

**DIE DIREKTRIXKONGRUENZ DER KEGELSCHNITTE  
DES PLÜCKERSCHEN KONOIDS**

**Vilko Niče, Zagreb**

**Sonderabdruck aus**

---

**GLASNIK MATEMATIČKI 7 (27) (1972), 269—276**

## DIE DIREKTRIXKONGRUENZ DER KEGELSCHNITTE DES PLÜCKERSCHEN KONOIDS

Vilko Niče, Zagreb

*Einleitung.* Wie alle anderen Regelflächen 3. Grades enthält auch das Plückersche Konoid  $\infty^2$  Kegelschnitte, die alle, ausser der ausgearteten, Ellipsen sind. Jede dieser Ellipsen hat zwei Brennpunkte, und alle diese Brennpunkte bilden, wie bekannt, eine Fläche 6. Ordnung [1]. Jede dieser Ellipsen enthält in ihrer Ebene die Polaren ihrer Brennpunkte, also ihre Direktrizen, die eine im Raum stetige zweidimensionale Strahlmenge, also eine Strahlkongruenz, bilden.

Die imaginären Brennpunkte dieser Ellipsen haben offenbar auch imaginäre Polaren, resp. Direktrizen. In dieser Arbeit werden wir aber nur die reellen Direktrizen betrachten, während die imaginären hier nicht in Betracht gezogen werden. Der reelle Teil dieser stetigen zweidimensionalen Direktrixmenge bildet eine Strahlkongruenz, die Direktrixkongruenz der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids genannt sei. In dieser Arbeit werden wir ihre Ordnung und Klasse bestimmen, so wie auch einige ihre Eigenschaften betrachten.

**I. Die konoidale Art der Direktrixkongruenz.** Diejenige Eigenschaft des Plückerschen Konoids, die uns als Haupthilfe zur Bestimmung der Ordnung der Brennpunktsfläche der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids diene, besteht darin, dass jede Transversale der Torsalgeraden dieses Konoids die Grossachse einer Ellipse dieses Konoids ist, deren Scheitel sich auf dieser Torsalgeraden befinden [2]. Auf Grund der Tatsache dass alle Ellipsen des Plückerschen Konoids gleiche Exzentrizitäten haben, die der Hälfte der Höhe des Plückerschen Konoids gleich sind, wurde die Ordnung sechs der erwähnten Brennpunktsfläche bestimmt. Die Ebene jeder Ellipse des Plückerschen Konoids enthält eine seiner Erzeugenden, die senkrecht auf der Grossachse dieser Ellipse steht. Die reellen Direktrizen dieser Ellipse sind also parallel mit dieser in dieser Ebene liegenden Erzeugenden. Auf Grund dieser Tatsache folgt also, dass die gesuchte Direktrixkongruenz der reellen Direktrizen eine konoidale ist, deren Strahlen die einfache unendlich ferne Leitgerade des Plückerschen Konoids schneiden.

**II. Die Ordnung der Direktrixkongruenz.** Es sei  $A$  ein Punkt der Torsalgeraden  $t_1$ , und  $B$  ein Punkt der Torsalgeraden  $t_2$  des Plückerschen Konoids. Die Länge  $AB$  ist, wie bekannt, die Grossachse einer Ellipse  $e$  des Plückerschen Konoids, die die in der Ebene dieser Ellipse liegende Erzeugende  $i$  rechtwinklig schneidet. Auf der Achse  $AB$  der Ellipse  $e$  befinden sich ihre Brennpunkte  $F_1, F_2$ , wobei die Länge  $F_1F_2$  der Höhe dieses Plückerschen Konoids gleich ist. Nimmt man auf der Achse  $AB$  den Brennpunkt  $F_1$  an, und findet auf ihr den Punkt  $C$  so, dass  $(ABF_1C) = -1$  gilt, dann ist die durch den Punkt  $C$  gezogene Gerade  $d \parallel i \perp AB$  die Polare des Brennpunktes  $F_1$ , also eine Direktrix der Ellipse  $e$ . Eine gleichartige Direktrix gehört auch zum Brennpunkt  $F_2$ .

