ÜBER DIE KONSTRUKTIVE BEHANDLUNG EINER ART KUGELFLÄCHEN 3. ORDNUNG

Vilko Niče, Zagreb

Sonderabdruck aus

GLASNIK MATEMATIČKI 9 (29) (1974), 303—315.

GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 9 (29) — No. 2 — 1974.

ÜBER DIE KONSTRUKTIVE BEHANDLUNG EINER ART KUGELFLÄCHEN 3. ORDNUNG

Vilko Niče, Zagreb

Einführung: Während die konstruktive Behandlung der Flächen 2. Grades schon sehr lange bekannt ist, gilt dies für die Flächen 3. Ordnung im allgemeinem nicht. Auf den Flächen 3. Ordnung, ausser den Regelflächen und einigen Drehflächen, ist das im allgemeinen einfach und mathematisch genau nicht möglich durchzuführen. Wenn es theoretisch auch möglich ist, z. B. mittels der 27, 15, 7 oder 3 Kegelschnittsysteme auf einer derartigen allgemeinen Fläche, wäre die graphisch konstruktive Ausführung verschiedener Aufgaben kaum ausführbar.

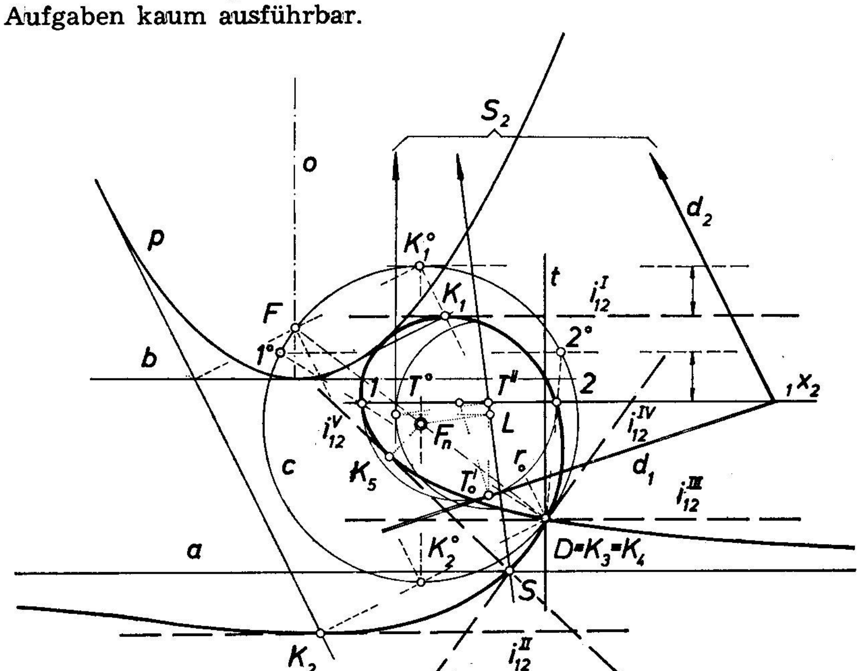

Abb. 1

Es gibt aber Flächen 3. Ordnung, die sehr einfach gegeben werden können, und auf welchen mehrere konstruktive Aufgaben sehr leicht, mathematisch genau, ausführbar sind. Z. B. die Bestimmung

AMS (MOS) subject classifications (1970): Primary 50 D 15.

Ovaj rad je financirao Republički fond za naučni rad SRH.

eines Punktes auf dieser Fläche, dann die Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden, und die Bestimmung der Schnittkurven mit einer Ebene u. s. w. Es handelt sich hier um diejenigen Flächen 3. Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt enthalten und längs ihm durch einen isotropen Kegel berührt werden, also eine reelle unendlich ferne Gerade enthalten. Alle ihre ebenen Schnitte sind zirkulär, also alle auf ihnen sich befindenden Kegelschnitte sind Kreise.

Solche Flächen können durch ein Strahlenbündel und ein Kugelbündel erzeugt werden [3], dann auf zissoidale Art aus einer Kugel und einer Ebene [5], und auch mittels der allgemeinen Inversion [1], wie auch als Fusspunktfläche eines Drehparabolides [2]. In unsere Betrachtungen werden wir, wegen ihrer Einfachkeit, diese letzteren einbeziehen. Auf Grund der Analogie mit den Kungeln 2. Ordnung, werden wir diese Flächen als Kugelflächen 3. Ordnung bezeichnen.

I. Über die Fusspunktfläche des Drehparaboloides

1. *Die Eigenschaften der Fusspunktkurve einer Parabel.* Die Fusspunkte der aus einem Pol D auf die Berührungsgeraden einer Parabel p gezogenen Normalen bilden, wie bekannt, die zirkuläre kubische Fusspunktkurve k dieser Parabel, die den Pol D als Doppelpunkt enthält. Bekanntlich sind alle Fusspunktkurven einfach oder mehrfach zirkulär. Der vierfache Brennpunkt der Fusspunktkurve der Parabel p befindet sich in dem Mittelpunkt F_n der durch den Brennpunkt F dieser Parabel p und den Pol D gebildeten Strecke [4]. Abb. 1. Dieser vierfache Brennpunkt F_n ist, wie bekannt, der reelle Schnittpunkt der isotropen Berührungsgeraden der zirkulären Fusspunktkurve in ihren absoluten Punkten. Auf Grund der Definition und der Eigenschaften der Fusspunktkurve einer Parabel ist leicht zu sehen, dass der Pol D von der Asymptote a der kubischen zirkulären Kurve k eben so weit entfernt ist, wie der Brennpunkt F von der Scheiteltangente b der Parabel p, wo $a \parallel b$ und $a \perp o$ gilt. Die Gerade o ist die Achse der Parabel p. Es ist ausserdem bekannt, dass der Abstand der mit der Asymptote a parallelen Berührungsgeraden der zirkulären Kubik k, der Länge DF gleich ist.

