

**NOCH EINIGE EIGENSCHAFTEN DES PLÜCKERSCHEN
KONOIDS**

Vilko Niče, Zagreb

Sonderabdruck aus
GLASNIK MATEMATIČKI 5 (1970), 309—318

Stamparski zavod »Ognjen Prica« Zagreb, Savska c. 31, 1970.

NOCH EINIGE EIGENSCHAFTEN DES PLÜCKERSCHEN KONOIDS

Vilko Niče, Zagreb

1. Auf einem Plückerschen Konoid befinden sich, so wie auf jeder anderen Regelfläche 3. Grades, ∞^2 Kegelschnitte, die, wie bekannt, lauter Ellipsen sind. Die Brennpunkte dieser Ellipsen bilden eine zweidimensionale stetige Menge, also eine Fläche, für welche in der Arbeit »Die Brennpunktsfläche der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids« ausgeführt wurde, dass sie als der geometrische Ort folgender Punkte definiert werden kann: Wird die Hälfte des Abstandes der Kuspidalpunkte, also die Hälfte der Höhe des Plückerschen Konoids, auf die Strahlen der linearen hyperbolischen Kongruenz seiner Torsalgeraden als Leitlinien auf die beiden Seiten seiner Mittelebene aufgetragen, dann liegen alle so gewonnenen Punkte auf der Brennpunktsfläche der Kegelschnitte dieses Plückerschen Konoids. Auf Grund dieser Definition der Brennpunktsfläche eines Plückerschen Konoids war es leicht in der erwähnten Arbeit zu beweisen, dass alle Ebenen einer Torsalgeraden diese Brennpunktsfläche in Nikomedischen Konchoiden schneiden, die ihren isolierten Doppelpunkt auf der anderen Torsalgerade haben. Wie bekannt, ist die Nikomedische Konchoide eine zirkuläre Kurve 4. Ordnung. Auf Grund dieser Tatsache wurde in dieser Arbeit angenommen, dass diese Brennpunktsfläche 4. Ordnung ist. In seinem vorletzten Schreiben hat mir Herr Oene Bottema aus Delft mitgeteilt, dass er für diese Brennpunktsfläche eine analytische Gleichung hergeleitet hat, die aber 6. Ordnung ist. Die Richtigkeit der Ordnung sechs dieser Brennpunktsfläche ist auch synthetisch leicht zu beweisen. Denn alle Ebenen einer Torsalgerade schneiden die Brennpunktsfläche in je einer Nikomedischen Konchoide, deren Doppelpunkt auf der anderen Torsalgerade liegt. Also beide Torsalgeraden des Plückerschen Konoids sind Doppelgeraden seiner Brennpunktsfläche. Auf Grund dessen folgt, dass jede Ebene einer Torsalgeraden diese Brennpunktsfläche in einer Nikomedischen Konchoide 4. Ordnung und in einer Doppelgeraden (die Torsalgerade) schneidet, also

in einer Kurve 6. Ordnung die in eine Doppelgerade und in eine Kurve 4. Ordnung zerfällt. Für diese Mitteilung des Herrn O. Bottema danke ich Ihm auch hier herzlichst.

Dass jede Ebene des Raumes diese Brennpunktsfläche eines Plückerschen Konoids in einer Kurve 6. Ordnung schneidet, kann auf folgende Weise bewiesen werden: Eine Ebene α des Raumes schneide die Torsalgerade t_1 des Plückerschen Konoids im Punkt T_1 . Jede Ebene der Torsalgeraden t_1 schneidet die Ebene α in einer Geraden s des Punktes T_1 , und die Brennpunktsfläche dieses Plückerschen Konoids in, wie gezeigt, einer Kurve 4. Ordnung und der Doppelgeraden t_1 . Die Geraden s des Punktes T_1 in den Ebenen α , von welchen je eine in den Ebenen der Torsalgeraden t_1 liegt, schneiden also diese Brennpunktsfläche in dem Doppelpunkt T_1 und in vier weiteren Punkten, die derjenigen Nikomedischen Konchoide angehören, die in der durch die Torsalgerade t_1 und die betreffende Gerade s bestimmten Ebene liegt. Da also jede den Punkt T_1 enthaltende Gerade s in der Ebene α die Brennpunktsfläche im Doppelpunkt T_1 und in vier weiteren Punkten schneidet, folgt, dass die Schnittkurve jeder Ebene α mit dieser Brennpunktsfläche 6. Ordnung ist. Offenbar gilt dies auch für den Schnittpunkt T_2 der Ebene α und der Torsalgerade t_2 . Die Ebene α schneidet also diese Brennpunktsfläche in einer Kurve 6. Ordnung, die in ihren Schnittpunkten T_1, T_2 mit den Torsalgeraden t_1, t_2 Doppelpunkte hat. Dies aber sind nicht die einzigen mehrfachen Punkte dieser Schnittkurve 6. Ordnung.