Man betrachte jetzt diejenigen Transversalen  $A_iB_i$  der Torsalgeraden  $t_1, t_2$ , deren orthogonale Projektionen  $A_i'B_i'$ , also parallel mit der Doppelgeraden dieses Konoids, auf eine Richtungsebene dieses Konoids gleich lang sind. Offenbar sind auch alle diesen Projektionen zugeordneten Achsen  $A_iB_i$  im Raum gleich. Die auf diesen Achsen  $A_iB_i$  sich befindenden Brennpunkte  $F_1^i, F_2^i$  sind im Raum und in der Projektion von den Scheiteln  $A_i, B_i$ , resp.  $A_i', B_i'$ , gleich entfernt, bilden also in zwei Richtungsebenen je eine Ellipse  $g_1, g_2$ , deren Achsen zu den Torsalgeraden  $t_1, t_2$  parallel liegen. In der orthogonalen Projektion einer Torsalgeraden auf eine Richtungsebene enthält eine derartige Projektion einer dieser Ellipsen die grosse, und die andere die kleine Achse. Auf Grund der vorher ausgesprochenen Eigenschaften des Plückerschen Konoids folgt weiter, dass die den Brennpunkten  $F_1^i$  auf den Achsengeraden  $A_iB_i$  zugeordneten Punkte  $C_i$  auch eine Ellipse  $f$  bilden, und ihre genannten Projektionen auf einer Ellipse  $f'$  liegen, wobei diese zwei Ellipsen  $f, f'$  kongruent sind und homothetisch liegen. Die Projektionen  $A_i'B_i'$  der im Raum gleichen Achsen sind auch gleich, hüllen also eine regelmässige Astroide ein, und auf jeder Erzeugenden  $i_n$  des Plückerschen Konoids sind zwei derartige Achsen  $A_iB_i$  senkrecht gestellt. Die Direktrizen  $d_i$  der Ellipsen  $e_i$  sind also derartige Verbindungsgeraden der Punkte der unendlich fernen einfachen Leitgeraden des Plückerschen Konoids mit den Punkten der Ellipse  $f$ , die einen Punkt der unendlich fernen Leitgeraden mit zwei Punkten der Ellipse  $f$ , und jeden Punkt der Ellipse  $f$  mit einem Punkt der unendlich fernen Leitgeraden verbinden. Auf Grund des Chaslesschen Korespondenzprinzipes hüllen alle derartigen Verbindungsgeraden in der Ebene der Ellipse  $f$  eine Kurve  $(2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = 4$ . Klasse ein.

Alle Transversalen der Torsalgeraden  $t_1, t_2$  des Plückerschen Konoids können in  $\infty^1$  derartige eben betrachtete Gruppen verteilt werden, wo in jeder solchen Gruppe alle Grossachsen auf den Transversalen dieser Gruppe gleich lang sind, und deshalb auch ihre orthogonalen Projektionen auf eine Richtungsebene gleich lang sind, weil alle diese Transversalen einer derartigen Gruppe

gleich geneigt zu dieser Direktionsebene sind. Jede derartige Transversal- resp. Grossachsengruppe bestimmt ein Ellipsenpaar  $g_1, g_2$ , wo alle derartige Ellipsenpaare die bekannte Brennpunktfläche der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids bilden. Durch das Ellipsenpaar  $g_1, g_2$  ist, wie wir sahen, auch das andere Ellipsenpaar  $f_1, f_2$  bestimmt, wo alle solche Ellipsenpaare auch eine Fläche bilden, die wir etwas später betrachten werden.

Wie wir vorher sahen, sind die Ebenen der Ellipsen  $f_1, f_2$  die Direktionsebenen des Plückerschen Konoids, und in jeder solchen Ebene ausserhalb des Plückerschen Konoids geschieht dasselbe wie in dem vorher betrachteten Fall. Die Direktrizen in den Ebenen der Ellipsen  $f_1, f_2$  der betreffenden Ellipsen des Plückerschen Konoids hüllen also eine Kurve 4. Klasse ein, und die Berührungsgerechten aller derartigen Kurven 4. Klasse bilden die gesuchte Direktrixkongruenz der Ellipsen des Plückerschen Konoids.