2. *Die Eigenschaften der Fusspunktfläche eines Drehparaboloides.* Die Fusspunktfläche der einen Pol D enthaltenden Normalen der Berührungsebenen einer Fläche 2. Grades bilden wie bekannt, die Fusspunktfläche 4. Ordnung dieses Pols bezüglich dieser Fläche. Der Pol D ist der Doppelpunkt dieser Fläche und der absolute Kegelschnitt gehört ihr als Doppelkegelschnitt an. Ist die Fläche 2. Grades ein Drehparaboloid, dann zerfällt die Fusspunktfläche in eine kubische den absoluten Kegelschnitt enthaltende Fläche [2] und in die unendlichferne Ebene, in welcher offenbar eine reelle Gerade dieser kubischen Fläche liegen muss.

Auf der Abb. 1. ist angenommen, dass die Achse o des Drehparaboloides und der Pol D in der Bildebene π_2 liegen, also die Meridianparabel p die wahre und scheinbare Kontur dieses Paraboloides ist.

Auf Grund der vorher erwähnten bekannten Tatsache, dass der vierfache Brennpunkt der kubischen zirkulären Fusspunktkurve einer Parabel in dem Mittelpunkt der durch den Doppelpunkt und den Brennpunkt dieser Parabel begrentzten Strecke liegt, ist es leicht zu beweisen [2], dass die Fusspunktfläche eines Drehparaboloides längs des absoluten Kegelschnittes durch einen isotropen Kegel berührt wird. Der reelle Scheitel dieses Kegels befindet sich im Mittelpunkt F_n der Verbindungsstrecke des Doppelpunktes D und des allen Meridianen des Drehparaboloides gemeinsamen Brennpunktes F [2]. Eine derartige kubische Fläche hat also im Rahmen der Flächenformen 3. Ordnung denselben Platz, wie die gewöhnliche Kugel innerhalb der Flächenformen 2. Grades. Sie ist also eine Kugelfläche 3. Ordnung.

Wie schon erwähnt, ist der Pol D der Doppelpunkt der Fusspunktfläche des Drehparaboloides. Liegt der Pol innerhalb des Paraboloides, befindet er sich auf dieser Fläche als ihr isolierter Doppelpunkt. Liegt der Pol auf dem Paraboloid, bekommt in ihm die Fusspunktfläche eine Spitze. Einen gewöhnlichen Doppelpunkt ergibt der Pol, wenn er sich ausserhalb des Drehparaboloides befindet.

Es muss aber hier erwähnt werden, dass auch solche den absoluten Kegelschnitt enthaltende Flächen 3. Ordnung bestehen, die längs des absoluten Kegelschnittes durch einen isotropen Kegel nicht berührt werden.

Dass die vierfachen Brennpunkte aller Ebenenschnitte unserer kubischen Kugelfläche 3. Ordnung orthogonale Projektionen des reellen Scheitels F_n auf diese Schnittebenen sind, ist offensichlich [2]. Dies gilt für alle Ebenen ausser dem einen besonderen Parallelebenenbüschel, von welchen nachher die Rede sein wird. Die bekannte Eigenschaft der Kugel 2. Grades, dass alle ihre Punkte Nabelpunkte sind, gilt bei den Kugelflächen 3. Ordnung offenbar nicht. Aber über die Zahl der Nabelpunkte auf diesen Kugelflächen 3. Ordnung wird später die Rede sein.

Man teile die ∞^2 Berührungsebenen des Drehparaboloides in Ebenen auf, welche diejenigen parabolischen Zylinder berühren, die auf der Achse o des Drehparaboloides senkrecht stehen. Die Fusspunktfläche des Drehparaboloides wird durch die Fusspunktkurven des Pols D bezüglich dieser parabolischen Zylinder gebildet, die offenbar zirkuläre Ebenenkurven 3. Ordnung sind. Die Ebenen τ_i dieser Fusspunktkurven enthalten eine den Doppelpunkt D enthaltende und mit der Achse o parallele Gerade t [2]. Die Scheiteltangenten aller diesen parabolischen Berührungszylindern zugeordneten

