JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VILIM NIČE

ÜBER EINE QUASI-NULLRAUMABBILDUNG

O JEDNOM PROSTORNOM KVAZINIŠTIČNOM PRESLIKAVANJU

Poseban otisak iz: »RADA« knjiga 367

ZAGREB 1974.

VILIM NIČE

ÜBER EINE QUASI-NULLRAUMABBILDUNG

Einführung: Der bekannte Nullraum besteht, wie bekannt, aus einer solchen korrelativen Raumabbildung, wo die einem Raumpunkt P zugeordnete Ebene π diesen Punkt enthält, während die den Punkten dieser Ebene π zugeordneten Ebenen diesen Punkt P enthalten und die den Ebenen dieses Punktes P zugeordneten Punkte in dieser Ebene liegen. In unserem Punkt-Ebene Raumabbildungsfall wird nur die erste Hälfte gelten, die zweite aber nicht. Also, die jedem Raumpunkt zugeordnete Ebene enthält diesen Punkt, und der jeder Ebene des Raumes zugeordnete Punkt liegt in dieser Ebene, und nichts mehr.

Diese Quasi-Nullraumabbildung besteht in folgendem: Wie bekannt, sind die auf eine Direktionsebene parallel mit der Doppelgeraden projizierten Ellipsen eines Plückerschen Konoids Kreise. Dies folgt auf Grund der Tatsache, dass das Plückersche Konoid ein unendlich fernes Paar isotroper Erzeugenden enthält. Jede Ebene des Raumes schneidet das Plückersche Konoid in einer Kurve 3. Ordnung, die auch die zwei konjugiert imaginären Schnittpunkte dieser Ebene mit den zwei erwähnten unendlichfernen isotropen Erzeugenden enthält. Da sich diese zwei konjugiert imaginären Schnittpunkte, auf die eben erwähnte Weise, auf eine Direktionsebene dieses Konoids in die absoluten Punkte dieser Ebene projizieren, folgt, dass alle kubischen Ebenenschnitte des Plückerschen Konoids sich, parallel mit seiner Doppelgeraden, auf eine seiner Direktionsebenen in zirkuläre Kurven projizieren. Jede dieser zirkulären Kurven 3. Ordnung hat einen vierfachen Brennpunkt, der auch auf die beschriebene Weise die Projektion eines Punktes der beliebig angenommenen Schnittebene ist. Auf diese Weise ist also durch jedes Plückersche Konoid jeder Ebene des Raumes einer ihrer Punkte zugeordnet, aber auch jedem Raumpunkt eine Ebene, wie später ausgeführt wird.

In dieser Arbeit wird diese Punkt-Ebenen Raumzuordnung betrachtet. Es werden die geometrischen Örter der den Ebenen einer Geraden und der den Ebenen eines Punktes auf diese Weise zugeordneten Punkte betrachtet, wie auch die geometrischen Örter der den Punkten einer Geraden und einer Ebene zugeordneten Ebenen untersucht.

I. *Über die ebenen Parallelschnitte eines Plückerschen Konoids.*

Jede Fläche hat in jedem ihrem Punkt eine Berührungsebene, ganz gleich ob es sich um ihre reellen oder konjugiert imaginären Punkte handelt. Eine Berührungsebene des Plückerschen Konoids, die wie bekannt eine ihrer Erzeugenden i enthält, schneide dieses Konoid in einer Ellipse e, und die unendlichferne Ebene in einer Geraden g^{∞}, die das isotrope Erzeugendenpaar dieses Konoids in den unendlichfernen konjugiert imaginären Punkten P_1^{∞}, P_2^{∞} schneidet. Die konjugiert imaginären Berührungsebenen dieses Konoids in den konjugiert imaginären Punkten P_1^{∞}, P_2^{∞} schneiden sich in einer reellen Geraden f und enthalten, offenbar, den unendlichfernen Punkt D^{∞} der Doppelgeraden d dieses Plückerschen Konoids. Es gilt also $f \parallel d$. Jede Ebene der unendlichfernen Geraden g^{∞} (also ein Büschel paralleler Ebenen) schneidet das Plückersche Konoid in einer Kurve 3. Ordnung, die die Punkte P_1^{∞}, P_2^{∞} enthält, und durch die konjugiert imaginären Berührungsebenen des Konoids in diesen Punkten berührt wird. Werden jetzt alle diese Parallelebenenschnitte aus dem Punkt D^{∞} (also parallel mit der Doppelgerade d) auf eine Direktionsebene dieses Konoids projiziert, so werden alle diese Projektionen die unendlich fernen absoluten Punkte dieser Direktionsebene enthalten, aber auch in diesen Punkten durch dieselben zwei isotropen Geraden berührt. Diese zwei isotropen Berührungsgeraden schneiden sich, wie bekannt, in einem reellen Punkt F, der der Schnittpunkt der Grade f mit dieser Direktionsebene ist. Derartige Punkte einer ebenen Kurve, die die absoluten Punkte ihrer Ebene enthält, also zirkular ist, sind als deren vierfacher Brennpunkt bekannt.

Man sieht also, dass die beschriebenen Projektionen der Parallelschnitte eines Plückerschen Konoids auf eine seiner Direktionsebene, zirkuläre Kurven sind, die einen gemeinsamen vierfachen Brennpunkt haben. Die vorher erwähnte Ellipse e projiziert sich, auf die eben erwähnte Weise, in einen Kreis, dessen Mittelpunkt nicht nur Projektion des Mittelpunktes dieser Ellipse e ist, sondern auch sein vierfacher Brennpunkt. In jedem Parallelebenenbüschel des Raumes befindet sich immer eine und nur eine Ebene, die das Plückersche Konoid in einer Ellipse schneidet. Auf Grund dessen folgt, dass die mit der Doppelgeraden d parallelen Projektionen der mit den Ebenen dieses Büschels erzeugten Schnittkurven des Plückerschen Konoids auf eine Direktionsebene zirkuläre Kurven sind, offebar 3. Ordnung, die den gemeinsamen vierfachen Brennpunkt haben, der sich in der Projektion des Mittelpunktes der einzigen Ellipse in diesem Parallelschnittebenenbüschel befindet.

II. *Über die eineindeutige Punkt-Ebenen Raumzuordnung (Quasi-Nullraumabbildung), bestimmt durch das Plückersche Konoid.*

a) Da jede Ebene des Raumes mit einer Berührungsebene des Plückerschen Konoids parallel ist, genügt es nur die Punkte zu finden und betrachten die den mit diesen Raumebenen parallelen Berührungsebenen auf die beschriebene Weise zugeordnet sind.

Es seien mit d, t_1, t_2, K_1 und K_2 die Doppelgerade, die Torsalgeraden und die Kuspidalpunkte des Plückerschen Konoids bezeichnet. Die eine Erzeugende i dieses Konoids enthaltende Ebene τ schneide dieses Konoid in der Ellipse e. Die Torsalgeraden t_1, t_2 schneide diese Ebene τ in den Punkten P_1, P_2. Wie bekannt, ist $P_1 P_2 = p \perp i$ und $P_1 P_2$ ist die Grossachse der Schnittellipse e. Der Mittelpunkt der Strecke $P_1 P_2$ ist demnach der Mittelpunkt der Ellipkse e, also derjenige Punkt der Ebene τ, der sich in den Mittelpunkt (den vierfachen Brennpunkt) der vorher beschriebenen Kreisprojektion der Ellipse e auf eine Direktionsebene projiziert.