In der oben erwähnten Arbeit wurde auch ausgeführt, dass die Direktionsebenen des Plückerschen Konoids die Brennpunktsfläche seiner Kegelschnitte in einer Ellipse schneiden. Es folgt also, dass die unendlich ferne Leitgerade des Plückerschen Konoids eine vierfache Gerade der Brennpunktsfläche dieses Konoids sein muss. Der geometrische Ort derjenigen Brennpunkte der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids, die sich auf diesem Konoid befinden, besteht also aus der Durchdringungskurve des Plückerschen Konoids und seiner Brennpunktsfläche 6. Ordnung, ist also eine Raumkurve 18. Ordnung. Da aber die einfachen Torsalgeraden des Plückerschen Konoids die Doppelgeraden seiner Brennpunktsfläche sind, und die einfache unendlichferne Leitgerade dieses Konoids als vierfache Gerade auf seiner Brennpunktsfläche liegt, zerfällt also die Durchdringungskurve 18. Ordnung in zwei Doppelgeraden, eine vierfache Gerade und eine Raumkurve 10. Ordnung. Also diejenigen Brennpunkte der Kegelschnitte eines Plückerschen Konoids, die auf seiner Oberfläche liegen, bilden eine Raumkurve 10. Ordnung. Auch auf diese Tatsache hat mich Herr O. Bottema aufmerksam gemacht, da

in der vorher erwähnten Arbeit diese Raumkurve, auf Grund der versehens angenommenen Ordnung vier der Brennpunktfläche, die Ordnung sechs erhalten hat.

2. Es sei die Höhe, resp. der Abstand der Kuspidalpunkte T_1, T_2 des Plückerschen Konoids mit $2d$ bezeichnet. Auf Grund der in der vorne erwähnten Arbeit ausgeführten Definition der Brennpunktfläche des Plückerschen Konoids folgt, dass die Punkte dieser Brennpunktfläche diejenigen Punkte der Transversalen der Torsalgeraden t_1, t_2 dieses Plückerschen Konoids bilden, die von den Schnittpunkten dieser Transversalen mit der Mittelebene dieses Konoids um die Länge d entfernt sind. Auf Grund der Tatsache, dass alle Kegelschnitte des Plückerschen Konoids, die, wie bekannt, Ellipsen sind, parallel mit seiner Doppelgeraden auf jede Direktionsebene sich in Kreise projizieren, folgt, dass auf jeder Transversalen der Torsalgeraden t_1, t_2 für welche $t_1 \perp t_2$ gilt, sich die grosse Achse einer Ellipse des Plückerschen Konoids befindet. Für das Plückersche Konoid kann also folgender Satz ausgesprochen werden:

Alle Ellipsen eines Plückerschen Konoids haben ihre reellen Brennpunkte von ihrem Mittelpunkt gleich weit entfernt, und diese Entfernung ist der Hälfte der Höhe dieses Konoids gleich.

Man bezeichne die grosse Halbachse einer Ellipse des Plückerschen Konoids mit a , während die kleine mit b bezeichnet sei. Auf Grund der Tatsache dass sich diese Ellipse parallel mit der Doppelgerade auf die Mittelebene dieses Konoids in einen Kreis projiziert folgt, dass $b^2 + d^2 = a^2$ gilt. Bekanntlich gilt aber für jede Ellipse $b^2 + e^2 = a^2$, auf Grund dessen auch die beschriebene Definition der Brennpunktfläche des Plückerschen Konoids ausgeführt worden war. Man sieht also, dass auch folgender Satz gilt:

Die Differenz der Quadrate der grossen und der kleinen Achse jeder Ellipse eines Plückerschen Konoids ist dem Quadrat der Höhe dieses Konoids gleich.

