JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI
I UMJETNOSTI

VILIM NIČE

ZUSÄTZLICHE BETRACHTUNGEN MIT ERGÄNZENDEN SÄTZEN ÜBER DEN TAGENTIALKURZWEGEKOMPLEX EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

DODATNA RAZMATRANJA KOMPLEKSA NAJKRAĆIH DIRNIH PUTOVA JEDNOG PRAMENA PLOHA 2. STUPNJA

ZAGREB

1970

VILIM NIČE

ZUSÄTZLICHE BETRACHTUNGEN MIT ERGÄNZENDEN SÄTZEN ÜBER DEN TANGENTIALKURZWEGEKOMPLEX EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

Einleitung: Jeden Raumpunkt P enthält, wie bekannt, nur eine Fläche φ eines Flächenbüschels (φ_u) 2. Grades. Jede Berührungsgerade dieser Fläche φ im Punkt P berührt noch eine weitere Fläche φ_1, und diese zweiten Berührungspunkte $P_1{}^u$ aller dieser Berührungsgeraden im Punkt P liegen auf einer Geraden p, die, wie bekannt, die Polarebenen des Pols P bezüglich aller Flächen φ_u des Büschels (φ_u) enthält. Die Gerade p ist also ein Strahl des diesem Büschel zugeordneten quadratischen tetraedralen Komplexes. Diejenigen dieser den Raumpunkten P zugeordneten Berührungsgeraden, auf welchen die Entfernung des zweiten Berührungspunktes $P_1{}^u$ von dem Punkt P die kürzeste ist. Also $PP_1 \perp p$ sein muss, bilden den bekannten, in der Arbeit »Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades« (1965), betrachteten Tangentialkurzwegekomplex, für welchen dort festgestellt wurde, dass er den Grad drei hat. Es wurden in jener Arbeit auch einige Eigenschaften dieses Tangentialkurzwegekomplexes ausgeführt, die durch einige Sätze ausgesprochen sind. Auch hier, so wie in der erwähnten Arbeit, sei dieser Komplex mit (RK) bezeichnet. Auf jedem Strahl des (RK) Komplexes wurde der Punkt P als Ausgangspunkt dieses Strahles, und der Punkt P_1 als sein Eingangspunkt bezeichnet. Auf diese Weise wurden jedem Strahl des (RK) Komplexes zwei derartige Punkte zugeordnet, in welchen er zwei Flächen φ, φ_1 des Büschels (φ_u) berührt. Jedem Punkte des Raumes wurde aber in der erwähnten Arbeit ein Strahl zugeordnet, wobei stillschweigend dieser Punkt als Ausganspunkt angenommen war. Auf Grund dieser Tatsache wurde in der erwähnten Arbeit der Grad drei und einige Sätze des (RK) Komplexes ausgeführt. Wenn aber ein Raumpunkt nicht nur als Ausgangspunkt, sondern auch als Eingangspunkt eines Strahles (Tangentialkurzweges) des (RK) Komplexes in Betracht gezogen wird, dann kommen in den erwähnten Betrachtungen neue Eigenschaften zum Ausdruck, die zu einem neuen Grad und einer Ergänzung der angeführten Sätze des (RK) Komplexes führen. Es besteht nämlich kein Grund dafür, dass jeder Eingangspunkt eines Strahles des (RK) Komplexes auch als sein Ausgangspunkt angenommen werden kann, was, wahrscheinlich, nur in ganz speziellen Fällen der Fall sein kann. In dieser Arbeit werden jedem Raumpunkt, wenn wir ihn ausdrücklich als Ausgangspunkt und als Eingangspunkt in Betracht ziehen, was in der vorher erwähnten Arbeit nicht der Fall war, nicht nur ein, sondern zwei, oder vielleicht auch mehrere Strahlen des (RK) Komplexes zugeordnet sein.

Auf Grund einer derartigen Feststellung wird der (RK) Komplex in dieser Arbeit weiteren strengeren Betrachtungen unterworfen, die uns auch zu einem höheren Grad dieses Komplexes führen werden.

Die Notwendigkeit einer weiteren Vertiefung und Erweiterung der durchgeführten Betrachtungen über den (RK) Komplex entstand während der Untersuchungen der Singularitäten und einiger Eigenschaften dieses (RK) Komplexes, welche Untersuchungen Frau Assistentin Mr Vlasta Šćurić durchzuführen die Absicht hat.

Auf Grund und mittels der in dieser Arbeit durchgeführten und erweiterten Betrachtungen über den (RK) Komplex werden die in der vorher erwähnten Arbeit ausgeführten Sätze verbessert, oder stilistisch genauer dargelegt. Auch in einigen späteren Arbeiten, wo der (RK) Komplex zum Ausdruck kam, werden die neuen erweiterten Eigenschaften dieses Komplexes berücksichtigt.