Fusspunktkurven liegen in einer auf die Achse o senkrecht stehenden Ebene. Ihre Brennpunkte liegen auf einem Kreis, dessen Ebene auch senkrecht auf der Achse o steht. Die Entfernung des Brennpunktes F von der Geraden t ist einer ihrer Durchmesser. Die auf diesem Kreis liegenden Brennpunkte sind offenbar die Schnittpunkte der den Brennpunkt F enthaltenden Brennachsen der erwähnten parabolischen Berührungszylinder, mit den Ebenen τ_i ihrer Fusspunktkurven. Auf Grund der schon vorher erwähnten Eigenschaft, dass der vierfache Brennpunkt der zirkulären Fusspunktkurve einer Parabel im Hälftepunkt der durch den Brennpunkt dieser Parabel und den Doppelpunkt seiner Fusspunktkurve begrenzten Strecke liegt, und dass dieser Brennpunkt von der Scheiteltangente seiner Parabel gleich weit entfernt ist wie der Doppelpunkt ihrer Fusspunktkurve von der Asymptote dieser Kurve, ist leicht ersehen, das die Asymptoten aller zirkulären kubischen Fusspunktkurven in den Ebenen τ_i der Geraden $t \parallel o$, in einer Ebene α liegen, für welche $\alpha \perp o$ gilt. Die Entfernung dieser Ebene α von dem Doppelpunkt D ist dieselbe, wie die des Brennpunktes F von der Scheitelberührungsebene des Drehparaboloides. Auf Grund dessen folgt weiter, dass die Fusspunktfläche des Pols D bezüglich des Drehparaboloides (kubische Kugelfläche) durch die Ebene α längs ihrer unendlich fernen Geraden berührt wird. Die Ebene α gehört also unserer kubischen Kugelfläche als ihre asymptotische Ebene an.

Wird auf das Drehparaboloid ein Berührungszylinder gestellt, der im Raum parallel mit der Geraden FD ist, zerfällt die Fusspunktkurve des Pols D bezüglich dieses Berührungszylinders in zwei isotrope Gerade und eine reelle Gerade $s \perp o$, die in der asymptotischen Ebene α liegt [2]. Auf unserer kubischen Kugelfläche befindet sich also auch die Gerade s der asymptotischen Ebene α, welche auf unserer Abb. 1. als der Punkt S der kubischen zirkulären Kurve k, wegen $s \perp o$, erscheint.

3. *Die reellen Geraden und die Kreise der kubischen Kugelfläche.* Da die asymptotische Ebene unserer kubischen Kugelfläche längs ihrer unendlich fernen Geraden diese Fläche berührt, und diese Gerade den absoluten Kegelschnitt auf dieser Fläche in den absoluten Punkten dieser Ebene schneidet, sind, wie bekannt, diese absoluten Punkte zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte, und die unendlich ferne Gerade eine vierdeutige Gerade dieser kubischen Kugelfläche. Alle Ebenen dieser unendlich fernen Geraden (parallele Ebenen) schneiden diese Fläche in Kegelschnitten, die die zwei absoluten Punkte enthalten, sind also Kreise. Die asymptotische Ebene α enthält also die endliche Gerade s und die zwei unendlich fernen zusammenfallenden Geraden.

Die den Pol D und die Achse o enthaltende Ebene (die Bildebene) ist offenbar die Symmetrieebene dieser kubischen Kugelfläche, auf welcher, wie wir sahen, die Gerade s senkrecht steht. Die mit der asymptotischen Ebene parallelen Ebenen schneiden diese kubische Kugelfläche in Kreisen, deren Mittelpunkte keine senkrechten Projektionen des Scheitels F_n des isotropen Berührungskegels sind, die aber in der Symmerieebene dieser Fläche liegen. Dies folgt auf Grund der Tatsache, dass unsere kubische Kugelfläche in ihren absoluten Doppelpunkten nicht ein, sondern ∞^1 konjugiert imaginäre Berührungsebenenpaare hat, die imaginäre Berührungskegel 2. Grades einhüllen. Aus der symmetrischen Form der kubischen Kugelfläche ist leicht ersichlich, dass alle diese Kreismittelpunkte sich auf der ersten Polaren der kubischen Kurve k in der Ebene (Do), bezüglich ihres unendlich fernen Punktes als Pol, befinden. Es ist auch leicht zu bemerken, dass diese erste Polare eine Hyperbel sein muss.

Wie eben gezeigt, steht die endliche Gerade s der kubischen Kugelfläche senkrecht auf ihrer Symmetrieebene, resp. der Bildebene der Abb. 1. Da jede Ebene der Geraden s die kubische Kugelfläche noch in einem Kegelschnitt schneidet, der die absoluten Punkte dieser Ebene enthält, sind alle derartigen Kegelschnitte, wie schon erwähnt, Kreise, deren Mittelpunkte orthogonale Projektionen des Scheitels F_n auf ihre Ebene sind. Man sieht also, dass auf unserer kubischen Kugelfläche sich zwei Systeme von Kreisschnitten befinden, welche uns sehr nützlich für eine einfache konstruktive Behandlung dieser kubischen Kugelflächen sein werden. Einige Kreisschnitte dieser zwei Systeme sind offenbar auch imaginär. Weil die Gerade s und die unendlich ferne Gerade senkrecht auf der Bildebene π_2 stehen, projizieren sich alle Kreise der kubischen Kugelfläche in die Sehnen der kubischen zirkulären Symmetriekurve k, die den Durchmessern dieser Kreise gleich sind.

Jede Kugel des Mittelpunktes F_n durchdringt unsere kubische Kugelfläche in noch einem Kreis, weil sie längs des absoluten Kegelschnittes durch denselben isotropen Kegel berührt wird wie diese kubische Kugelfläche. Ausserdem durchdringt jede Kugel irgend eines Kreises dieser kubischen Kugelfläche diese Fläche in noch einem Kreis, da beide Flächen den absoluten Kegelschnitt enthalten. Alle diese elementaren Eigenschaften der kubischen Kugelfläche können in ihrer konstruktiven Behandlung sehr verwandbar werden.