Da jeder Raumpunkt in einer Direktionsebene des Plückerschen Konoids liegt, in welcher sich, wenn sie sich ausserhalb der Torsalebene befindet, eine eben beschriebene reelle Kurve 4. Klasse befindet, die durch die Strahlen der Direktrixkongruenz eingehüllt wird, so folgt, dass jeder Raumpunkt ausserhalb der Torsalebene vier Strahlen der Direktrixkongruenz enthält, also diese Strahlkongruenz vierter Ordnung ist. Es ist klar, dass die vier einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieser Strahlkongruenz in Paaren auch konjugiert imaginär sein können.

Die Strahlen der Direktrixkongruenz hüllen in jeder Direktionsebene ausserhalb der Torsalebene eine reelle Kurve 4. Klasse ein, und alle derartigen Kurven bilden die Brennfläche dieser Kongruenz. Die Kuspidualpunkte des Plückerschen Konoids sind singuläre Grenzpunkte dieser Brennfläche. Diejenigen Direktionsebenen dieses Konoids, die dessen zwei reellen Erzeugenden enthalten, schneiden diese Brennfläche in einer imaginären Kurve, und die auf diese Kurve gezogenen Berührungsgerechten sind offenbar auch imaginär. Also, alle innerhalb der Torsalebene sich befindenden Strahlen der Direktrixkongruenz sind imaginär.

**III. Die Klasse der Direktrixkongruenz.** Wie gezeigt, hüllen die Direktrizen der Ellipsen des Plückerschen Konoids in jeder seiner Direktionsebenen ausserhalb seiner Torsalebene eine reelle Kurve 4. Klasse ein. Da diese Direktrixkongruenz konoidal ist, also alle ihre Strahlen die unendlich ferne Leitgerade des Plückerschen Konoids schneiden, bilden alle diejenigen dieser Strahlen, die einen Punkt dieser unendlich fernen Leitgeraden enthalten, einen Zylinder. Die Ordnung dieses Zylinders ist offenbar der Klasse der betrachteten Direktrixkongruenz gleich, da in jeder Ebene des erwähnten Punktes nur so viel Strahlen dieser Kongruenz liegen, wie die Ordnung des erwähnten Zylinders dieses Punktes beträgt.

Da aber jede Ebene des Raumes diese unendlich ferne Leitgerade in nur einem Punkt schneidet, gilt das offenbar für jede Ebene des Raumes. Es muss also, um die Klasse der betrachteten Direktrixkongruenz zu finden, die Ordnung desjenigen Direktrixzylinders bestimmt werden, dessen Spitzen auf der unendlich fernen Leitgeraden liegen, da auf diese Weise die Zahl der Strahlen der Direktrixkongruenz in jeder Ebene des Raumes bestimmt wird.

Man nehme an, dass die Doppelgerade  $d$  des Plückerschen Konoids in der Bildebene der Abb. 1. liege. Die Torsalgeraden und ihre Torsalebene projizieren sich orthogonal auf diese Bildebene in die Geraden  $t, t_1$ , während die Punkte  $K, K_1$  offenbar die Projektionen der Kuspidualpunkte sind. In den Punkt  $J$  der Geraden  $d$  projiziere sich eine Erzeugende  $i$  dieses Konoids, die senkrecht auf der Bildebene steht. Jede Ebene  $\varrho$  der Erzeugenden  $i$  steht auch senkrecht auf der Bildebene und schneidet das Konoid in einer Ellipse, die sich auf die Bildebene in die Projektion  $AB$  ihrer Grossachse projiziert, für welche im Raum, wie wir vorher sahen,  $AB \perp i$  gilt. Also  $AB$  ist parallel mit der Bildebene und die Länge ihrer Projektion ist ihrer wahren Länge gleich. Wie schon vorher gezeigt, gilt dies für alle Ebenen der Erzeugenden  $i$ . Die Mittelpunkte  $S_n$  der Grossachsen  $A_n B_n \perp i$  liegen auf einer Geraden  $s$  der Mittelebene des Plückerschen Konoids, die sich auf der Abb. 1. in die Gerade  $s \parallel t \parallel t_1$  projiziert. Auf Grund der Tatsache, dass die Exzentrizitäten aller Ellipsen des Plückerschen Konoids gleich der Hälfte seiner Höhe  $KK_1$  sind, kann sehr leicht die Projektion der Kurve der Brennpunkte der Schnittellipsen des Konoids mit den Ebenen der Erzeugenden  $i$  konstruiert werden, welche Projektion, auf Grund der Tatsache dass  $A_n B_n \perp i$  ist, als eine Nikomedische Konchoide  $k$  auf der Abb. 1. erscheinen wird ( $SF = SF_1, FF_1 = KK_1$ ). Wählt man jetzt auf der Projektion der Ebene  $\varrho$ , resp. der Achse  $AB$ , die Punkte  $E, E_1$  so, dass  $(ABFE) = -1$  und  $(ABF_1E_1) = -1$  gilt, dann sind die Punkte  $E, E_1$  orthogonale Projektionen der Direktrizen der Ellipse in der Ebene  $\varrho$ , auf deren Achse  $AB$  sich ihre Brennpunkte  $F, F_1$  befinden. In jeder Ebene  $\varrho_n$  der Erzeugenden  $i$  geschieht dasselbe, und alle Punktpaare  $E, E_1$  bilden eine Kurve, die folgenderweise bestimmt und gebildet wird.