Zieht man alle Ebenen τ_i der Erzeugenden i in Betracht, schneiden diese Ebenen τ_i die Torsalgeraden t_1, t_2 in Punktepaaren $P_1^i P_2^i = p^i \perp i$. Also, alle Geraden p^i bilden ein Erzeugendensystem eines hyperbolischen Paraboloids, zu welchem auch die Torsalgeraden t_1, t_2 als Erzeugende des zweiten Systems dieses Paraboloids gehören. Die Mittelebene α des Plückerschen Konoids, die mit den Torsalgeraden t_1, t_2, also auch mit den Torsalebenen, parallel ist, schneidet dieses hyperbolische Paraboloid in einer Geraden (Erzeugenden) s, auf welcher die Mittelpunkte S_i der Grossachsen $P_1^i P_2^i$, also auch der Schnittellipsen e^i mit den Ebenen τ_i der Erzeugenden i, liegen.

b) Man betrachte zwei in einem Punkt der Doppelgeraden d sich schneidende Erzeugende i, $\bar{i}$ des Plückerschen Konoids, die sich parallel mit dieser Doppelgeraden auf die Mittelebene α des Plückerschen Konoids in die Geraden i', $\bar{i}'$ projizieren. Es ist leicht zu beweisen, dass für die der Erzeugenden i auf die eben beschriebene Weise zugeordnete Gerade s in der Mittelebene α des Konoids $s \perp \bar{i}'$ gilt. Auf dieselbe Weise gilt für die der Erzeugenden $\bar{i}$ zugeordnete Gerade $\bar{s}$ in dieser Mittelebene $\bar{s} \perp i'$.

Nimmt man die Gerade $s \equiv i_1'$ als die beschriebene Projektion einer neuen Erzeugenden i_1 an, die die Doppelgerade d gemeinsam mit der Erzeugenden $\bar{i}_1$ schneidet, dann folgt offenbar, dass auch für den dieser Erzeugenden i_1 zugeordneten Strahl s_1 dasselbe gilt, also $s_1 \perp \bar{i}_1'$ ist, und demnach auch $s_1 \perp i_1$ gilt. Die zugeordneten Strahlenpaare i, s sind also involutorisch zugeordnet. Da, wie bekannt, die Projektionen i_n', $\bar{i}_n'$ der je einen Punkt der Doppelgeraden d enthaltenden Erzeugendenpaare i_n $\bar{i}_n$ in der Mittelebene α ein hyperbolisch involutorisches Strahlbüschel $(i_n', \bar{i}_n')$ bilden, bilden auch die diesen Erzeugenden zugeordneten Strahlen s_n, $\bar{s}_n$ in dieser Ebene ein derartiges involutorisches Strahlbüschel $(s_n, \bar{s}_n)$, welches mit dem ersten zusammenfällt. Es ist leicht das Folgende bemerkbar: Ist $s \equiv i_1'$ der der Erzeugenden i zugeordnete Strahl, dann befinden sich die Erzeugenden i, i_1 in zwei von der Mittelebene α gleich entfernten Direktionsebenen.

c) *Bestimmung des einer Ebene zugeordneten Punktes.* Nimmt man beliebig im Raum eine Ebene ϱ an, kann der ihr auf die vorher beschriebene Weise zugeordnete und in ihr liegende Punkt R auf folgende Weise gefunden werden: Man bestimmt auf dem Plückerschen

Konoid seine Erzeugende $i \parallel \varrho$, und findet diejenige Ebene $\varrho_1 \parallel \varrho$, die die Erzeugende i enthält. Die in dem Hälftepunkt S der Strecke $P_1 P_2$, die durch die Schnittpunkte P_1, P_2 der Torsalgeraden mit der Ebene ϱ_1 bestimmt ist, mit der Doppelgeraden d gezogene Parallele f schneidet die Ebene ϱ in dem ihr zugeordneten Punkt R, da die Gerade f den Mittelpunkt S der Schnittellipse e des Plückerschen Konoids mit seiner Berührungsebene ϱ_1 enthält.

d) *Bestimmung der einem Raumpunkt R zugeordneten Ebene.* Wird im Raum der Punkt R gegeben, dann kann die ihm zugeordnete Ebene ϱ folgenderweise bestimmt werden: Man zieht die den Punkt R enthaltende Gerade $f \parallel d$, die die Mittelebene α des Plückerschen Konoids im Punkt S schneidet. Man ziehe durch diesen Punkt S die Transversale p der Torsalgeraden t_1, t_2 dieses Konoids. Diejenige Ebene $\varrho \parallel p$ des Punktes R, die diejenige Gerade i_1 enthält, für welche $i_1 \perp d$ und $i_1 \perp p$ gilt, ist die diesem Punkt R zugeordnete Ebene ϱ, weil sie mit derjenigen Berührungsebene ϱ_1 des Plückerschen Konoids parallel ist, die diejenige Erzeugende $i \perp p$ dieses Konoids enthält, für welche $i \parallel i_1$ ist.

III. *Die den Ebenen einer Geraden g zugeordneten Punkte.*

a) Auf Grund der Definition unserer Zuordnung und unserer bisherigen Betrachtungen folgt offenbar, dass die den Ebenen eines Parallelebenenbüschels zugeordneten Punkte auf einer mit der Doppelgeraden d parallelen Geraden f liegen, wie auch, dass die den Punkten einer mit der Doppelgeraden d parallelen Geraden zugeordneten Ebenen parallel sind.

b) Die Ebenen τ_i einer Erzeugenden i des Plückerschen Konoids schneiden, wie gezeigt, die Torsalgeraden t_1, t_2 in den Punkten P_1^i, P_2^i, auf deren Verbindungsgeraden $p_i = P_1^i P_2^i$ die Grossachsen $P_1^i P_2^i$ der Schnittellipsen e_i mit den Ebenen τ_i liegen. Die Geraden p_i bilden ein Erzeugendensystem eines hyperbolischen Paraboloids, welches die Mittelebene α dieses Konoids in einer Geraden s schneidet, auf welcher sich die Mittelpunkte S_i der Schnittellipsen e_i befinden. Offenbar ist das Ebenenbüschel (τ_i) der Erzeugenden i der Punktreihe (S_i) auf der Geraden s perspektiv zugeordnet, also $(\tau_i) \overline{\wedge} (S_i)$. Die in den Punkten der Punktreihe (S_i) mit der Doppelgeraden d parallel stehende Geraden n_i bilden ein Geradenbüschel (n_i), das der Punktreihe (S_i) auch perspektiv zugeordnet ist, also $(n_i) \overline{\wedge} (S_i)$. Es gilt also auch $(\tau_i) \overline{\wedge} (n_i)$. Jeder Geraden n_i des Büschels (n_i) ist also eine Ebene τ_i des Büschels (τ_i) eineindeutig zugeordnet. Es sei hier auch erwähnt, dass jede Gerade $g \perp d$ mit einer Erzeugenden des Plückerschen Konoids parallel ist.

Man nehme beliebig irgendwo im Raum eine Gerade $g \parallel i$ an, wo i eine Erzeugende des Plückerschen Konoids sei. Jeder Ebene ϱ_n der Geraden g ist die mit dieser Ebene parallel liegende Ebene τ_n der Erzeugenden i zugeordnet, zu welcher in dem eben beschriebenen Büschel (n_i)

ein Strahl $n_i \parallel d$ gehört. Der Schnittpunkt R_n dieses Strahles n_i mit der ihm zugeordneten Ebene ϱ_n ist, auf Grund des vorher Ausgeführten, der dieser Ebene ϱ_n zugeordnete Punkt. Durch die Zuordnung paralleler Ebenenpaare in den Ebenenbüscheln (ϱ_n) und (τ_n) gilt offenbar $(\varrho_n) \overline{\overline{\wedge}} (\tau_n)$, Die Ebene der der Geraden g, resp. der Erzeugenden i, zugeordneten Geraden s und der Doppelgeraden d wird durch das Ebenenbüschel (ϱ_n) in einem Strahlbüschel (G) geschnitten, für welches offenbar auch $(G) \overline{\wedge} (n_i)$ gilt. Die den Ebenen ϱ_n der Geraden g zugeordneten Punkte R_n bilden demnach das Erzeugnis der projektiv zugeordneten Strahlbüschel $(G) \overline{\wedge} (n_i)$, also eine Kurve 2. Grades. Da das Strahlbüschel (n_i) einen unendlich fernen Strahl enthält, für den die im Ebenenbüschel (τ_i) zugeordnete Ebene eine Direktionsebene des Plückerschen Konoids ist, und da die der Doppelgeraden d als dem Strahl des Büschels (n_i) zugeordnete Ebene im Büschel (ϱ_n) parallel mit dieser Doppelgeraden ist, hat die erwähnte Kurve 2. Grades einen unendlich fernen Punkt auf der Doppelgeraden d, und einen anderen auf der unendlich fernen einfachen Leitgeraden l^∞ des Plückerschen Konoids. Sie ist also eine Hyperbel, deren Asymptoten senkrecht sind, d.h. es handelt sich um eine gleichseitige Hyperbel. Da sich auf der Doppelgeraden d, ausser dem unendlich fernen Punkt, kein anderer Punkt dieser Hyperbel befindet, muss offenbar diese Doppelgerade die Asymptote dieser Hyperbel sein.