Dass auf der kubischen Kugelfläche keine anderen reellen Geraden bestehen können, werden wir sofort sehen.

4. *Konjugiert imaginäre Gerade und Nabelpunkte der kubischen Kugelflächen.* Auf der Abb. 1. liegen die Meridianparabel p, der Pol D und die Fusspunktkurve k in der Bildebene π_2. Die Parabel p ist, wie schon erwähnt, ein in der Bildebene liegender Meridian des Drehparaboloides. Die Berührungsebenen der Fusspunktfläche (kubischen Kugelfläche) dieses Drehparaboloides bezüglich des Pols D, längs der zirkulären Kubik k, stehen offenbar senkrecht auf der Bildebene, wegen der symmetrischen Form der kubischen Kugelfläche bezüglich dieser Bildebene. Auf der Bildebene sind also diese Berührungsebenen als Berührungsgeraden der zirkulären Kubik

$k (\equiv k'')$ sichtbar. Die Gerade $s \perp \pi_2$ projiziert sich in den Hauptpunkt S der Kubik k, und die Projektion der asymptotischen Ebene a ist die Asymptote a dieser Kubik k.

Wie bekannt schneiden alle mit der Ebene a parallelen Ebenen unsere kubische Kugelfläche in Kreisen. In denjenigen zwei dieser Ebenen die die kubische Kugelfläche in den Punkten K_1, K_2 berühren, zerfallen deren Schnittkreise in je ein Paar isotroper Geraden i_{12}^{I} und i_{12}^{II}. Dasgleiche geschieht auch in der den Doppelpunkt D enthaltenden Ebene, wo das isotrope Geradenpaar i_{12}^{III} liegt. Also die Punkte K_1, K_2 und $D \equiv K_3$ sind Nabelpunkte der kubischen Kugelfläche.

Wie gezeigt, schneiden auch die Ebenen der Geraden s die kubische Kugelfläche in Kreisen. In denjenigen dieser Ebenen, die diese kubische Kugelfläche berühren, oder ihren Doppelpunkt D enthalten, zerfällt der Schnittkreis auch in Paare isotroper Geraden. Es folgt also, dass der Berührungspunkt K_5 auch ein gewöhnlicher, und der Doppelpunkt $D \equiv K_4$ ein zweifacher Nabelpunkt dieser kubischen Kugelfläche ist. Im Nabelpunkt K_5 zerfällt der Schnittkreis in das isotrope Geradenpaar i_{12}^{IV}, und in dem zweifachen Nabelpunkt D in ein neues isotropes Geradenpaar i_{12}^{IV}. Die kubische Kugelfläche, als Fusspunktfläche eines Drehparaboloides, hat also drei einfache und einen Doppelnabelpunkt, der sich, wie wir sahen, im Doppelpunkt D befindet. Wenn die kubische Kugelfläche im Doppelpunkt eine Spitze hat, fallen die isotrope Geradenpaare i_{12}^{IV} und i_{12}^{V} zusammen, und der Doppelpunkt D wird ein zweifacher und ein dreideutiger Nabelpunkt unserer kubischen Kugelfläche. Offenbar befindet sich jeder Nabelpunkt in einem der zwei Kreissysteme.

Auf Grund der bekannten gemeinsamen Eigenschaften der gewöhnlichen und der kubischen Kugelflächen folgt offenbar, dass jede gewöhnliche Kugel des Raumes eine kubische Kugelfläche in einer Kurve 4. Ordnung I. Art schneidet, die, selbstverständlich, auch in zwei Kreise zerfallen kann. Auf Grund dessen folgt das schon Erwähnte, dass jede Kugel jedes Kreises einer kubischen Kugelfläche, diese Kugelfläche in noch einem Kreis schneidet. Hieraus folgt offenbar auch das Folgende: Die die kubische Kugelfläche in einem Nabelpunkt berührenden Kugeln schneiden diese Kugelfläche auch in einem Kreis.

Es kann aber folgende Frage gestellt werden: Gibt es auf einer kubische Kugelfläche noch weitere reelle Gerade, und dadurch auch die ihnen zugeordneten Kreissysteme? Dass dies nicht sein kann, lässt sich auf folgende Weise beweisen.