Es sei auf der Abb. 1. das parallele Geradenpaar  $t, t_1$  als zerfallener Kegelschnitt angenommen, und der Punkt  $J$  als Pol einer allgemeinen Inversion bezüglich dieses zerfallenen Kegelschnittes gegeben. Da die Nikomedische Konchoide eine Kurve 4. Ordnung ist, müsste das transformierte Bild  $k_c$  dieser Nikomedischen Konchoide eine Kurve 8. Ordnung sein, weil die erwähnte Inversion eine quadratische Transformation ist. Da aber der Pol  $J$  der Dop-

pelpunkt der Konchoide ist, und diesem Punkt  $J$  in dieser Transformation die Gerade  $l_c$  zugeordnet ist, gehört diese Gerade doppelt zur transformierten Kurve  $k_c$ . Ausserdem ist der Schnittpunkt der Geraden  $t, t_1$  (der unendlich ferne Punkt) auch ein zweifacher Punkt der Konchoide  $k$ , der sich also doppelt in jeden Punkt der Verbindungsgeraden  $m_c \parallel t \parallel t_1$  dieser zwei Doppelpunkte abbildet. Also auch diese Gerade  $m_c$  gehört doppelt zur

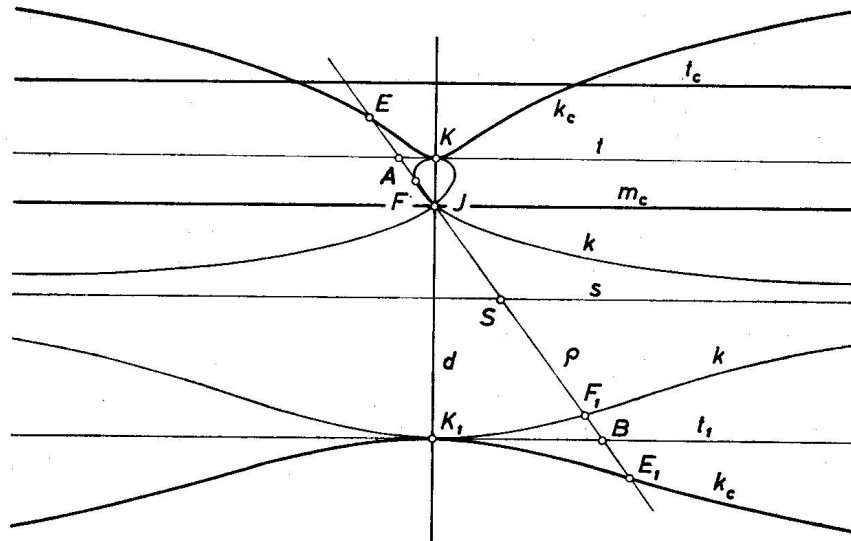


Abb. 1.