Auf Grund der Tatsache dass $d^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ist, kann diese interessante Eigenschaft des Plückerschen Konoids auch auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Das Produkt der Summe und der Differenz der Achsen aller Ellipsen eines Plückerschen Konoids ist dem Quadrat der Höhe dieses Konoids gleich.

3. Es sei in einer Ebene eine Gerade s und ein Punkt D gegeben. Trägt man auf jede Gerade p des Punktes D , von seinem Schnittpunkt P mit der Geraden s , auf beide Seiten eine gegebene Länge

a bis zu den Punkten A auf, dann bilden alle derartigen Punkte A die bekannte Nikomedische Konchoide, also eine zirkuläre Kurve 4.

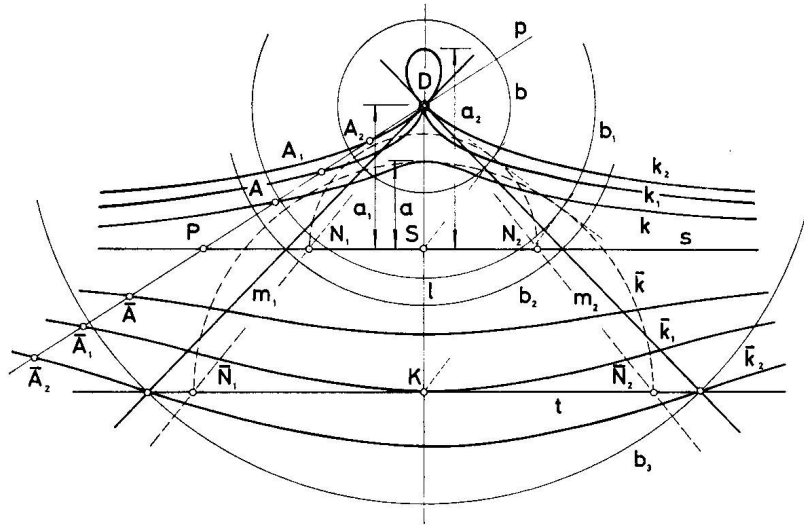


Abb. 1.

Ordnung mit dem Doppelpunkt D . Abb. 1. Je nach dem ob die Länge a kleiner, gleich (a_1) oder grösser (a_2) als die Entfernung des Punktes P von der Geraden s ist, wird der Punkt D ein isolierter Doppelpunkt (die Kurve k), eine Spitze (die Kurve k_1), oder ein gewöhnlicher Doppelpunkt (die Kurve k_2) mit zwei reellen Tangenten m_1 und m_2 . In diesem dritten Fall sei die gegebene Länge a mit a_2 bezeichnet. Auf Grund der Definition der Nikomedischen Konchoide folgt, dass die reellen Tangenten m_1, m_2 im Doppelpunkt D die Schnittpunkte der Geraden s und des um den Mittelpunkt D mit dem Halbmesser a_2 beschriebenen Kreises b_2 enthalten. Im Fall dass die Länge a gleich der Entfernung des Punktes D von der Geraden s ist, fallen diese zwei Tangenten zusammen (Spitzentangente), und im dritten Fall, wenn die Gerade s den Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Halbmesser a imaginär schneidet, werden die Tangenten im isolierten Doppelpunkt konjugiert imaginär.

Nimmt man anstatt des um den Mittelpunkt D beschriebenen Kreises b_2 vom Halbmesser a_2 einen anderen Kreis b_3 mit dem Halbmesser $2a_2$, und anstatt der Geraden s die Gerade $t \parallel s$ in doppelter Entfernung vom Punkt D , dann enthalten die erwähnten Tangenten m_1, m_2 der Nikomedischen Konchoide k_2 in ihrem Doppelpunkt D offenbar auch die Schnittpunkte der Geraden t mit dem erwähnten konzentrischen Kreis b_3 doppelten Halbmessers. Sehe Abb. 1.