Auf Grund einer bekannten Eigenschaft der Hyperbel ist es in unserem konstruktiven Vorgang leicht zu ersehen, dass die zweite, die Doppelgerade d senkrecht schneidende Asymptote der erzeugten Hyperbel, von dem Scheitelpunkt G des Büschels (G) gleich weit entfernt ist, wie die Mittelebene α von der Erzeugenden i.

Es sei i_1 die zweite den Schnittpunkt der Geraden d, i enthaltende Erzeugende des Plückerschen Konoids. Auf Grund des bisher ausgeführten gilt also das Folgende:

Die den Ebenen einer auf der Doppelgeraden d des Plückerschen Konoids senkrecht stehenden Gerade zugeordneten Punkte bilden eine gleichseitige Hyperbel, die in jener Ebene dieser Doppelgeraden liegt, die auf der der Erzeugenden i zugeordneten Erzeugenden i_1 senkrecht steht. Die Doppelgerade dieses Konoids ist eine Asymptote dieser Hyperbel, während die andere auf dieser Doppelgeraden senkrecht steht.

Auf Grund unserer Betrachtungen sehen wir, dass den mit der Doppelgeraden d parallelen Ebenen der unendlich ferne Punkt dieser Geraden zugeordnet ist.

c) *Man betrachte nun eine Gerade g, die die Doppelgerade d in einem Punkt K senkrecht schneidet.* In der Ebene dieser Geraden g und der Doppelgeraden d liegt, offenbar, auch die dieser Geraden g zugeordnete Erzeugende $i \parallel g$ dieses Plückerschen Konoids. Dieser Erzeugenden i ist, wie gezeigt, in der Mittelebene α dieses Konoids eine Gerade s zugeordnet, die mit der Doppelgeraden d eine Ebene β bestimmt. Das Ebenenbüschel (ϱ_n) der Geraden g schneidet die Ebene β im Strahlbüschel (K), das mit dem bekannten Strahlbüschel (n_i) der Punktreihe (S_i) auf der zugeordneten Geraden s nicht nur projektiv, sondern auch perspektiv zugeordnet ist, da dem Strahl d im Büschel (K) derselbe Strahl d auch im Strahlbüschel (n_i) zugeordnet ist. Das Erzeugnis dieser zwei Strahl büschel zerfällt also in zwei Geraden, von welchen eine die Doppelgerade d ist, während die andere m in der Ebene β senkrecht auf der Doppelgeraden d steht. Also, $m \parallel s \perp d$ ist. Die Gerade m ist von der Mittelebene α des Plückerschen Konoids eben so weit entfernt, wie die Erzeugende $i \parallel g$ von der Geraden g, was sehr leicht zu ersehen ist.

Auf Grund der eben ausgeführten Betrachtungen sehen wir, dass jeder Ebene der Doppelgeraden d alle Punkte dieser Geraden zugeordnet sind, und, offenbar, jedem ihrer Punkte auch alle ihre Ebenen.

d) *Man betrachte jetzt eine im Raum ganz beliebig angenommene Gerade* g. Die den Ebenen dieser Geraden, auf die eben beschriebene Weise zugeordneten Punkte, bilden auch eine Kurve, die wir jetzt untersuchen werden. Als Hilfe bei diesen Betrachtungen werden wir folgende bekannte Eigenschaften des Plückerschen Konoids benützen: 1) Für jede Ellipse des Plückerschen Konoids besteht ausser der orthogonalen Projektion auf die Mittelebene α dieses Konoids in einen Kreis noch eine Richtung, in welcher sich diese Ellipse in diesen Kreis parallel projiziert. Für jede Richtung im Raum besteht auch eine derartige Ellipse. 2) Nimmt man auf einem Plückerschen Konoid alle mit einer Geraden g parallelen Berührungsebenen, und die in diesen Ebenen sich befindenden Ellipsen dieses Konoids, dann liegen die Mittelpunkte der orthogonalen Projektionen dieser Ellipsen auf die Mittelebene α dieses Konoids auf demjenigen Kreis e' in dieser Ebene, in welchen sich eine Ellipse e dieses Konoids in der Richtung der Geraden g projiziert. Die Ellipse e liegt in einer Ebene derjenigen Erzeugenden i des Konoids, für welche $i \perp g$ gillt. Es sei h die Höhe des Plückerschen Konoids, r der Halbmesser der Kreisprojektion e' der Ellipse e auf die Mittelebene und φ der Neigungswinkel der Geraden g mit dieser Mittelebene. Es gilt dann $h/2 : 2\,r = \operatorname{tg} \varphi$, resp. $r = 0{,}25\, h \operatorname{cotg} \varphi$.

Zu jeder Ebene der Geraden g ist eine Berührungsebene des Plückerschen Konoids parallel. Auf Grund dessen folgt, dass jeder Ebene der Geraden g eine Ellipse des Konoids, also auch ein Punkt E des Kreises e' zugeordnet ist. Offenbar sind auf diese Weise die Kreispunktreihe (E) auf dem Kreis e' und das Ebenenbüschel (g) eineindeutig zugeordnet. Auf Grund unser vorher ausgeführten Betrachtungen und der Tatsache, dass in jeder Ebene der Geraden g eine die Doppelgerade d schneidende Gerade $t \perp d$ besteht, folgt, dass die Verbindungsgeraden der Punkte E_i des Kreises e' mit dem Schnittpunkt D der Doppelgeraden d mit der Mittelebene α die den Ebenen der Geraden $t_i \perp d$ zugeordneten, vorher beschriebenen, Geraden s_i sind. Da das Geradenbüschel (s_i) dem Ebenenbüschel (dt_i) aller Geraden $t_i \perp d$ projektiv zugeordnet ist, folgt, dass auch die Kreispunktreihe (E_i) des Kreises e' dem Ebenenbüschel (g) der Geraden g projektiv zugeordnet ist. Da weiterhin die allen parallelen Ebenen zugeordneten Punkte auf Geraden liegen, die parallel mit der

Doppelgeraden d im Raum sind, folgt, dass die den Ebenen der Geraden g zugeordneten Punkte auf einer Raumkurve 3. Ordnung liegen, die als Erzeugnis des Ebenenbüschels (g) und des quaratischen Strahlbüschels der Erzeugenden des Kreiszylinders des Kreises e' erscheint. Man sieht also, dass die den Ebenen irgend einer Geraden des Raumes auf die betreffende Weise der Quasi-Nullraumabbildung zugeordneten Punkte eine Raumkurve 3. Ordnung bilden. Der Kreiszylinder des Kreises e' berührt offenbar diejenige Ebene der Doppelgeraden d, die diejenige Erzeugende i_1 des Konoids enthält, welche mit der Erzeugenden $i \perp g$ auf der Doppelgeraden d einen gemeinsamen Punkt hat. Dass $g' \perp i$ auf der Mittelebene des Plückerschen Konoids gelten muss, ist leicht zu ersehen.