Eine allgemeine Fläche 3. Ordnung kann, wie bekannt, einen, zwei, drei oder vier Doppelpunkte haben, und 27 reelle oder konjugiert imaginäre Gerade auf ihrer Oberfläche. Von diesen Geraden können 3, 7, 15 oder 27 reell sein. Ausser dem weiss man, dass jede Gerade einer Fläche 3. Ordnung, die einen Doppelpunkt enthält, eine zweideutige ist, während diejenigen die zwei Doppelpunkte dieser Fläche enthalten, als vierdeutige Geraden auf dieser Fläche gelten. Wie bisher bemerkt, hat die kubische Kugelfläche drei Doppelpunkte. Den reellen Punkt D und zwei konjugiert imaginäre, die die absoluten Punkte der asymptotischen Ebene dieser Kugelfläche sind. Die isotropen Geradenpaare $i_{12}{}^{I}, i_{12}{}^{II}$ enthalten die absoluten Punkte, sind also zweideutig. Das isotrope Geradenpaar $i_{12}{}^{IV}$ enthält den reellen Doppelpunkt D, ist also auch zweideutig. Das isotrope Geradenpaar $i_{12}{}^{III}$ enthält auf jeder seiner Geraden den reellen Doppelpunkt D, und einen von denjenigen, die in den zwei absoluten Punkten der Ebene a liegen. Dieses isotrope Geradenpaar $i_{12}{}^{III}$ ist also vierdeutig. Das isotrope Geradenpaar $i_{12}{}^{V}$ enthält keinen der Doppelpunkte, ist also eindeutig. Die isotropen Geradenpaare $i_{12}{}^{I}$, $i_{12}{}^{II}$, $i_{12}{}^{III}$, $i_{12}{}^{IV}$ und $i_{12}{}^{V}$ vertreten also $4 + 4 + 8 + 4 + 2 = 22$ Geraden der kubischen Kugelfläche. Da die unendlich ferne Gerade der asymptotische Ebene a zwei Doppelpunkte enthält, ist sie eine reelle vierdeutige Gerade dieser Kugelfläche, während die Gerade s, wie schon erwähnt, eine eindeutige ist. Wir haben also auf diese Weise alle $22 + 4 + 1 = 27$ Geraden auf der kubischen Kugelfläche entdeckt, so dass keine weiteren reellen oder konjugiert imaginären Geraden auf dieser Fläche bestehen können. Da sich in der asymptotischen Ebene drei Gerade dieser kubischen Fläche befinden, von welchen zwei unendlich fern zusammenfallen, gehört unsere kubische Kugelfläche zu derjenigen Art der Flächen 3. Ordnung, die drei reelle Geraden und drei Doppelpunkte enthalten.

Betrachtet man den reellen Schnittpunkt zweier n-deutigen isotropen Geraden einer Fläche als n-deutigen Nabelpunkt dieser Fläche, dann hat, auf Grund unserer Ausführungen, die kubische Kugelfläche einen einfachen eindeutigen Nabelpunkt K_5 zwei einfache zweideutige Nabelpunkte K_1 und K_2, und einen zweifachen sechsdeutigen Nabelpunkt $D \equiv K_3 \equiv K_4$.

Mittels der zwei Kriessysteme und der anderen beschriebenen Eigenschaften der kubischen Kugelfläche ist eine relativ leichte konstruktive Behandlung dieser Flächen möglich, was in II. Teil dieser Arbeit mit den einfachsten Mitteln der Darstellenden Geometrie ausgeführt wird.

II. Konstruktive Aufgaben auf der kubischen Kugelfläche

1. *Ein Punkt auf der Oberfläche der kubischen Kugelfläche.* Es sei T'' auf unserer Abb. 1. die orthogonale Projektion eines, resp. zweier Punkte der kubischen Kugelfläche (der obere und der untere Punkt bezüglich der Bildebene $\pi_2 \equiv (Do)$). Es soll die Entfernung dieser Punkte von der Bildebene bestimmt werden.

Die Bildebene π_2 ist, wie bekannt, die Symmetrieebene dieser kubischen Kugelfläche. Die den Punkt T'' enthaltende Gerade $x \parallel a$

sei die Spur einer mit der asymptotischen Ebene a parallelen Ebene π_1, welche, wie bekannt, die kubische Kugelfläche in einem Kreis r schneidet, auf welchem sich die zwei Punkte T befinden. Der Durchmesser dieses Kreises ist durch die Schnittpunkte $1, 2$ der Spurgeraden x der Ebene π_1 mit der kubischen Kontur k der kubischen Kugelfläche gegeben. Beide dieser Punkte $1, 2$ sind auch Schnittpunkte der Spurgeraden x mit dem in der Ebene π_1 liegenden Kreis r dieser kubischen Kugelfläche. Also der Kreis r wird durch die Punkte 1, 2 bestimmt, welche wir daher vorerst bestimmen müssen.

Jede zirkuläre Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht 0 kann als orthogonale Projektion einer ebenen Schnittkurve eines Plückerschen Konoids, auf eine seiner Direktionsebenen, betrachtet werden. Auf diesem Plückerschen Konoid gibt es immer eine seiner Erzeugenden, die mit der Schnittebene im Raum parallel ist. Die diese Erzeugende enthaltende und mit der Schnittebene parallele Ebene schneidet das Plückersche Konoid in einer Ellipse, welche sich im demselben Sinn auf dieselbe Direktionsebene, wie bekannt, in einen Kreis projiziert. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist, auch schon bekannt, der vierfache Brennpunkt der projizierten zirkulären Kubik, weil beide diese projizierten Kurven, auf Grund der Eigenschaften des Plückerschen Konoids, in den gemeinsamen absoluten Punkten durch dasselbe Paar isotroper Geraden berührt ist.