Der Kreis mit dem Halbmesser a und Mittelpunkt D sei mit b bezeichnet. Wie bekannt, sind die imaginären Schnittpunkte der Geraden s und des Kreises b als konjugiert imaginäre Doppelpunkte

der elliptischen involutorischen Punktreihe der auf der Geraden s sich befindenden konjugiert zugeordneten Punktpaare bezüglich des Kreises b bekannt. Der Schnittpunkt S der Geraden s mit der Symmetrale l der Kurven k, k_1 und k_2 ist offenbar der Mittelpunkt dieser elliptischen involutorischen Punktreihe. Die charakteristische Konstante, resp. die symmetrischen zugeordneten Punkte N_1, N_2 dieser involutorischen Punktreihe, bekommt man auf Grund der Tatsache, dass diese charakteristische Konstante dem negativen Werte der Potenz des Punktes S bezüglich des Kreises b gleich ist, so dass man aus dem Punkt S eine Tangente auf den Kreis b zieht, und die Entfernung zwischen dem Berührungspunkt und dem Punkt S auf beide Seiten dieses Punktes auf die Gerade s bis zu den Punkten N_1, N_2 aufträgt. Durch dieses symmetrische Paar zugeordneter Punkte N_1, N_2 ist diese elliptische involutorische Punktreihe bestimmt.

Nimmt man anstatt des Kreises b einen konzentrischen Kreis b_1 doppelten Halbmessers ($2a$), und die vorher erwähnte Gerade $t \parallel s$, dann schneidet die Gerade t den Kreis b_1 im Paar konjugiert imaginärer Punkte, die Doppelpunkte der auf dieser Geraden sich befindenden elliptischen involutorischen Punktreihe der konjugiert zugeordneten Punktpaare bezüglich des Kreises b_1 sind. Offenbar können diese zwei elliptischinvolutorischen Punktreihen auf den Geraden s und t als Schnittreihen eines und desselben elliptisch involutorischen Strahlbüschels mit dem Scheitel D betrachtet werden.

4. Es sei auf der Abb. 2. das Plückersche Konoid in orthogonaler Projektion so dargestellt, dass eine seiner Torsalgeraden t_2 in

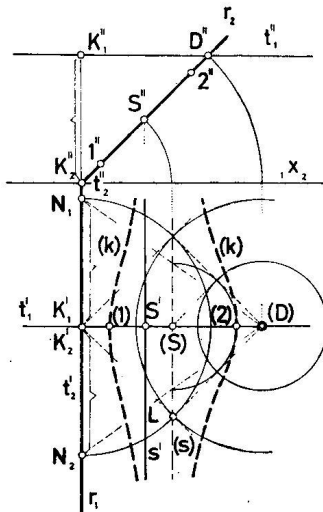


Abb. 2.

der Grundrissebene Π_1 liegt und $\perp \Pi_2$ ist, während die andere $t_1 \parallel \Pi_1, \Pi_2$ ist. Die Kuspidualpunkte K_1, K_2 geben im Aufriss die Höhe $2d$ dieses Konoids. Jede Ebene ϱ der Torsalgeraden t_2 schneidet die vorher beschriebene Brennpunktsfläche der Ellipsen dieses Plückerschen Konoids in einer Nikomedischen Konchoide, die ihren isolierten Doppelpunkt D in dem Schnittpunkt dieser Ebene und der Torsalgeraden t_1 hat. Die Mittelebene dieses Konoids wird durch diese Schnittebene in der Geraden s geschnitten. Die auf die Symmetrale $K_2 D$ der Nikomedischen Konchoide von ihrem Schnittpunkt S mit der Geraden s aufgetragenen Punkte 1, 2 für welche $S1 = S2 = 1/2 K_1 K_2 = d$ gilt, sind offenbar die Scheitel dieser Nikomedischen Schnittkonchoide.

Wie schon vorher erwähnt, sind die Torsalgeraden t_1, t_2 isolierte Doppelgeraden der beschriebenen Brennpunktsfläche des Plückerschen Konoids. In jedem Punkt D der Doppelgeraden (Torsalgeraden) t_1 sind die imaginären Berührungsebenen dieser Brennpunktsfläche durch diese Gerade t_1 und durch die konjugiert imaginären Tangenten im isolierten Doppelpunkt D derjenigen Nikomedischen Konchoide bestimmt, die in der Ebene ϱ dieses Doppelpunktes und der Geraden t_2 liegt. Diese zwei konjugiert imaginären Berührungsebenen sind also Doppelebenen des durch das elliptischinvolutorische Strahlbüschel mit dem Scheitel D in der Ebene ϱ , und durch die Achse t_1 bestimmten elliptischinvolutorischen Ebenenbüschels. Die Torsalebene der Torsalgeraden t_1 und die diese Torsalgerade enthaltende Symmetrieebene des Plückerschen Konoids sind das senkrecht stehende konjugiert zugeordnete Ebenenpaar in dem beschriebenen elliptischinvolutorischen Ebenenbüschel mit der Achse t_1 . Das bezüglich dieses senkrechten konjugiert zugeordneten Ebenenpaares symmetrisch liegende konjugiert zugeordnete Ebenenpaar dieses involutorischen Ebenenbüschels enthält offenbar das bezüglich des erwähnten senkrechten Ebenenpaares symmetrisch liegende konjugiert zugeordnete Strahlenpaar des beschriebenen involutorischen Strahlbüschels mit dem Scheitel D in der Ebene ϱ .