e) *Man nehme jetzt die Gerade g im Raum so an, dass sie die Doppelgerade d im Punkt G schneidet, aber nicht rechtwinkelig.* Auch dieser Geraden g ist auf dem Plückerschen Konoid eine Ellipse e zugeordnet, die sich auf die Mittelebene α in den bekannten Kreis e' projiziert. Auch hier ist das Ebenenbüschel (g) der Punktreihe (E_i) auf dem Kreis e' projektiv zugeordnet. Da aber in jener Ebene des Büschels (g), die die Doppelgerade d enthält, eine Erzeugende des Plückerschen Konoids liegt, ist dieser Ebene auf dem Kreis e' ihr Schnittpunkt mit diesem Kreis zugeordnet. Also, die dieser Ebene im Büschel (g) zugeordnete Erzeugende des Kreiszylinders des betreffenden Kreises e' (die Doppelgerade d), befindet sich in dieser Ebene. Auf Grund dessen folgt, dass die vorher beschriebene Raumkurve 3. Ordnung in die Doppelgerade d und in einen Kegelschritt auf dem erwähnten Kreiszylinder zerfällt. Offenbar ist es eine Ellipse, die demnach auch die Doppelgerade d schneidet.

IV. *Der geometrische Ort der den Punkten einer Geraden zugeordneten Ebenen.*

a) Wie schon vorher gezeigt, bilden die den Punkten einer Geraden $g \perp d$ zugeordnete Ebenen ein Parallelebenenbüschel, dessen Lage im Raum, wie wir sahen, sehr leicht zu bestimmen ist.

b) *Es sei im Raum eine Gerade g beliebig angenommen, deren orthogonale Projektion auf die Mittelebene α des Plückerschen Konoids mit g′ bezeichnet sei.* Jedem Punk P auf der Geraden g gehört seine Projektion P' auf der Geraden g'. Die einem Punkt P' der Geraden g' auf die beschriebene Weise zugeordnete Ebene π ist, wie gezeigt, durch die den Punkt P' enthaltende Transversale p der Torsalgeraden t_1, t_2, und durch die diese Transversale senkrecht schneidende Erzeugende i dieses Plückerschen Konoids, gegeben. Eine den Punkt P' enthaltende Gerade $i_1 \parallel i$ liegt offenbar auch in dieser Ebene π. Die die Geraden g', t_1 und t_2 schneidenden Transversalen p_i bilden ein Erzeugendensystem eines hyperbolischen Paraboloids, weil diese drei Geraden in drei untereinander parallelen Ebenen (Direktionsebenen) liegen. Die Geraden g', t_1, t_2 gehören als Erzeugenden dem zweiten System dieses hyperbolischen Paraboloids. Jeder Punkt P_i der Gerade g' enthält eine Erzeugende des ersten Systems dieses hyperbolischen Paraboloids, und alle diese Erzeugenden des ersten Systems schneiden die unendlich ferne Erzeugende des zweiten Systems dieses hyperbolischen Paraboloids in einer Punktreihe, die mit (k_n) bezeichnet sei. Jeder Punkt P'_i der Geraden g' enthält in der Mittelebene α eine entsprechende, vorher beschriebene Gerade i_1^i ($\parallel i^i$), und alle diese Geraden i_1^i der Punkte P'_i schneiden die unendlich ferne Leitgerade l^∞ des Plückerschen Konoids in einer Punktreihe (l_n). Auf Grund der Tatsache, dass für jeden Punkt P_i der Geraden g und die diesem Punkt zugeordneten Geraden p_i und i'_i die Tatsache $p_1 \perp i_1$ gilt, folgt, dass durch jeden Punkt P_i der Geraden g nicht nur ein Paar zugeordneter Punkte der Punktreihen (k_n) und (l_n) bestimmt ist, sondern dass für diese zwei Punktreihen auch $(k_n) \overline{\wedge} (l_n)$ gilt. Die Verbindungsgeraden der Paare zugeordneter Punkte dieser zwei Punktreihen umhüllen also in der unendlich fernen Ebene eine Kurve r^∞ zweiter Klasse. Offenbar, bilden auf Grund des eben Ausgeführten die den Punkten P'_i der Gerade g' zugeordneten Ebenen eine Torse 3. Klasse. Man lege durch die den Punkten P'_i zugeordneten Punkte P_i der Geraden g derartige Ebenen π_1^i, dass diese in jedem Punkt P_i parallel mit der entsprechenden Ebene $(l_i\, i_1^i)$ sind, also $\pi_1^i \parallel \pi^i$ ist. Da die Punktreihe P'_i der Geraden g' der Punktreihe P_i der Geraden g nicht nur projektiv, sondern auch perspektiv zugeordnet ist $(P_i P'_i \parallel d)$, folgt, dass die den Punkten P_i der Geraden g zugeordneten Ebenen π_1^i auch eine kubische Torse umhüllen, die als das Erzeugnis der projektiv zugeordneten Punktreihe (P_i) der Geraden g und des unendlich fernen Geradenbüschels 2. Ordnung r^n bestimmt ist. Man sieht also, dass jeder Raumpunkt drei Ebenen enthält, deren auf die beschriebene Weise zugeordnete Punkte auf einer gegebenen Geraden des Raumes liegen.

c) *Man nehme an, dass die Gerade g die Doppelgerade d schneidet.* Die entsprechende Projektion g' in der Mittelebene α des Konoids schneidet die Doppelgerade d in dem bekannten Punkt D. Da auf Grund der vorher ausgeführten Eigenschaften unserer Quasi-Nullraumabbildung die den Punkten dieser Geraden g zugeordneten Ebenen parallel zu jener Erzeugenden i des Plückerschen Konoids sind, für welche $i \parallel g'$ gilt, folgt, dass sich das unendlich ferne Geradenbüschel r^∞ 2. Ordnung in ein Geradenbüschel 1. Ordnung zusammenzieht, mit dem gemeinsamen unendlich fernen Punkt der Geraden g', i als Scheitel. Das Erzeugnis der Punktreihe (P_i) der Geraden g und dieses ihr projektiv zugeordneten unendlich fernen Geradenbüschels ist also ein Zylinder 2. Grades. Es folgt also, dass die den Punkten einer die Doppelgerade d schneidenden Geraden zugeordneten Ebenen einen Zylinder 2. Grades, resp. eine Torse 2. Klasse bilden. Jeder Raumpunkt P enthält also zwei Ebenen, deren zugeordnete Punkte auf einer die Doppelgerade d schneidenden Geraden g liegen. Dem Schnittpunkt der Geraden g, d ist, wie bekannt, die Ebene des Punktes P und dieser Doppelgeraden zugeordnet.