Zeichnet man also denjenigen Kreis c des Doppelpunktes D, dem der Punkt F_n der Mittelpunkt ist, dann kann dieser Kreis, als die Projektion derjenigen Ellipse der Plückerschen Konoids betrachtet werden, welche als Schnittellipse mit derjenigen Ebene entsteht, die mit der Ebene der erwähnten Schnittkubik auf diesem Konoid parallel ist, und welche sich auf die erwähnte Weise in die zirkuläre Kubik k projiziert. Zieht man die den Punkt F_n enthaltende Normale auf die Asymptote a der Kubik k, wird der Kreis c durch diese Normale in den Punkten K_1^0, K_2^0 geschnitten. Diese zwei Punkte, verbunden mit dem Doppelpunkt D, können als Projektionen t_1, t_2, in dem beschriebenen Sinn, der Torsalgeraden desjenigen Plückerschen Konoids betrachtet werden, dem die zirkuläre Kubik k die erwähnte Projektion einer seiner ebenen Schnittkurven ist. Wenn jetzt auf den Geraden t_1, t_2 die Punkte K_1, K_2 der zirkulären kubischen Fusspunktkurve k bestimmt werden, liegen die Berührungsgeraden i_{12}^{I}, i_{12}^{II} dieser zirkulären Kurve in diesen Punkten parallel mit der Asymptote a. Die den Brennpunkt F der Parabel p enthaltende parallele Gerade mit der Geraden t_1, resp. t_2, schneidet die Scheiteltangente b der Parabel p im Punkt, deren Gerade $\perp t_1$, resp. $\perp t_2$, diese Gerade t_1, resp t_2, im Punkt K_1, resp. K_2 schneidet. Da im Raum die Ebene der erwähnten Schnittellipse der Projektion c, und die Ebene der kubischen Schnittkurve der zirkulären Projektion k, parallel sind, muss der Abstand der parallelen Schnittgeraden dieser zwei Ebenen mit der Ebene der zwei Erzeugenden, auf deren Projektion sich die Projektion der Punkte $1, 2$ der zirkulären Kurve k befinden, gleich der Entfernung des Punktes K_1 von der Berührungsgeraden i_{12}^{I}, resp. des Punktes K_2 von der Berührungsgeraden i_{12}^{II}, sein. Zieht man also die Gerade $d \parallel x$ so, dass ihre Entfernung von der Geraden x gleich der Entfernung des Punktes K_1 von der Berührungsgeraden i_{12}^{I}, resp. des Punktes K_2 von der Geraden i_{12}^{II}, ist, wird durch diese Gerade d der Kreis c in denjenigen Punkten $1^{\circ}, 2^{\circ}$ geschnitten, die die beschriebenen Projektionen derjenigen zwei Erzeugenden des Plückerschen Konoids enthalten, welche die Gerade x in den gesuchten Punkten $1, 2$ schneidet. Auf dem, in der mit der asymptotischen Ebene a parallelen Ebene liegenden Kreis r des Durchmessers 12, befinden sich die gesuchten zwei Punkte T unserer kubischen Kugelfläche, die sich in den beliebig angenommenen Punkt T'' senkrecht auf die Bildebene projizieren.

In der in die Bildebene π_2 umgeklappten Lage r_0 des Kreises r des Durchmessers 12, befinden sich die umgeklappten Lagen aller Punkte der Kubischen Kugelfläche, die sich auf dem Kreis r dieser Fläche befinden. Die umgeklappte Lage dieser Punkte gibt uns ihre Entfernung von der Bildebene π_2, resp. von der Symmetrieebene dieser Kugelfläche. Auf der Abb. 1. ist die Strecke $T'' T'$ ($\equiv T_0$) der Entfernung des Punktes T von der Bildebene π_2 gleich.

2. *Die Berührungsebene der kubischen Kugelfläche in einem ihrer Punkte.* Der Punkt in welchem wir auf die kubische Kugelfläche eine Berührungsebene legen möchten, sei der eben bestimmte Punkt T oberhalb der Bildebene π_2. Da auf unserer kubischen Kugelfläche zwei Systeme von Kreisen bestehen, enthält jeder Punkt dieser Kugelfläche je einen Kreis dieser zwei Systeme. Durch die zwei Berührungsgeraden dieser Kreise in einem Punkt unserer kubischen Kugelfläche ist die Berührungsebene dieser Fläche in diesem Punkt bestimmt. Nimmt man die Gerade x auf der Abb. 1. als Schnittgerade der Bildebene π_2 (als Aufrissebene) mit der Grundrissebene π_1, dann wird der umgeklappte Kreis r_0 als Grundriss dieses Kreises betrachtet werden müssen, und auf Grund dessen wird auch $T' \equiv T_0$ gelten. Die Berührungsgerade d_1 des Kreises $r' \equiv r_0$ im Punkt $T' \equiv T_0$ wird die erste Spurgerade in der Ebene π_1 der gesuchten Berührungsebene. Der zweite den Punkt T enthaltende Kreis der kubischen Kugelfläche enthält, wie bekannt, die Gerade s. Da wegen $s \perp \pi_2$ auch die Ebene des zweiten Kreises senkrecht auf der Bildebene π_2 steht, ist ihre Projektion durch die Gerade $y = ST$ in der Bildebene π_2 gegeben. Wie schon vorher erwähnt, befindet sich der Mittelpunkt dieses zweiten Kreises in der senkrechten Projektion L des Punktes F_n auf seine Ebene. Da die Strecke LT der Halbmesser dieses Kreises ist, und der Punkt L sein Mittelpunkt, ist er damit bestimmt. Klappt man seine Ebene um die Gerade y in die Bildebene π_2 um, bleibt der Mittelpunkt im Punkt L, und der Punkt T fällt in den Punkt T°, wo $T'' T_0 = T'' T^{\circ}$ gelten muss. Der zweite umgeklappte Kreis des Punktes T und des Mittelpunktes L

enthält den Punkt T°, und schneidet die Gerade y in den Punkten 3, 4. Die Länge *34* ist die orthogonale Projektion dieses zweiten Kreises des Punktes T auf die Bildebene. Die Berührungsgerade dieses zweiten Krieses in umgeklappter Lage im Punkt T° schneidet die Gerade y im Punkt, welchen die zweite Spurgerade π_2 der Berührungsebene im Punkt T in der Bildebene π_2 enthält. Die Verbindungsgerade d_2 dieses Punktes mit dem Schnittpunkt der Geraden d_1 und x ist also diese zweite Spur der gesuchten Berührungsebene. Durch die Spurgeraden d_1, d_2 in den Ebenen π_1 und π_2, ist die gesuchte Berührungsebene bestimmt.