I. Es liege der Raumpunkt P auf der Fläche φ eines Flächenbüschels (φ_u) 2. Grades. Die Polarebene π des Pols P bezüglich einer Fläche φ_u dieses Büschels schneide diese Fläche φ_u im Kegelschnitt c_u. Die Berührungsebene τ der Fläche φ berührt noch zwei weitere Flächen φ_1, φ_2 des Büschels (φ_u) in den Punkten $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$. Die Verbindungsgerade $p = \overline{P}_1 \overline{P}_2$ enthält, wie bekannt, die Polarebenen des Pols P bezüglich aller Flächen φ_u des Büschels (φ_u). Sie ist, wie bekannt, ein Strahl des bekannten diesem Büschel (φ_u) zugeordneten tetraedralen quadratischen Strahlkomplexes, der auch hier mit (TK) bezeichnet sei. Die Polarebene des Punktes P bezüglich der Fläche φ ist offenbar die Berührungsebene τ. Jeder Berührungsstrahl der Fläche φ im Berührungspunkt P berührt noch eine Fläche dieses Büschels, und alle diese zweiten Berührungspunkte $\overline{P}_u$ dieser Strahlen liegen, wie bekannt, auf der Geraden $p = \overline{P}_1 \overline{P}_2$. So wie dem Punkt P die Gerade p zugeordnet ist, sind den Punkten $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ die Geraden $p_1 = P \overline{P}_2$ und $p_2 = P \overline{P}_1$ zugeordnet. Also, die Geraden p_1, p_1 sind auch Strahlen des erwähnten tetraedralen Komplexes.

Die den Punkt P enthaltende, in der Ebene τ liegende und die Gerade p senkrecht schneidende Gerade r ist der dem Punkt P zugeordnete Strahl des dem Flächenbüschel (φ_u) zugeordneten (RK) Komplexes, dem der Punkt P als Ausgangspunkt angehört. Folglich ist jedem Raumpunkt als Ausgangspunkt ein Strahl des (RK) Komplexes zugeordnet. Der Schnittpunkt $\overline{P}$ der Geraden p, r ist offenbar der Eingangspunkt (Endpunkt) des

(RK) Komplexstrahles r, in welchem die Gerade r eine neue Fläche φ_m des Büschels (φ_u) berührt. Da auf die eben beschriebene Weise jeder Punkt des Raumes der Ausgangspunkt eines Strahles des (RK) Komplexes ist, folgt offenbar, dass auch der Eingangspunkt $\overline{P}$, als ein Ausgangspunkt angenommen werden kann. Dieser Punkt $\overline{P}$ ist also auch einem neuen Ausgangsstrahl r des (RK) Komplexes zugeordnet, für welchen kein Grund besteht, dass er mit dem ersten Strahl identisch ist. Der Punkt P enthält also wenigstens zwei Strahlen des (RK) Komplexes, die ihm zugeordnet sind. Für einen ist er der Ausgangspunkt, und für den anderen der Eingangspunkt. Beide diese Strahlen des Punktes P liegen in der Berührungsebene der Fläche φ in diesem Punkt P.

In der in der Einführung erwähnten Arbeit wurde ausgeführt, dass die Bisekanten der Grundraumkurve k^u des Flächenbüschels (φ_u) Strahlen des diesem Flächenbüschel zugeordneten (RK) Komplexes sind. Diese Bisekanten sind, wie bekannt, Erzeugende der in dem Flächenbüschel (φ_u) sich befindenden Regelflächen 2. Grades, von welchen, wie bekannt, jeder Raumpunkt zwei enthält, die in der Berührungsebene der diesen Punkt enthaltenden Fläche φ des Büschels (φ_u) liegen. Offenbar kann dieses Erzeugendenpaar auch zusammenfallen, oder konjugiert imaginär sein. In der Ebene des Punktes P, die die Berührungsebene der Fläche φ des Büschels (φ_u) ist, liegen also noch zwei den Punkt P enthaltenden Strahlen des (RK) Komplexes. Da in dieser Ebene der Punkt P vier Strahlen des (RK) Komplexes enthält, muss also dieser Komplex wenigstens den Grad vier haben.