Offenbar berührt in jedem Punkt D der Doppelgeraden t_1 ein anderes Paar konjugiert imaginärer Ebenen diese Brennpunktsfläche, da die Entfernung der Schnittgeraden s von dem Doppelpunkt D auf der Doppelgeraden t_1 in jeder Ebene ϱ der Doppelgeraden t_2 verschieden ist, während die in der Abt. 3. erwähnte Länge a der Nikomedischen Konchoide in allen Ebenen ϱ der Doppelgeraden t_2 gleich bleibt. In den Kuspidualpunkten K_1, K_2 des Plückerschen Konoids, auf den Doppelgeraden t_1, t_2 der Brennpunktsfläche, ziehen sich die zwei konjugiert imaginären Berührungsebenen in die reellen diese Doppelgeraden t_1, t_2 enthaltenden Symmetrieebenen des Plückerschen Konoids zusammen, und in den unendlich fernen Punkten der Doppelgeraden t_1, t_2 ziehen sich die betreffenden zwei konjugiert imaginären Berührungsebenen in die Torsalebene dieser Torsalgeraden t_1, t_2 des Plückerschen Konoids zusammen.

Die Torsalgeraden, resp. die isolierten Doppelgeraden t_1, t_2 der Brennpunktsfläche der Ellipsen eines Plückerschen Konoids sind also die gemeinsame Achsen von ∞^1 elliptischinvolutorischen Ebenenbüscheln, die alle die Symmetrieebene und die Torsalebene dieser Geraden in allen diesen involutorischen Ebenenbüscheln als ein Paar zugeordneter Ebenen enthalten. Diese Doppelgeraden sind also auch Achsen je eines Büschels konjugiert imaginärer Ebenen, wo jedem Punkt dieser Achse ein konjugiert imaginäres Ebenenpaar zugeordnet ist. Im Kuspidalpunkt und in dem unendlich fernen Punkt ziehen sich, wie erwähnt, diese zwei konjugiert imaginären Berührungsebenen in eine reelle Ebene zusammen. Diese zwei singulären isolierten Doppelgeraden der beschriebenen Brennpunktsfläche berühren also diese Fläche nur in diesen zwei ihrer Punkte.

Man drehe auf der Abb. 2. die Ebene ϱ um die erste Spurgerade $r_1 = t_2$ in die Grundrissebene Π_1 hinein. Der Schnittpunkt D der Torsalgeraden t_1 fällt in den Punkt (D) und die Schnittgerade s mit der Mittelebene des Plückerschen Konoids fällt in die Gerade (s). Die Gerade $t_2 \parallel s$ ist von dem Doppelpunkt D doppelt so weit entfernt wie die Gerade (s).

Zieht man, auf Grund unserer Betrachtungen in Zusammenhang mit der Abb. 1., aus dem Punkt K_2 (Kuspidalpunkt) die Berührungsgerade an den um den Mittelpunkt (D) mit dem der Länge $K_1 K_2$ gleichen Halbmesser beschriebenen Kreis bis zu dem Berührungspunkt L , und trägt vom Punkt K_2 rechts und links auf die Gerade t_2 die Länge $K_2 L$ bis zu den Punkten N_1, N_2 auf, dann sind, wie vorher gezeigt, die Verbindungsgeraden DN_1, DN_2 das symmetrische Paar zugeordneter Strahlen im elliptischinvolutorischen Strahlbüschel des Scheitels D , deren imaginäre Doppelgeraden die Berührungsgeralen der Nikomedischen Schnittkonchoide der Ebene ϱ und der Brennpunktsfläche in ihrem Doppelpunkt D sind. Auf Grund der Tatsache dass $K_2 L + LD = K_2 D$, ferner $K_1 K_2 + K_1 D = K_2 D$ und $K_2 L = K_2 N_1 = K_2 N_2$ gilt, folgt dass auch $K_2 N_1 = K_2 N_2 = K_1 D$ gilt. Da durch das symmetrische Punktpaar N_1, N_2 zugeordneter Punkte auf der Geraden t_2 die charakteristische Konstante der involutorischen Schnittpunktreihe dieser Geraden t_2 und des involutorischen Strahlbüschels der imaginären Berührungsgeralen im Doppelpunkt der in der Ebene ϱ sich befindenden Nikomedischen Schnittkonchoide bestimmt ist, gilt für das Plückersche Konoid, resp. für die Brennpunktsfläche seiner Ellipsen, auch folgender Satz:

Schneidet man die Brennpunktsfläche der Ellipsen eines Plückerschen Konoids mit einer seine Torsalgerade t_1 enthaltenden Ebene, dann schneidet diese Ebene diese Brennpunktsfläche in einer Nikomedischen Konchoide mit isolierten Doppelpunkt D auf der anderen Torsalgeraden t_2 . Das elliptisch involutorische Strahlbüschel, dessen Doppelgeraden imaginäre Berührungsgeralen dieser Konchoide in diesem Doppelpunkt sind, schneidet die Torsalgerade t_2

in derjenigen elliptisch involutorischen Punktreihe, deren bezüglich seines Mittelpunktes K_2 symmetrisch liegende zugeordnete Punkte von diesem Punkt immer um die Länge DK_1 entfernt sind.

Die charakteristische Konstante dieser elliptischinvolutorischen Punktreihe auf der Geraden t_2 ist also dem negativen Wert des Quadrates der Länge DK_1 gleich.

Wie schon erwähnt haben die isolierten Doppelgeraden t_1, t_2 dieser Brennpunktsfläche in ihrem jedem Punkt ein anderes konjugiert imaginäres Berührungsebenenpaar. Man suche jetzt auf diesen Geraden diejenigen Punkte, in welchen diese konjugiert imaginären Berührungsebenen isotrop sind. Das elliptischinvolutorische Ebenenbüschel derartiger zwei Berührungsebenen muss also zirkulär sein, resp. die Ebenen aller Paare zugeordneter Ebenen stehen untereinander senkrecht. Wie bekannt, steht in jedem involutorischen Ebenenbüschel ein Paar zugeordneter Ebenen senkrecht. Wenn zwei derartige Paare bestehen, dann sind alle zugeordneten Ebenenpaare untereinander senkrecht, also bilden ein zirkuläres involutorisches Ebenenbüschel.

Das gemeinsame Paar zugeordneter Ebenen in allen beschriebenen involutorischen Ebenenbüscheln einer Doppelgeraden t_1 , oder t_2 , bilden, wie vorher gezeigt, die diese Gerade enthaltende Torsalebene und die Symmetrieebene des Plückerschen Konoids die diese Gerade enthält. Diese zwei Ebenen sind, wie wir sahen, untereinander senkrecht. Wenn wir also in einem involutorischen Ebenenbüschel einer Doppelgeraden t_1 , oder t_2 , noch ein weiteres senkrecht Paar zugeordneter Ebenen finden, dann stehen die Ebenen aller zugeordneten Paare senkrecht, es handelt sich also nun um ein zirkuläres involutorisches Ebenenbüschel mit isotropen Doppelsebenen.

Man nehme auf der Gerade t_2 zwei Punkte N_1, N_2 so an, dass $K_2 N_1 = K_2 N_2 = K_1 K_2$ ist. Die Ebenen $(t_1 N_1)$ und $(t_1 N_2)$ sind offenbar untereinander senkrecht, und bilden, wie vorhin gezeigt, ein Paar zugeordneter Ebenen in demjenigen elliptisch involutorischen Ebenenbüschel, dessen konjugiert imaginären Doppelsebenen die betreffende Brennpunktsfläche in demjenigen Punkt D der Doppelgeraden t_1 berühren, dessen Entfernung von dem Kuspidualpunkt K_1 gleich der Höhe $K_1 K_2$ des Konoids ist. Auf Grund der Symmetrie des Plückerschen Konoids und seiner Brennpunktsfläche befinden sich auf der Doppelgeraden t_1 zwei derartige bezüglich des Kuspidualpunktes K_1 symmetrisch liegende Punkte. Also gilt auch folgender Satz:

In denjenigen Punkten der Torsalgeraden eines Plückerschen Konoids, die von den Kuspidualpunkten um die Höhe dieses Konoids entfernt sind, berührt die Brennpunktsfläche der Ellipsen dieses Plückerschen Konoids ein isotropes Ebenenpaar.