transformierten Kurve  $k_c$ . Man sieht also, dass durch die beschriebene singuläre allgemeine Inversion des Pols  $J$  und des Kegelschnittes  $(t, t_1)$  die Nikomedische Konchoide  $k$  in eine Kurve  $k_c$  4. Ordnung, und in zwei Doppelgeraden  $l_c$  und  $m_c$  transformiert wird. Da jeder Punkt der Kurve  $k_c$  die Projektion einer Direktrix ist, die im Raum parallel zur Erzeugenden  $i$  liegt, und der Ellipse einer Ebene dieser Erzeugenden angehört, sieht man, dass alle Strahlen der Direktrixkongruenz eines Plückerschen Konoids, die mit einer Erzeugenden dieses Konoids parallel sind, einen Zylinder 4. Ordnung bilden. Da weiterhin jede Ebene des Raumes mit einer Erzeugenden des Plückerschen Konoids parallel ist, folgt, dass jede Ebene des Raumes einen derartigen Zylinder 4. Ordnung in vier Erzeugenden schneidet. Weil sich also in jeder Ebene des Raumes vier Strahlen der Direktrixkongruenz des Plückerschen Konoids befinden, gilt folgender Satz:

*Die Direktrixkongruenz der Kegelschnitte eines Plückerschen Konoids ist vierter Klasse.*

Da die Ordnung und die Klasse dieser Strahlkongruenz gleich sind, sehen wir, dass die *Direktrixkongruenz eines Plückerschen Konoids vierten Grades ist.*

**IV. Der geometrische Ort der Zentralpunkte der Ellipsendirektrizen des Plückerschen Konoids.** Die Direktrix eines Kegelschnittes ist, wie bekannt, die Polare des Brennpunktes als Pol bezüglich dieses Kegelschnittes. Die konjugiert imaginären Schnittpunkte dieser Direktrix mit diesem Kegelschnitt, in welchem, wie bekannt, dieser Kegelschnitt durch das isotrope Geradenpaar des Brennpunktes (des Pols) berührt wird, sind als konjugiert imaginäre Doppelpunkte der durch diesen Kegelschnitt auf dieser Direktrix bestimmten elliptischen Involution bekannt. Der Zentralpunkt dieser involutorischen Punktreihe ist als Zentralpunkt dieser Direktrix bekannt. In unseren Betrachtungen in der Abt. II. ist leicht zu ersehen, dass es sich auf dem Direktrixkongruenzstrahl des Brennpunktes  $F$  um den Punkt  $C$  auf der Ellipse  $f$  handelt, in welchem Punkt  $C$  sich die Achse  $AB$  der Ellipse  $e$  und der Direktrixkongruenzstrahl des Pols  $F$  auf der Achse  $AB$  rechtwinklig schneiden.

Nimmt man die Torsalgeraden  $t, t_1$  des Plückerschen Konoids als Involutionenachsen zweier geschart hyperbolisch involutorischen Räume an (zweier geschart hyperbolisch involutorischen kollinearen Räume), dann gilt offenbar auf Grund der Tatsache dass  $(ABFC) = -1$  ist, dass die Punkte  $F, C$  in zwei derartigen geschart hyperbolisch involutorischen kollinearen Räumen einander zugeordnet sind. Da die Brennpunkte  $F, F_1$  aller Ellipsen  $e$  des Plückerschen Konoids eine Fläche 6. Ordnung bilden [1], bilden die Zentralpunkte der Direktrizen der Ellipsen des Plückerschen Konoids auch eine Fläche 6. Ordnung, die durch die eben beschriebene geschart involutorische kollineare Raumtransformation der ersten zugeordnet ist. Es folgt also auch folgender Satz:

*Die Zentralpunkte der Direktrizen der Ellipsen eines Plückerschen Konoids bilden eine Fläche 6. Ordnung.*

Da die Involutionenachsen  $t, t_1$  dieser geschart involutorischen kollinearen Raumtransformation invariant bleiben, und auf der Fläche der Brennpunkte der Ellipsen des Plückerschen Konoids als isolierte Doppelgeraden sich befinden [1], bleiben diese Geraden als isolierte Doppelgeraden auch auf der betrachteten Fläche der Zentralpunkte. Da in einer derartigen involutorischen kollinearen Raumtransformation der jedem Punkt der unendlich fernen Leitgeraden des Plückerschen Konoids zugeordnete Punkt wieder auf dieser Geraden liegt, gehört auch diese unendlich ferne Leitgerade der ausgeführten Fläche 6. Ordnung der Direktrixzentralpunkte, an in gleicher Mehrfachheit wie die auf der nicht transformierten Brennpunktfläche.