Die vorher ausgeführte Torse 3. Klasse einer beliebig angenommenen Geraden g zerfällt also hier in eine Torse 2. Klasse und in das Ebenenbüschel der Doppelgeraden d.

d) *Es sei jetzt die Gerade g eine auf der Doppelgeraden d senkrecht stehende Gerade.* Auf Grund der Tatsache, dass für die Projektion g' in der Mittelebene des Plückerschen Konoids $g' \parallel g$ gilt, und dass durch die Projektion g' in der Abt. IV. b) die dort beschriebene ihr zugeordnete Torse 3. Klasse bestimmt ist, folgt, dass die den Punkten der Geraden $g \perp d$ zugeordnete Torse kongruent und homothetisch mit jener ist, die den Punkten der Gerade g' zugeordnet ist. Man bekommt die der Geraden g zugeordnete Torse so, dass man die der Geraden g' zugeordnete Torse in der Richtung der Doppelgeraden d so verschiebt, dass die Gerade g' in die Gerade g fällt.

e) *Man nehme nun an, dass die Gerade g die Doppelgerade d schneidet und in der Mittelebene des Plückerschen Konoids liegt,* also $g \equiv g'$ ist. Dass die den Ebenen einer Erzeugenden i des Plückerschen Konoids zugeordneten Punkte in der Mittelebene auf einer die Doppelgerade d schneidenden Geraden s liegen, sahen wir schon in der Abt. III. b). Jeder Erzeugenden i^n ist auf diese Weise eine derartige Gerade s^n in der Mittelebene zugeordnet. Das Geradenbüschel (i_n') der Projektionen der Erzeugenden i^n des Konoids auf die Mittelebene ist mit dem kollokalem Büschel (s^n) der diesen Erzeugenden i^n zugeordneten Geraden s^n in dieser Ebene nicht nur projektiv, sondern auch involutorisch zugeordnet. Nimmt man jetzt die Gerade $g \equiv g'$ als eine Gerade s an, dann bilden, wie gezeigt, die den Punkten dieser Geraden zugeordneten Ebenen das Ebenenbüschel einer Erzeugenden i des Plückerschen Konoids.

f) Es soll jetzt die Gerade g die Doppelgerade d, irgendwo ausserhalb der Mittelebene, senkrecht schneiden .Auf Grund der Tatsache dass die den Ebenen einer die Doppelgerade d senkrecht schneidenden Geraden g zugeordneten Punkte auf einer Geraden m liegen, die die Doppelgerade d auch senkrecht schneidet, und diese zwei Geraden sich in einer gewissen ein-eindeutigen, oben beschriebenen Zuordnung befinden, folgt offenbar auch, dass die den Punkten einer die Doppelgerade d senkrecht schneidenden Geraden zugeordneten Ebenen, ein Ebenenbüschel bilden, dessen Achse die Doppelgerade d senkrecht schneidet.

V. *Der geometrische Ort der den Ebenen eines Raumpunktes P zugeordneten Punkte.*

a) Auf Grund der in der Abt. IV b) ausgeführten Eigenschaft, dass die den Punkten einer beliebig angenommenen Geraden zugeordneten Ebenen eine Torse 3. Klasse bilden, also auf dieser Geraden sich drei Punkte befinden, denen die ihnen zugeordneten Ebenen einen bestimmten Raumpunkt enthalten, folgt, dass der geometrische Ort der den ∞^2

Ebenen eines Raumpunktes P zugeordneten Punkte eine Fläche bilden, welche jede Gerade des Raumes in drei Punkten schneidet. Es handelt sich also um eine Fläche 3. Ordnung. Es gilt also folgender Satz:

Schneidet man das Plückersche Konoid mit den Ebenen eines Raumpunktes, dann projizieren sich die Schnittkurven parallel mit dessen Doppelgeraden auf eine Direktionsebene in zirkuläre Kurven 3. Ordnung. Diejenigen Punkte in diesen Schnittebenen, die sich in die vierfachen Brennpunkte dieser zirkulären Projektionen projizieren, bilden eine Fläche 3. Ordnung.

b) Es seien alle Ebenen eines Raumpunktes R in ∞^1 derartiger Ebenenbüschel verteilt, deren Achsen auf der Doppelgeraden d des Plückerschen Konoids senkrecht stehen. Die den Ebenen eines jeden dieser Ebenenbüschel zugeordneten Punkte bilden, wie vorher gezeigt, eine Hyperbel, und für alle diese Hyperbeln ist die Doppelgerade d eine Asymptote, während die zweite Asymptote in einem bestimmten Punkt die Doppelgerade d senkrecht schneidet.

Man sah in der Abt. III. c), dass die den Ebenen einer die Doppelgerade d senkrecht schneidenden Geraden des Punktes R zugeordneten Punkte auf einer Geraden $m \perp d$ liegen, die die Doppelgerade d auch schneidet. In der Ebene (md) zerfällt also die Hyperbel in die Doppelgerade d und in die Gerade m. Man sieht also, dass die den Ebenen eines Raumpunktes R durch das Plückersche Konoid auf die beschriebene Weise zugeordneten Punkte eine derartige Fläche 3. Ordnung bilden, die durch die Ebenen der Doppelgeraden d in Hyperbeln geschnitten wird, und diese Doppelgerade ist eine einfache Gerade dieser Fläche.

Ausser der Geraden d und der Geraden m enthält diese Fläche 3. Ordnung, die mit F^3 bezeichnet sei, auch die unendlich ferne einfache Leitgerade l^∞ des Plückerschen Konoids.

Jede Ebene der Geraden d schneidet, wie gezeigt, die Fläche F^3 in dieser Geraden d und in einer Hyperbel, für welche die Gerade d eine Asymptote ist. In der Ebene der Geraden d und m zerfällt diese Hyperbel, wie wir eben sahen, in diese zwei Geraden. Da die Schnittkurve der Fläche F^3 mit dieser Ebene eine zerfallene Kurve 3. Ordnung sein muss, die aber nur aus den Geraden d und m besteht, und die Gerade m eine einfache Gerade der Fläche F^3 ist, muss die Doppelgerade d als ein zweideutiger Teil zu dieser zerfallenen Schnittkurve gehören. Also, diese Ebene (dm) berührt längs der Doppelgerade d die Fläche F^3.

Wie vorher gezeigt, berühren die in den Ebenen der Doppelgeraden d liegendn Hyperbeln der Fläche F^3 in ihren auf der unendlich fernen Leitgeraden l^∞ des Plückerschen Konoids liegenden Punkten derartige Geraden (Asymptoten), die die Doppelgerade d senkrecht schneiden, und alle diese Hyperbeln berühren die Doppelgerade d in ihrem unendlich fernen Punkte. Da die Doppelgerade d die Hyperbeln aller ihrer Ebenen unendlich fern berührt, hat also die Fläche F^3 einen unendlich fernen Doppelpunkt, in welchem sie durch die Doppelgerade d berührt wird. Auf diese Weise sind in diesem unendlich fernem Doppelpunkt zwei gewöhnliche Doppelpunkte der Fläche F^3 zusammengefallen, also muss dieser Doppelpunkt als ein zweideutiger Doppelpunkt dieser Fläche angenommen werden. Die Doppelgerade d des Plückerschen Konoids ist die Verbindungsgerade dieser zwei unendlich nahen Doppelpunkte, und muss deswegen als eine vierfache Gerade der Fläche F^3 gezählt werden.

c) Auf Grund der bekannten Eigenschaft jeder Hyperbel, dass jede Gerade der Ebene einer Hyperbel diese Hyperbel und ihre Asymptoten in Punktepaaren schneidet, wo die Entfernung eines Schnittpunktes der Hyperbel von dem Schnittpunkt auf der Asymptote gleich der Entfernung der zwei analogen anderen Schnittpunkte ist, gilt, wie schon vorher erwähnt, die Tatsache, dass die Entfernung der zweiten Asymptote ($\perp d$) von dem vorher beschriebenen Scheitel G des Strahlbüschels (G) immer der Entfernung der Erzeugenden i von der Mittelebene α gleich ist. Dies gilt offenbar für alle Geraden $g \perp d$ des Raumpunktes R.

Da weiterhin bekannt ist, dass jeder Punkt der Doppelgeraden d eines Plückerschen Konoids zwei seiner Erzeugenden enthält, folgt, dass in einer Direktionsebene dieses Konoids nicht nur eine, sondern noch eine zweite Asymptote ($\perp d$) einer in einer Ebene der Doppelgeraden d befindlichen Hyperbel der Fläche F^3 liegt. Also, jede derartige die unendlich ferne Leitgerade l^∞ enthaltende Ebene, berührt die Fläche F^3 in zwei ihrer Punkten auf dieser unendlich fernen Geraden l^∞. Sie schneidet die Fläche F^3 offenbar auch in einer Hyperbel, weil diese Schnittkurve der Fläche F^3 mit dieser Ebene die zwei eben erwähnten, unendlich fernen Punkte enthält. Der in der Direktionsebene des Raumpunktes R liegende Kegelschnitt c der Fläche F^3 ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu den in der Mittelebene α des Plückerschen Konoids sich befindenden Erzeugenden parallel sind, und die durch die bekannten Scheitel G der Strahlbüschel (G) aller Geraden $g \perp d$ des Punktes R gebildet ist.