Auf Grund dieses Satzes gilt offenbar auch das Folgende: Alle auf der Brennpunktsfläche eines Plückerschen Konoids liegenden Raumkurven, die die eben erwähnten vier isolierten Doppelpunkte

enthalten und durch eine auf der betreffenden Doppelgeraden senkrechten Ebene in diesen Punkten berührt werden, werden in diesen isolierten Doppelpunkten von zwei isotropen Geraden berührt.

5. Man könnte jetzt die Frage stellen, was für einen geometrischen Ort alle Scheitel der Ellipsen eines Plücker'schen Konoids bilden. Es ist leicht ersichtlich, dass die Scheitel auf den Grossachsen dieser Ellipsen sich auf den Torsalgeraden befinden, während die Scheitel auf den Kleinachsen in der Mittelebene dieses Konoids liegen, ebenso wie die imaginären Brennpunkte dieser Ellipsen. Es wäre interessant auch den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte in diesen Scheiteln auf den Grossachsen zu betrachten, oder die Ordnungen und die Klassen derjenigen Kongruenzen zu bestimmen, die aus den Normalen der Ebenen dieser Ellipsen bestehen, die ihre Mittelpunkte, Brennpunkte oder Krümmungsmittelpunkte enthalten. Alle diese Probleme könnten auch auf den allgemeinen Regelflächen 3. Grades betrachtet werden. Auch die konoidale Kongruenz der Polaren der Brennpunkte dieser Ellipsen könnte betrachtet werden, wie auch der geometrische Ort ihrer imaginären Schnittpunkte mit diesen Ellipsen, also eine imaginäre Fläche, resp. den reellen Vertreter dieser Fläche usw.

Alles dies wird, hoffen wir, in neuen Arbeiten, von neuen Autoren in diesem interessanten geometrischen Bereich untersucht werden.

(Eingegangen am 26. XII 1969.)

*Mathematisches Institut
der Universität Zagreb*

JOŠ NEKE OSOBINE PLÜCKEROVA KONOIDA

Vilko Niče, Zagreb

S a d r ž a j

U radu »Ploha žarišta čunjosječnica Plückerova konoida« dokazano je, da se u tom naslovu navedena ploha sastoji iz tačaka, koje dobivamo na svakoj transverzali torzalnih pravaca Plückerova konoida kad na te transverzale nanesimo od njegove središnje ravnine pola njegove visine. Iz ove definicije lako se dobiva, da su presjeci te plohe žarišta s ravninama torzalnih pravaca Nikomedove konhoide, dakle, cirkularne krivulje 4. reda. Na temelju ove činjenice zaključeno je u tom radu da je ta ploha 4. reda. U ovom se radu međutim vrlo jednostavno dokazuje da je ta ploha 6. reda s dva zanimljiva izolirana dvostruka pravca, koji se podudaraju s torzalnim pravcima Plückerova konoida. U svakoj tački tih pravaca dira tu plohu drugi par konjugirano imaginarnih ravnina, a oba ta pravca diraju tu plohu realno u kupidalnim tačkama i neizmjereno daleko.

U ovom radu izvedeni su ovi stavci:

1. Sve elipse Plückerova konoida imaju jednaki ekscentricitet.
2. Razlika kvadrata velike i male osi svih elipsi Plückerova konoida jednaka je kvadratu njegove visine.
3. Produkt zbroja i razlike velike i male osi kod svih elipsi Plückerova konoida jednak je kvadratu njegove visine.
4. Konjugirano imaginarni par dirnih ravnina plohe žarišta elipsi Plückerova konoida u nekoj točki D njenog dvostrukog pravca t_1 , siječe dvostruki njen pravac t_2 u eliptičkom involutornom nizu tačaka, kojemu su simetrične tačke udaljene od središnje za duljinu, koja je jednaka udaljenosti tog dirališta na pravcu t_1 od kuspidalne tačke konoida na tom pravcu.
5. One tačke na dvostrukim pravcima plohe žarišta čunjosječnica Plückerova konoida, koje su od kuspidalnih tačaka tog konoida udaljene za njegovu visinu, dirališta su para izotropnih dirnih ravnina te plohe.