3. *Die Schnittpunkte einer Geraden mit der kubischen Kugelfläche.* Mathematisch genau können die Schnittpunkte einer kubischen Kugelfläche nur durch diejenigen Geraden bestimmt werden, welche in den Ebenen der Kreise dieser Flächen liegen, also wenn diese Geraden die Gerade s, oder die unendlich ferne Gerade der asymptotischen Ebene α schneidet. Auf Grund unserer, in der Abt. 2. durchgeführten Betrachtungen, ist es leicht mittels der elementaren Methoden der Darstellenden Geometrie solche Schnittpunkte zu bestimmen.

4. *Ebene Schnitte der kubischen Kugelfläche.* Jede Ebene des Raumes wird durch die mit der asymptotischen Ebene α parallelen Ebenen in parallelen Spurgeraden geschnitten, die die in ihnen liegenden Kreise der kubischen Kugelfläche in Punkten schneiden, von welchen die Schnittkurve dieser Ebene mit der kubischen Kugefläche gebildet wird. Auf Grund der vorher durchgeführten Betrachtungen ist die konstruktive Bestimmung dieser Punkte leicht durchzuführen. Auch der vierfache Brennpunkt dieser zirkulären kubischen Schnittkurve, der die senkrechte Projektion des Punktes F_n auf die Schnittebene ist, kann oft nützlich bei derartigen konstruktiven Behandlungen sein.

5. *Die Durchdringungskurven der kubischen Kugelflächen.* Auf Grund der Eigenschaften, und besonders der Kreissysteme einer kubischen Kugelfläche, ist leicht zu ersehen, mit welchen Flächen und in welcher Lage, bezüglich der Kugelfläche, es möglich ist die Punkte der Durchdringungskurven mathematisch genau zu konstruieren. Das sind erstens die mit der asömptotischen Ebene parallelen Zylinder, und dann alle Zylinder, die durch die asymptotische Ebene in einem Kreis geschnitten werden. Weiterhin mit denjenigen Kegeln, deren Spitze sich auf der Geraden s befindet, oder auch mit denjenigen, die durch die asymptotische Ebene α in einem Kreis geschnitten werden. Dies ist auch bei allen Drehflächen möglich, deren Achse auf der asymptotischen Ebene senkrecht steht, und beim Torus auch dann, wenn seine Achse in der Geraden s liegt. Selbstverständlich ist eine derartige Durchdringung mit jeder gewöhnlichen Kugel möglich, und bei zwei kubischen Kugelflächen nur dann, wenn ihre asymptotischen Ebenen parallel sind. Die Durchdringungskurven, mit mathematisch genau konstruirten Punkten,

einer kubischen Kugelfläche mit einem dreiachsigen Ellipsoid, oder Hyperboloid, oder elliptischen Paraboloid, ist nur dann möglich, wenn die asymptotische Ebene der kubischen Kugelfläche diese Flächen 2. Grades in einem reellen oder imaginären Kreis schneidet.

Alle konstruktiven Ausführungen können offenbar am leichtesten ausgeführt werden, wenn die Symmetriebene π_2 als Aufrissebene angenommen wird, und dadurch die Grundrissebene parallel mit der asymptotischen Ebenen ist, so wie es auf der Abb. 1. angenommen wurde.

6. *Die Schatengrenzen und die Konturkurven.* Auf Grund aller unserer bisheragen Betrachtungen ist leicht ersichlich, dass die Punkte der Schattengrenzen und der Konturkurven mathematisch genau konstruierbar nur dann sind, wenn die Lichtstrahlen, resp. die Projektionsstrahlen, ihren Ausgangspunkt auf einer der zwei reellen Geraden haben. Also, die genaue konstruktive Ausführung ist nur dann möglich, wenn die Lichtstrahlen, resp. Projektionsstrahlen, parallel mit der asymptotischen Ebene sind, oder bei Zentralbeleuchtung, resp. Zentralprojektion, wenn der Ausgangspunkt auf der Geraden *s* liegt.

LITERATUR:

[1] *V. Niče,* Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije, Rad Jugoslav. akad. znan. i umjet. **278** (86), (1945), 153—194.

[2] *V. Niče,* O nožišnim plohama rotacionog paraboloida, Glasnik Mat. Fiz. Astr. **5** (1950), 3—11.

[3] *V. Niče,* Strofoidalne plohe trećeg reda, Zbornik radova Matemat. institut Srp. akad. nauka, **2** (1952), 97—112.

[4] *V. Niče,* O fokalnim osobinama bicirkularnih krivulja i nekih ciklida 4. reda, Rad Jugoslav. akad. znan. i umjet. **296** (1953), 185—197.