Auf Grund der Tatsache, dass die zugeordneten, vorher beschriebenen Strahlenpaare i', s in der Mittelebene α involutorisch zugeordnet sind, folgt, dass die Berührungsgerade der Hyperbel c in dem Punkt R zur Ebene (dm), resp. der Geraden m, parallel liegen muss.

In der Direktionsebene der Geraden m zerfällt offenbar diese Hyperbel der Fläche F^3 in diese Gerade m und in noch eine Gerade n irgendwo in dieser Ebene, die den zweiten unendlichfernen Berührungspunkt dieser Direktionsebene und der Fläche F^3 enthält. Offenbar wird die Gerade n durch die Schnittpunkte der Direktionsebene der Geraden m mit den Hyperbeln in den die Doppelgerade d enthaltenden Ebenen gebildet, und steht senkrecht auf derjenigen Erzeugenden des Plückerschen Konoids, die in der Ebene des Punktes R und der Doppelgeraden d sich befindet.

d) Man verteile jetzt die Ebenen des Raumpunktes R in ∞^1 Ebenenbüschel, deren Achsen g die Doppelgerade d schneiden. Auf Grund des in der Abt. III. e) ausgeführten sehen wir, dass die den Ebenen eines derartigen Büschels zugeordneten Punkte einen Kegelschnitt e bilden, weil auf dieser Doppelgeraden der Punkt liegt, der auf dem betreffenden Kreis e' der Ebene dieses Büschels zugeordnet ist, welche die Doppelgerade d enthält. Dies gilt offenbar für alle derartige Ebenenbüschel des Punktes R, deren Achsen g die Doppelgerade d schneiden.

Die Ebene (Rd) befindet sich in jedem diesem Ebenenbüschel, und in dieser Ebene liegt, wie in Abt. III. e) gezeigt, eine Erzeugende i des Plückerschen Konoids. Dieser Erzeugenden i ist in der Mittelebene α dieses Konoids ein Strahl s zugeordnet, auf welchem die Mittelpunkte der Schnittellipsen dieses Plückerschen Konoids mit den Ebenen der Erzeugenden i liegen. Da diese Mittelpunkte auch Mittelpunkte der orthogonalen Projektionen dieser Ellipsen auf die Mittelebene α sind, folgt, dass die diesen Ebenenbüscheln zugeordneten Kreise e', resp. ihre die Doppelgerade d enthaltenden Kreiszylinder, durch dieselbe Ebene längs der Doppelgerade d berührt werden. Alle derartigen, auf den betreffenden Zylindern der Kreise e_n' liegenden Kegelschnitte, offenbar Ellipsen, bilden auch unsere eben entdeckte Fläche F^3, da jede Ebene des Punktes R in einem der beschriebenen Büschel (g) des Punktes R liegt.

Eine der die Doppelgerade d schneidenden Geraden g des Punktes R steht auf dieser Geraden d senkrecht. In der Abt. III c) sahen wir, dass die den Ebenen dieser Geraden zugeordneten Punkte auf einer Geraden m liegen, die die Gerade d senkrecht schneidet. Also, ein dem Ebenenbüschel einer derartigen Geraden g zugeordneter Kegelschnitt zerfiel in die Gerade m, und in noch eine Gerade a, die auch auf der Fläche F^3 liegt.

In der Ebene eines jeden Kegelschnittes einer Fläche 3. Ordnung liegt immer noch eine Gerade dieser Fläche. Die den ∞^1 speziellen (g_n) Ebenenbüscheln des Raumpunktes R zugeordneten Kegelschnitte bilden eine eindimensionale stetige Kegelschnittmenge, durch welche die betrachtete Fläche F^3 auch gebildet wird. Wie bekannt, bilden die Ebenen einer derartigen Kegelschnittmenge einer Fläche 3. Ordnung ein Ebenenbüschel, dessen Achse auch auf dieser Fläche liegt. Dass diese Achse der betrachteten Fläche F^3 in der Direktionsebene der Geraden m liegen muss, ist offenbar. Denn, wenn dem nicht so wäre, müsste diese ganze Direktionsebene zu der Fläche F^3 gehören.

Wie vorher erwähnt, liegen die Punkte die den Ebenen der die Doppelgerade d schneidenden Geraden $g \perp d$ zugeordnet sind, auf der Geraden m, die die Gerade d senkrecht schneidet, also in einer Direktionsebene des Plückerschen Konoids liegt. In dieser Direktionsebene befinden sich die Geraden m, n und l^{∞}, von welchen eine die erwähnte Achse sein muss. Die Gerade l^{∞} fällt aus, da ihre Ebenen die Fläche F^3 in Hyperbeln schneidet.

Da die Ellipsen e_n welche den die Doppelgerade d schneidenden Geraden g auf die beschriebene Weise zugeordnet sind, auf demjenigen Kreiszylindern sich befinden, welche den diesen Geraden g_n zugeordneten Kreis e_n' enthalten, und alle diese Kreiszylinder die Ebene (dm)

längs der Geraden d berühren, folgt, dass alle betreffenden Kreise e'_n, als Projektionen der Ellipsen e_n, die Projektion m' in der Mittelebene α des Plückerschen Konoids in dem Punkt D der Geraden d berühren. Dies aber ist nur dann möglich, wenn die vorher besprochene Achse mit der Geraden n in der Direktionsebene der Geraden m identisch ist. Die Fläche F^3 ist also auch das Erzeugnis des Ebenenbüschels (n) und des Kreiszylinderbüschels der längs der Doppelgeraden d die Fläche F^3 berührenden Kreiszylinder.

Der Möglichkeit, dass die Gerade m die Achse des Ebenenbüschels (n) sein könnte, widerspricht auch die Form der Fläche F^3, die durch die in den Ebenen der Gerade d liegenden Hyperbeln gebildet wird.

e) *Die Art der kubischen Fläche* F^3. Man sah eben, dass die Fläche F^3 als Erzeugnis des Ebenenbüschels (n) und eines Flächenbüschels 2. Grades angenommen werden kann. Das Flächenbüschel 2. Grades wird, wie erwähnt, von Kreiszylindern gebildet, die zwei unendlich nahe Erzeugenden längs der Doppelgeraden d, also eine gemeinsame Berührungsebene längs dieser Doppelgeraden, haben, und ein Paar gemeinsamer isotroper Erzeugender enthalten. Da die durch dieses Flächenbüschel 2. Grades erzeugte Fläche[3] dessen zerfallene Grundkurve enthalten muss, sehen wir, dass die Fläche F^3 eines Plückerschen Konoids dessen isotrope unendlich ferne Erzeugenden, dann dessen Doppelgerade d und dessen uneigentliche Leitgerade l^∞ enthält. Offenbar nebst den Geraden m und n, die nicht auf dem Plückerschen Konoid liegen.

Jeder Ebene γ der Achse n ist einer der erwähnten Kreiszylinder des Flächenbüschels zugeordnet. Dies gilt offenbar auch für die Ebene $\gamma \parallel d$. Diese Ebene γ schneidet den ihr zugeordneten Zylinder in zwei Erzeugenden r_1, r_2, die offenbar auch auf der Fläche F^3 liegen, und den doppeldeutigen unendlich fernen Doppelpunkt enthalten.