## L I T E R A T U R :

- [1] V. Niče, Noch einige Eigenschaften des Plücker'schen Konoids, Glasnik Mat. Ser. III. 5 (25) (1970), 309—318.  
 [2] E. Müller - J. L. Krames, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III. Leipzig - Wien (1931), 207—208.

(Eingegangen am 9. XII. 1971.)

*Mathematisches Institut der  
Universität in Zagreb*

**KONGRUENCIJA RAVNALICA KONIKA PLÜCKEROVA KONOIDA**

*Vilko Niče, Zagreb*

## S a d r Ź a j

Kao i svaka druga pravčasta ploha 3. stupnja tako i Plückerov konoid ima na sebi  $\infty^2$  konika, koje su sve elipse. Svaka ova elipsa ima svoje dvije realne i dvije imaginarne ravnalice. U ovom članku razmatra se neprekinuti kvadratni skup realnih ravnalica svih elipsi Plückerova konoida, koje očito čine neku kongruenciju. Potražiti će se red i razred, kao i neke osobine te kongruencije.

Iz činjenice, da su velike osi elipsi Plückerova konoida u transverzalama njegovih torzalnih pravaca, te da su one okomite na onu izvodnicu tog konoida u čijoj se ravnini te elipse nalaze, proizlazi, da realne ravnalice svih tih elipsi leže u direkcionalnim ravninama u kojima nema realnih izvodnica tog konoida, dakle je ta kongruencija konoidalna. Sve zrake te kongruencije sijeku jednostruku neizmjereno daleku ravnalicu tog Plückerovog konoida.

Poznato je, da je ekscentricitet elipsi Plückerova konoida jednak polovici njegove visine. Uzmemo li u razmatranje sve one elipse Plückerova konoida kojima su velike osi jednake, ležat će njihova žarišta na dvjema elipsama u dvjema direkcionalnim ravninama unutar toga konoida, a njihove realne ravnalice u dvjema direkcionalnim ravninama izvan tog konoida. Sve takve realne ravnalice u takvoj direkcionalnoj ravnini nastaju kao spojnice pridruženih točaka jednog linearnog i jednog kvadratnog niza, gdje je svakoj točki kvadratnog niza pridružena jedna točka linearnog, a svakoj točki linearnog niza dvije točke kvadratnog niza. Dakle sve te spojnice omataju u svakoj takvoj direkcionalnoj ravnini krivulju 4. razreda. Odavle proizlazi da je ta kongruencija 4. reda, jer svakom točkom prostora izvan torzalnih ravnina prolaze četiri zrake te kongruencije, koje u parovima mogu biti, naravno, i konjugirano imaginarni. Unutar torzalnih ravnina, dakle tamo gdje su izvodnice Plückerova konoida realne, sve su zrake te kongruencije imaginarne.



Poslužimo li se na zgodno postavljenoj ortogonalnoj projekciji Plückerova konoida posveopćenom inverzijom na jednoj raspadnutoj konici u dva usporedna pravca, može se pokazati, da sve zrake naše kongruencije, koje prolaze jednom neizmjereno dalekom točkom jednostruke neizmjereno daleke ravnalice Plückerova konoida, čine valjak 4. reda. Jer svaka ravnina prostora prolazi jednom takvom točkom slijedi, da se u svakoj ravnini prostora nalaze četiri zrake naše kongruencije. Ona je prema tome 4. razreda. Dobili smo prema tome ovaj stavak:

*Kongruencija ravnalica konika Plückerova konoida je 4. stupnja.*

Uzmemo li torzalne pravce našeg Plückerova konoida kao osi vitopero hiperbolički involutorne kolinearne transformacije, onda su centralne točke ravnalica pojedinih elipsi Plückerova konoida slike žarišta tih elipsi. Jer sva ta žarišta čine poznatu plohu 6. reda, onda na temelju spomenutog i sve te centralne točke čine opću plohu 6. reda, kojoj su torzalni pravci tog konoida zajednički izolirani dvostruki pravci s plohom žarišta.