[5] *V. Niče,* Cisoidalne plohe ravnine i kugle, njihove pratilice i neke generalizacije, Rad Jugoslav. akad. znan. i umjet. **302** (1955), 27—46.

(Eingegangen am 27. XI. 1973.)

Mathematisches Institut der Universität Zagreb

KONSTRUKTIVNA OBRADA NEKIH SFERNIH KUBIČNIH PLOHA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Konstruktivna obrada ploha 2. stupnja, bilo pravčastih bilo općih, vrlo je jednostavna i poznata već stoljećima. Za plohe 3. reda, osim pravčastih i nekih rotacionih, to se ne može tvrditi. Postoje međutim takve opće plohe 3. reda, na kojima je to ipak dosta jednostavno moguće provesti. To su tzv. sferne plohe 3. reda, koje, kao i obična kugla, prolaze apsolutom i dirane su duž nje izotropnim

stošcem jednog realnog vrha. Ovaj vrh odgovara, kao što znamo, središtu obične kugle. Takve se plohe mogu proizvesti na više raznih načina, no najzgodnije su prikazane kao nožišne plohe rotacionog paraboloida nekog pola D. Ovaj je pol, kao što je poznato, dvostruka točka sferne kubične plohe.

Svi ravninski presjeci ovakvih ploha su cirkularni, dakle su sve konike na njima kružnice. Budući da na nožišnoj plohi rotacionog paraboloida postoji uvijek jedan konačan i jedan neizmjerno dalek realan pravac, sijeku njihove ravnine tu plohu u dva sistema kružnica. Dakle svakom njenom točkom prolaze po dvije od njih. Ova su dva pravca okomita na ravninu simetrije ovakve sferne plohe 3. reda, dakle su i ravnine svih kružnica te plohe okomite na tu ravninu simetrije. Te se kružnice prema tome projiciraju okomito na tu ravninu u dužine jednake njihovim promjerima. Uzme li se ta ravnina simetrije kao ravnina slike, lako se preklapanjem tih kružnica u tu ravninu može odrediti udaljenost svake njene točke od te ravnine. Tangente obiju kružnica u nekoj točki takve plohe određuju dirnu ravninu te plohe u toj točki.

Na sl. 1. je parabola p konturni meridijan rotacionog paraboloida koji leži u ravnini slike, u kojoj je i pol, odnosno dvostruka točka D. Cirkularna krivulja 3. reda k je nožišna krivulja te parabole za pol D, ali je ona i presječna krivulja naše sferne kubične plohe s njenom simetralnom ravninom. Matematički točne promjere (i projekcije) kružnica usporednih s asimptotskom ravninom dobivamo pomoću sjecišta krivulje k s pravcima usporednim s asimptotom te krivulje. Ovo se postiže na taj način, da se cirkularna krivulja k smatra okomitom projekcijom (u smjeru dvostrukog pravca) jednog ravninskog presjeka nekog Plückerovog konoida na njegovu direkcionu ravninu. Grafički postupak je vrlo jednostavan, a kada imamo udaljenost točke od ravnine simetrije, lako se odredi i druga kružnica te točke, kojoj ravnina prolazi konačnim pravcem te sferne kubične plohe.

Pomoću ovako, matematički točno, određenih kružnica svake točke na takvoj plohi, mogu se matematički točno odrediti ne samo dirna ravnina, nego i probodišta te plohe sa svim pravcima koji sijeku njene realne pravce, te točaka njene presječne krivulje s bilo kojom ravninom prostora. Isto se tako mogu točno konstruirati točke prodorne krivulje ove plohe sa stošcem 2. stupnja, ako mu je vrh na konačnom pravcu, ili mu je ravnina kružnog presjeka usporedna s asimptotskom ravninom. Kod valjaka 2. stupnja se to tako može očito učiniti onda, ako su oni usporedni s asimptotskom ravninom, ili su im s tom ravninom usporedne kružne osnovke. S rotacionim plohama moguć je takav prodor samo onda, ako im je os okomita na asimptotsku ravninu, ili se ona podudara s konačnim pravcem. Točke prodorne krivulje ovakove plohe s troosnim elipsoidom, ili dvoplošnim hiperboloidom, odnosno eliptičkim paraboloidom, moguće je dobiti samo onda, ako je dirna ravnina takvih ploha 2. stupnja, u jednoj njihovoj kružnoj točki, usporedna s asimptotskom ravninom te sferne kubične plohe. Lako se vidi, kada je ovakav prodor moguć s jednoplošnim hiperboloidom, ili s hiperboličkim paraboloidom. Matematički točne točke konturnih krivulja i krivulja rastavnica moguće je odrediti samo onda, ako su zrake projiciranja, odnosno rasvjete, usporedne s asimptotskom ravninom, ili ako je izvor svjetla, ili projiciranja na konačnom realnom pravcu.

Na ovakovoj sfernoj kubičnoj plohi određeno je i svih 27 pravaca, od kojih su dva realna, sa u jednom od njih po dva neizmjerno bliza, te 22 u parovima izotropna. Od ovih je jedan par jednoznačan, tri dvoznačna i jedan četveroznačan, dok su od realnih jedan jednoznačan, a drugi četveroznačan. Svim tim izotropnim parovima ovakove sferne kubične plohe pripadaju i odgovarajuće kružne točke, između kojih je dvostruka točka *D* dvoznačna i četveroznačna, dakle šesteroznačna kružna točka.