschen Konoids in einem Punkt  $L_n$  schneidet. Auf Grund der Tatsache dass  $u \perp i$  ist, folgt offenbar, dass das Erzeugendensystem  $u_n$  des erwähnten Hyperboloids projektiv der Punktreihe ( $L_n$ ) auf der Geraden  $l$  zugeordnet ist. Die Berührungsebenen des Plückerschen Konoids in seinen Punkten  $\mathcal{F}_n$  längs der Ellipse  $n$  sind die Verbindungsebenen der Punkte  $L_n$  der Punktreihe ( $L_n$ ) mit den ihnen zugeordneten Erzeugenden  $u_n$  des Systems ( $u_n$ ) auf dem erwähnten Hyperboloid. Alle diese Ebenen hüllen also eine Torse 3. Grades ein, resp. ein kubisches Ebenengewinde, welches auch als Erzeugnis dreier projektiv zugeordneter Punktreihen ( $T_1^n$ )  $\frown$  ( $T_2^n$ )  $\frown$  ( $L_n$ ) betrachtet werden kann. In den Nullpunkten dieser Ebenen sind die auf diese Ebenen gestellten Normalen Strahlen unseres Achsenkomplexes, die die Gerade  $p \parallel d$  des Punktes  $P$  schneiden. Da, wie erwähnt, die Strahlen unseres Achsenkomplexes in jeder Ebene der Geraden  $p$  untereinander parallel sind, von welchen eine den Punkt  $P$  enthält, folgt, dass die diesen parallelen Achsenkomplexstrahlen zugeordneten Nullebenen alle auf dem den Punkt  $P$  enthaltendem Strahl normal sind. Auf Grund dessen folgt, dass die den Punkt  $P$  enthaltenden Normalen aller Ebenen des erwähnten kubischen Ebenengewindes, alle den Punkt  $P$  enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes des Nullraumes unseres Plückerschen Konoids sind. Diese Strahlen bilden einen Kegel, dessen Grad dem gesuchten Grad unseres Achsenkomplexes gleich ist. Die Schnittpunkte  $S_n$  dieser Strahlen des Punktes  $P$  mit den ihnen zugeordneten Geraden  $u_n$  (die Erzeugenden des vorher erwähnten Hyperboloides) sind die Nullpunkte dieser Strahlen des Punktes  $P$ . Die in diesen Schnittpunkten auf diese Strahlen des Punktes  $P$  normalen Ebenen sind offenbar die diesen Achsenkomplexstrahlen zugeordneten Nullebenen ( $u_n L_n$ ) des durch das Plückersche Ko-

noid bestimmten kubischen Nullraumes. Da die den Punkt  $P$  enthaltenden Normalen auf die Ebenen des erwähnten kubischen Ebenengewindes, auf Grund der Polarität bezüglich der Absoluten, einen kubischen Kegel bilden, gilt das folgendes:

*Der Achsenkomplex eines durch ein Plückersches Konoid bestimmten Nullraumes ist dritten Grades.*

3. *Einige Eigenschaften des durch den kubischen Nullraum eines Plückerschen Konoids bestimmten kubischen Achsenkomplexes.* Die stetige Menge der Nullpunkte  $S_n$  unseres kubischen Achsenkomplexes auf seinen den Punkt  $P$  enthaltendem Strahlem bildet eine Raumkurve, die wir als Erzeugnis des beschriebenen kubischen Ebenengewindes  $(i_n u_n)$  und des ihm projektiv zugeordneten Strahlenbüschels 2. Ordnung der Erzeugenden des hyperbolischen Zylinders  $h$  erhalten können. Dieses Erzeugnis, ist, wie bekannt, eine Raumkurve 5. Ordnung. Da aber die Doppelgerade  $d$  des Plückerschen Konoids diejenige Erzeugende des hyperbolischen Zylinders ist, die die zugeordnete Ebene in dem kubischen Ebenengewinde enthält, zerfällt diese Raumkurve 5. Ordnung in die Gerade  $p$  und in eine Raumkurve 4. Ordnung, welche den Punkt  $P$  enthält. Die den Punkt  $P$  enthaltenden Bisekanten dieser Raumkurve bilden, wie bekannu, einen kubischen Kegel, dessen Erzeugende die Strahlen unseres kubischen Achsenkomplexes sind. Es handelt sich also um denselben vorher ausgeführten Achsenkomplexstrahlenkegel des Punktes  $P$ . Der dem Punkt  $P$  zugeordnete Achsenkomplexstrahl steht auf der Ebene der Ellipse  $n$  normal, weil der den Kreis  $n'$ , als einem Kreis  $c'_n$  zugeordnete Mittelpunkt  $S'_n$ , in den Punkt  $P'$  fällt.

Auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen ist leicht zu ersehen, dass alle Achsenkomplexkegel der auf einer mit der Doppelgeraden  $d$  parallelen Geraden liegenden Punkte, gleich sind und im Raum parallel stehen. Die den Erzeugenden aller dieser Kegel als Achsenkomplexstrahlen zugeordneten Nullpunkte bilden den schon vorher erwähnten gleichseitigen hyperbolischen Zylinder, der im Raum parallel mit der Doppelgeraden  $d$  des Plückerschen Konoids ist.

Auf Grund dessen ist es auch leicht zu sehen, dass der durch den Nullraum eines Plückerschen Konoids bestimmte Achsenkomplex, *bei einer parallel mit der Doppelgeraden  $d$  ausgeführten Verschiebung invariant bleibt.*

Die den Ebenen einer Geraden  $r$  im Raum zugeordneten Nullpunkte in dem durch ein Plückersches Konoid bestimmten Nullraum bilden, wie bekannt, eine Raumkurve 3. Ordnung. Die den Punkten dieser Raumkurve, als den Nullpunkten ihrer Nullebenen zugeordneten Strahlen des kubischen Achsenkomplexes unseres kubischen Nullraumes, bilden offenbar eine konoidale Regelfläche  $\varphi$ . Die Ebenen der Geraden  $r$  schneiden die unendlichferne Ebene in einem Strahlbüschel, welchen bezüglich der Absoluten eine unendlichferne Punktreihe polar zugeordnet ist. Jedem Punkt dieser Punktreihe ist auf diese Weise eine Ebene der Geraden  $r$  zugeordnet, also auch Nullpunkt dieser Ebene auf der erwähnten Raumkurve 3. Ordnung. Die Regelfläche  $\varphi$  ist also eine stetige Menge von Verbindungsgeraden der eineindeutig zugeordneten Punkte der erwähnten unendlichfernen

Punktreihe und der kubischen Punktreihe auf der besprochenen Raumkurve 3. Ordnung. Es handelt sich also um ein Konoid 4. Grades. Also gilt das Folgende:

*Diejenigen Strahlen des kubischen Achsenkomplexes des durch ein Plücker-sches Konoid bestimmten Nullraumes, dessen Nullpunkte den Ebenen einer Geraden  $r$  zugeordnet sind, bilden ein Konoid 4. Grades, dessen unendlicherne Leitgerade auf der Geraden  $r$  senkrecht steht.*

Die den Punkten der Geraden  $r$ , als Nullpunkten zugeordneten Strahlen unseres kubischen Achsenkomplexes bilden auch eine Regelfläche  $\psi$ , die wir jetzt betrachten werden. Die den Punkten der Geraden  $r$  zugeordneten Nullebenen im kubischen Nullraum des Plückerschen Konoids, hüllen, wie bekannt, ein kubisches Ebenengewinde ein. Die Ebenen dieses Ebenengewindes schneiden die unendlichferne Ebene in Geraden, die eine Kurve 3. Klasse einhüllen. Durch die Polarisierung dieser Kurve bezüglich des absoluten Kegelschnittes geht diese Kurve in eine Kurve 3. Ordnung über. Jedem Punkt der Geraden  $r$  ist eineindeutig eine Nullebene innerhalb des Ebenengewindes zugeordnet, also auch der dieser Ebene auf der unendlichfernen Kurve 3. Ordnung eineindeutig zugeordnete Punkt. Die Verbindungsgeraden dieser eineindeutig zugeordneten Punkte der Geraden  $r$  und der unendlichfernen Kurve 3. Ordnung bilden, wie bekannt, auch eine Regelfläche 4. Grades, die die gesuchte Fläche  $\psi$  ist. Es folgt also:

*Diejenigen Achsenkomplexstrahlen des kubischen Nullraumes eines Plücker-schen Konoids, dessen zugeordnete Nullpunkte sich auf einer Geraden befinden, bilden eine Regelfläche 4. Grades.*