Wie vorher ausgeführt worden war, berührt die Doppelgerade d die Schnitthyperbeln ihrer Ebenen mit der Fläche F^3 in ihrem unendlich fernem Punkt. Dieser Punkt ist, wie gezeigt, als ein zweideutiger Doppelpunkt der Fläche F^3 angenommen worden, in welchem zwei gewöhnliche Doppelpunkte zusammengefallen sind, die auf der Doppelgerade d liegen. Diese Gerade ist also, wie schon erwähnt, eine vierdeutige Gerade der Fläche F^3. Die zwei vorher erwähnten Geraden $r_1 \parallel d$ und $r_2 \parallel d$, die die Gerade n schneiden, enthalten, wie wir eben sahen, den unendlich fernen zweideutigen Doppelpunkt der Fläche F^3. Da jede Gerade einer Fläche 3. Ordnung, die einen ihrer Doppelpunkte enthält, als eine zweideutige Gerade dieser Fläche angenommen werden muss, müssten die zwei isotropen unendlich fernen Geraden und die Geraden r_1, r_2 zweideutige Geraden dieser Fläche sein, wenn der unendlich ferne Doppelpunkt ein eindeutiger wäre. Da er aber ein zweideutiger Doppelpunkt ist, müssen diese vier Geraden der Fläche F^3 als vierdeutige gezählt werden.

Jede der in den Ebenen der Geraden d befindlichen Hyperbeln schneidet die Gerade n in einem Punkt, resp. jeder Punkt dieser Geraden enthält eine dieser ∞^1 Hyperbeln. Jede Ebene der Geraden n schneidet die Fläche F^3 in einer Ellipse, da dieser Kegelschnitt zwei unendlich ferne konjugiert imaginäre Punkte auf den isotropen Geradenpaar der Fläche F^3 hat. In der vorher erwähnten Ebene $(r_1 r_2) \parallel d$ zerfällt diese Ellipse in die erwähnten Geraden r_1, r_2. Da aber die den Punkten der Geraden r_1, r_2 zugeordnete Ebenen, wenn diese Geraden reell wären, Büschel paralleler Ebenen bilden, die also nicht alle den der Fläche F^3 zugeordneten Punkt P enthielten, müssen die Geraden r_1, r_2 konjugiert imaginär sein.

Die Ebenen der Geraden m schneiden die Fläche F^3, aus denselben Gründen wie bei der Geraden n, in Ellipsen, die sich in der Richtung der Geraden d auf die Mittelebene α des Konoids in Kreise projizieren. Da alle diese Ellipsen die zwei konjugiert imaginären Geraden r_1, r_2 schneiden, enthalten die Kreise ihrer Projektionen auf der Mittelebene α dieselben zwei konjugiert imaginären Punkte, die auf der Geraden n als Doppelpunkte einer elliptisch involutorischen Punktreihe bestimmt sind. Wie bekannt, zerfallen zwei in diesem Kreisbüschel sich befindende Kreise in zwei konjugiert imaginäre (isotrope) Geraden, deren reelle Schnittpunkte die Laguerreschen Punkte der erwähnten elliptischen Involution auf der Geraden n sind. Es bestehen also zwei Ebenen der Gerade m, die die Fläche F^3 in zwei Gerade zerfallenen Kegelschnitten schneiden. Eine dieser Ebenen enthält offenbar die Doppelgerade d des Plückerschen Konoids, längs welcher die Fläche F^3 durch diese Ebene berührt wird, also fallen diese zwei Geraden in dieser Ebene zusammen. Die andere Ebene berührt die Fläche F^3 im Schnittpunkt zwei ihrer weiteren Geraden, die offenbar in dieser Ebene liegen. Die bisher als vierdeutig betrachtete Gerade d muss also jetzt als sechsdeutige angenommen werden, während die zwei letzten als eindeutige bleiben. Diese zwei letzten eindeutigen Geraden sind konjugiert imaginär, und liegen in der Berührungsebene der Fläche F^3 in ihrem Grundpunkt P, in welchem sich diese zwei konjugiert imaginären Geraden schneiden. Dass diese Berührungsebene die Gerade m enthält, folgt auf Grund der Tatsache, dass die Berührungsgerade der in der Direktionsebene des Punktes P liegenden Hyperbel der Fläche F^3 parallel zur Geraden m ist, und auf Grund der in der Abt. II. b) ausgeführten und hier leicht bemerkbaren Tatsache, dass die Berührungsgerade im Punkt P der in der Ebene (Pd) liegenden Hyperbel der Fläche F^3 die Doppelgerade d im gemeinsamen Punkt M mit der Geraden m schneidet. Dass die zwei im Punkt P sich schneidenden Geraden der Fläche F^3 konjugiert imaginär sind, folgt offenbar aus der Tatsache, dass ihre Projektionen auf die Direktionsebene der Geraden m ein isotropes Geradenpaar bilden. Wird die Projektion des Punktes P auf die Direktionsebene der Geraden m mit $\overline{P}$ bezeichnet, folgt offenbar, dass die Gerade n die Symmetriegerade der Strecke $M\overline{P}$ in dieser Ebene ist.

Die Fläche F^3 hat also eine sechsdeutige und drei eindeutige reelle Geraden, dann vier vierdeutige und zwei eindeutige konjugiert imaginäre Gerade. Auf der Fläche F^3 haben wir also alle 27 Geraden, wie es auch sein muss, entdeckt.

VI. *Der geometrische Ort der den Punkten einer Ebene zugeordneten Ebenen.*

Aus der in der Abt. IV. b) ausgeführten Eigenschaft folgt, dass die den Punkten einer Geraden auf die beschriebene Weise durch das Plückersche Konoid zugeordneten Ebenen eine Torse 3. Klasse bilden. Mittels dieser Eigenschaft wurde die Tatsache bewiesen, dass die den Ebenen eines Punktes P, auf die erwähnte Weise, zugeordneten Punkte eine Fläche F^3 dritter Ordnung bilden.

In der Abt. III. d) sah man, dass die den Ebenen einer Geraden auf dieselbe Weise zugeordneten Punkte eine Raumkurve 3. Ordnung bilden. Es sei jetzt im Raum eine Ebene ϱ gegeben. Ebenso sei auch ganz beliebig im Raum eine Gerade g angenommen. Die den Ebenen dieser Geraden zugeordneten Punkte bilden, wie eben erwähnt, eine Raumkurve 3. Ordnung, die die Ebene ϱ in drei Punkten schneidet. Also, die Gerade g enthält drei Ebenen, für welche die drei zugeordneten Punkte in der Ebene ϱ liegen. Dies gilt offenbar für jede Gerade des Raumes. Betrachtet man jetzt alle Geraden eines Raumpunktes R, so folgt offenbar, dass jede Gerade dieses Punktes R drei Ebenen enthält, für welche die zugeordneten Punkte in der Ebene ϱ liegen. Alle derartigen Ebenen des Punktes R hüllen also einen Kegel dritter Klasse um. Da dies für jeden Raumpunkt gilt, folgt der Satz:

Die den Punkten einer Ebene ϱ durch ein Plückersches Konoid zugeordneten Ebenen bilden eine stetige zweidimensionale Ebenenmannigfaltigkeit, in welcher die einen Raumpunkt enthaltenden Ebenen einen Kegel 3. Klasse einhüllen. Also wird diese Mannigfaltigkeit durch die Berührungsebenen einer Fläche 3. Klasse gebildet.

Diese Fläche 3. Klasse wird aber in dieser Arbeit nicht näher betrachtet. Da jedem Raumpunkt eine der beschriebenen Flächen F^3 3. Ordnung zugeordnet ist, und zu jeder Ebene des Raumes eine in dieser Abt. VI. beschriebene Ebenenmannigfaltigkeit gehört, deren Ebenen eine Fläche 3. Klasse einhüllen, und jedem Raumpunkt eine seiner Ebenen zugeordnet ist, sehen wir, dass jedem derartigen Punkt-Ebenen-Paar im Raum ein Paar derartiger Flächen zugeordnet ist. Also, durch jedes Plückersche Konoid sind im Raum ∞^3 derartiger Flächenpaare bestimmt. Im Zusammenhang mit der erwähnten Fläche 3. Klasse wäre es sicher interessant auch diese Flächenpaare weiter zu untersuchen, was jedoch hier nicht geschehen soll.

LITERATUR

Müller-Krames: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III. Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Leipzig–Wien 1931. S. 218–220.

Institut für Mathematik
der Universität in Zagreb

Angenommen zur Veröffentlichung am 2. VI. 1972. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

VILIM NIČE

O JEDNOM PROSTORNOM KVAZINIŠTIČNOM PRESLIKAVANJU

Običan ništični prostor čine dva korelativno tako pridružena prostora da svakoj ravnini pridružena točka leži u toj ravnini i svakoj točki pridružena ravnina prolazi tom točkom. Naše prostorno kvaziništično preslikavanje je isto takvo, ali ne i korelativno. Tj. ravninama neke točke P pridružene točke neće ležati u toj točki P pridruženoj ravnini π, niti će točkama neke ravnine π pridružene ravnine prolaziti toj ravnini pridruženom točkom P.

Svaki ravninski presjek Plückerova konoida projicira se u smjeru njegova dvostrukog pravca d na neku njegovu direkcionu ravninu u cirkularnu krivulju. U četverostruko žarište te cirkularne krivulje projicira se jedna točka te presječne ravnine, koje presjek s tim konoidom se projicira u tu cirkularnu krivulju. U svakoj ravnini prostora nalazi se prema tome jedna takva točka, a bit će dokazano da svakom točkom prostora prolazi i jedna takva ravnina, koja će taj konoid sjeći u krivulji kojoj će opisana projekcija imati projekciju te točke kao četverostruko žarište. Na taj je način uspostavljeno naše kvaziništično prostorno preslikavanje.

Sve međusobno usporedne ravnine sijeku Plückerov konoid u krivuljama 3. reda, od kojih se jedna raspada u pravac (izvodnicu) i koniku (elipsu), koje neizmjerno daleki par izotropnih izvodnica tog konoida siječe u istom paru konjugirano imaginarnih točaka. Konjugirano imaginarne dirne ravnine tog konoida u tim točkama sijeku se u nekom realnom pravcu f, koji prolazi neizmjerno dalekom točkom dvostrukog pravca d tog konoida. Svaka direkciona ravnina tog Plückerova konoida siječe taj par konjugirano imaginarnih dirnih ravnina u paru izotropnih pravaca, koji se sijeku u realnom probodištu pravca f s tom direkcionom ravninom. Odavde izlazi da projekcije u smjeru dvostrukog pravca d na direkcionu ravninu svih spomenutih presječnih krivulja 3. reda s pramenom usporednih ravnina, uključivši tu i onu raspadnutu u elipsu i pravac, imaju zajednički četverostruko žarište. Spomenuta se elipsa projicira, kao što je poznato, u kružnicu, čijim središtem prema tome prolazi pravac $f \parallel d$. Iz ovog ovdje izvedenog izlazi, prema tome, ovaj stavak:

1. *Usporednim ravninama pridružene točke nalaze se na pravcu usporednom s dvostrukim pravcem d Plückerova konoida.*

Služeći se tim stavkom, kao i činjenicom da je svaki pravac $g \perp d$ usporedan s jednom izvodnicom Plückerova konoida, lako se dolazi i do ovog stavka:

2. *Ravninama nekog okomito mimosmjernog pravca na dvostrukom pravcu d pridružene točke čine istostranu hiperbolu u jednoj ravnini tog dvostrukog pravca d. Taj je dvostruki pravac i jedna njena asimptota, dok joj je druga asimptota okomita na tom dvostrukom pravcu.*

Ako pravac $g \perp d$ siječe dvostruki pravac d, nastaje u stavku 2. degeneracija, izražena ovim stavkom:

3. *Ravninama nekog pravca koji okomito siječe dvostruki pravac d pridružene točke leže na jednom pravcu koji je također okomit na dvostrukom pravcu d.*

Poznate su ovakve osobine Plückerova konoida: a) Svaka elipsa Plückerova konoida projicira se u smjeru njegova dvostrukog pravca na njegovu srednju ravninu u kružnicu. Za svaku takvu elipsu postoji u prostoru uvijek još jedan smjer usporednog projiciranja, u kom se ta elipsa projicira u tu istu kružnicu. Za svaki smjer u prostoru postoji jedna takva elipsa na Plückerovu konoidu, i za svaku elipsu Plückerova konoida postoji jedan takav smjer. b) Postavimo li izvodnicama Plückerova konoida ravnine usporedne s nekim pravcem p u prostoru, sjeći će one taj konoid u elipsama koje se na srednju ravninu tog konoida u smjeru njegova dvostrukog pravca projiciraju u kružnice, kojima središta leže na nekoj kružnici c'. Kružnica c' je netom spomenuta projekcija one elipse c Plückerova konoida, koja se i u smjeru pravca p može projicirati u kružnicu c'.

Pomoću ovih dviju osobina Plückerova konoida, kao i osobina izrečenih u stavcima 1–3, na jednostavan se način može dobiti i ovaj stavak:

4. *Ravninama bilo kakvog pravca u prostoru pridružene točke čine prostornu krivulju 3. reda, kojoj je dvostruki pravac d asimptota. Ako taj pravac siječe dvostruki pravac d, raspada se ta prostorna krivulja 3. reda u koniku i taj dvostruki pravac.*

Služeći se stavcima 1–4, kao i činjenicom da je svaka ravnina prostora usporedna s jednom izvodnicom Plückerova konoida, lako se dobiva i ovaj stavak:

5. *Točkama nekog pravca pridružene ravnine čine torzu 3. razreda. Ako taj pravac siječe koso dvostruki pravac Plückerova konoida, raspada se ta torza u torzu 2. razreda (dirne ravnine jednog valjka 2. stupnja) i pramen ravnina. Ako on siječe taj dvostruki pravac okomito, raspada se ta torza u tri pramena ravnina.*

Pomoću stavaka 2, 3 i 5 lako se dobiva prostornim razmatranjem i ovaj stavak:

6. *Svim ravninama neke točke u prostoru pridružene točke čine opću plohu 3. reda, na kojoj se nalazi neizmjerno daleka ravnalica Plückerova konoida, kao i njegov dvostruki pravac d. Duž tog pravca dira tu plohu 3. reda jedna ravnina, a u njegovoj neizmjerno dalekoj točki ima ta ploha dvostruku točku u kojoj ona sama sebe dira, dakle je ta dvostruka točka dvoznačna.*

Potanjim razmatranjem, uz pomoć stavaka 1–6, dobivene plohe 3. reda u stavku 6, dobivaju se ove njene osobine:

7. *Na kubičnoj plohi točaka pridruženih ravninama neke točke prostora nalaze se jedan šesteroznačni i tri jednoznačna realna pravca, te dva para četveroznačnih i jedan par jednoznačnih konjugirano imaginarnih pravaca. Jedan par četveroznačnih konjugirano imaginarnih pravaca je izotropan i nalazi se neizmjerno daleko.*

Sve konike ovakve plohe, kojih ravnine nisu direkcione i ne prolaze dvostrukim pravcem Plückerova konoida, projiciraju se u smjeru tog dvostrukog pravca na direkcione ravnine tog konoida u kružnice. Dakle isto kao kod tog konoida.

Iz stavka 4. gotovo neposredno proizlazi i ovaj stavak:

8. *Točkama neke ravnine pridružene ravnine čine neprekinutu dvodimenzionalnu ravninsku tvorevinu (torzu), kojoj ravnine koje prolaze jednom točkom prostora omataju stožac 3. razreda. Sve te točkama neke ravnine pridružene ravnine omataju prema tome plohu 3. razreda.*

Institut za matematiku
Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 2. lipnja 1972. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.