Da sich in jeder Ebene der Geraden  $r$  drei Strahlen unseres kubischen Achsenkomplexes befinden, die sich in drei Punkten schneiden, folgt, dass die stetige Menge dieser Schnittpunkte eine Raumkurve 3. Ordnung bilden. Also diese eben ausgeführte Regelfläche 4. Grades gehört zu derjenigen Art der Regelflächen 4. Grades, die durch eine Doppelraumkurve 3. Ordnung und eine gewöhnliche Leitgerade bestimmt ist. Es handelt sich also um die IV. Art der Sturmschen Klassifizierung.

*Angenommen zur Veröffentlichung am 15. XI. 1974. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.*

Vilim Niče:

## OSNI KOMPLEKS JEDNOG KUBIČNOG NIŠTIČNOG PROSTORA

Pridružimo li svakoj ravnini prostora jednu njenu točku i svakoj točki prostora jednu njenu ravinu, bit će na taj način određen neki ništični prostor. Ako ravninama neke točke u toj pridruženosti pridružene točke leže u jednoj ravnini i svakoj točki neke ravnine pridružene ravnine čine svežanj, onda je takav ništični prostor linearan. Ako su mjesto ravnine i svežnja na taj način svežnju ravnina i polju točaka pridružene ploha 2. reda i ploha 2. razreda, bit će takav ništični prostor kvadratan. Analogno vrijedi i za ništične prostore viši redova.

U ništičnim točkama ravnina unutar nekog ništičnog prostora postavljene okomice na te ravnine čine kompleks koji ćemo zvati osnim kompleksom tog ništičnog prostora. Svakoj zruci ovog kompleksa pridružena je prema tome njena ništična točka i njena ništična ravnina i obratno. Ovakav osni kompleks poznatog linearnog ništičnog prostora, koji čine dva korelativno pridružena prostora u specijalnom slučaju, kvadratan je i poznat. Isto je tako poznat i kvadratan osni kompleks kvadratnog ništičnog prostora, koji dobivamo kada svakoj ravnini prostora pridružimo središte njenog presjeka s nekom čvrstom plohom 2. stupnja. Taj je kompleks identičan s osnim kompleksom polarnog prostora zadane incidentne plohe.

U ovoj radnji istražen je osni kompleks kubičnog ništičnog prostora određenog jednim od Plückerovih konoida.

Svaka ravnina prostora siječe Plückerov konoid u krivulji 3. ili 2. reda, koje se u smjeru njegovog dvostrukog pravca projiciraju na njegove direkcione ravnine u cirkularne krivulje. Dakle krivulje 2. reda u kružnice. Pridružimo li tim ravninama prostora one njihove točke, koje se u opisanom smislu projiciraju u četverostruka žarišta projekcija njihovih presjeka, bit će stvoren kubični ništični prostor tog Plückerova konoida.

Na osnovi osobina Plückerova konoida da u svakom pramenu usporednih ravnina postoji jedna koja taj konoid siječe u elipsi, te da presjeci usporednih ravnina s Plückerovim konoidom, projicirani u smjeru dvostrukog pravca na direkcionu ravinu, imaju u toj projekciji zajedničko četverostruko žarište, te da se svih  $\infty^2$  elipsi tog konoida na taj način projiciraju u kružnice dokazano je u ovom radu *da je osni kompleks ovog kubičnog ništičnog prostora kubičan.*



Osim toga nađene su ove njegove osobine:

*Ništične točke zraka ovog kubičnog osnog kompleksa, koje sijeku neki pravac usporedan s dvostrukim pravcem tog Plückerova konoida, leže na istostraničnom hiperpoličkom valjku usporednom s dvostrukim pravcem tog konoida.*

*One zrake ovog kubičnog osnog kompleksa, kojima ništične ravnine prolaze nekim pravcem, čine konoid 4. stupnja s direkcionom ravninom okomitom na tom pravcu.*

*Točkama nekog pravca kao ništičnim točkama pridružene zrake našeg osnog kubičnog kompleksa čine pravčastu plohu 4. stupnja IV. vrste prema poznatoj Sturmovoj raspodjeli.*

*Primljeno za publikaciju 15. XI. 1974. u Razredu za matematičke, fizičke, i tehničke nauke Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.*