Wie in der oben erwähnten Arbeit ausgeführt wurde, bilden die den Punkten einer Geraden t zugeordneten Strahlen des (RK) Komplexes, wo schweigend angenommen wurde dass alle Punkte dieser Gerade t nur als Ausgangspunkte betrachtet werden, eine Regelfläche 6. Grades, und die Eingangspunkte dieser Strahlen liegen auf einer Raumkurve 5. Ordnung. Diese Kurve liegt auf derjenigen Regelfläche 2. Grades, die durch die den Punkten der Geraden t im (TK) Komplex des Flächenbüschels (φ_u) zugeordneten Strahlen gebildet ist. Diese Strahlen, die ein System der Erzeugenden dieser Regelfläche 2. Grades bilden, sind Unisekanten dieser Raumkurve 5. Ordnung, während die Erzeugenden des zweiten Systems deren Quadrisekanten sein müssen. Nimmt man als Gerade t einen Strahl des dem Flächenbüschel (φ_u) zugeordneten (TK) Komplexes, dann bilden die den Punkten dieses Strahles t zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex den bekannten Kegel 2. Grades, dessen Scheitel sich in dem dem Strahl t durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkt befindet.

Die den Punkten der Geraden p in der vorher beschriebenen Berührungsebene τ durch den (TK) Komplex des Büschels (φ_u) zugeordneten Strahlen dieses (TK) Komplexes bilden also einen Strahlkegel 2. Grades, mit dem Scheitel in dem Punkt P, und welchem auch die Geraden $p_1 = P\overline{P}_2$ und $p_2 = P\overline{P}_1$ als Erzeugende angehören. Auf diesem Kegel befindet sich die den Punkten den Geraden p als Ausgangspunkten zugeordnete Raumkurve 5. Ordnung der Eingangspunkte. Die diesen Punkten der Geraden p, die als Ausgangspunkte angenommen sind, zugeordneten Ausgangsstrahlen des (RK) Komplexes bilden also eine Regelfläche, auf welcher auch die erwähnte Raumkurve 5. Ordnung der Eingangspunkte liegt. Da jedem Punkt der Geraden p eine Erzeugende des erwähnten Kegels zugeordnet ist, befindet sich auf jeder dieser Erzeugenden nur ein Eingangspunkt auserhalb des Scheitels, dessen Ausgangspunkt auf der Geraden p liegt. Da weiterhin die Raumkurve der Eingangspunkte auf diesem Kegel 2. Grades 5. Ordnung ist, muss sich im Scheitel P dieses Kegels ein dreifacher Punkt dieser Raumkurve 5. Ordnung befinden. Auf der Geraden p befinden sich also drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3, für welche der diesen Ausgangspunkten zugeornete gemeinsame Eingangspunkt Q in dem Scheitel $P \equiv Q$ sich befindet. In der Berührungsebene τ der Fläche φ enthält also deren Berührungspunkt P sechs Strahlen des dem Flächenbüschel (φ_u) zugeordneten (RK) Komplexes. Dies sind die Strahlen $P\overline{P}$, PQ_1, PQ_2, PQ_3 und die zwei den Punkt P enthaltenden Erzeugenden der Fläche φ. Der betreffende Satz in der früher erwähnten Arbeit über die Zuordnung der Punkte und der Strahlen des (RK) Komplexes muss also auf folgende Weise ergänzt und verbessert werden:

Jedem Strahl des (RK) Komplexes sind zwei Punkte zugeordnet, sein Ausgangspunkt und sein Eingangspunkt, und jedem Punkt des Raumes sind vier Strahlen dieses Komplexes zugeordnet. Das ist dessen Ausgangsstrahl, für welchen er Ausgangspunkt ist, und seine drei Eingangsstrahlen, für welche er der gemeinsame Eingangspunkt ist.

In unseren weiteren Betrachtungen werden wir auch auf derartige singuläre Strahlen des (RK) Komplexes treffen, auf welchen zwei ihrer Ausgangspunkte und die ihnen zugeordneten Eingangspunkte liegen. Derartige doppelte Tangentialkurzwege liegen aber ganz auf den Regelflächen φ_u des Flächenbüschels (φ_u), was etwas später näher betrachtet wird.

II. Auf Grund der bisherigen Betrachtungen sieht man, dass der (RK) Komplex wenigstens den Grad sechs haben muss, und nicht drei, wie es in der eingangs erwähnten Arbeit steht. Man zog dort den Raumpunkt P und seine Polarebene π_u bezüglich einer Fläche φ_u des Büschels (φ_u) in Betracht, die diese Fläche φ_u in einem Kegelschnitt c_u schneidet. Der Kegel (Pc_u) berührt, wie bekannt, die Fläche φ_u längs des Kegelschnittes c_u. Auf Grund der Tatsache, dass der einer Berührungsebene der Fläche φ_u zugeordnete Pol bezüglich dieser Fläche deren Berührungspunkt ist, folgt, dass die den Punkten des Kegelschnittes c_u zugeordneten Strahlen in dem (TK) Komplex des Büschels (φ_u) in den Berührungsebenen des Kegels (Pc_u) liegen und eine Regelfläche S bilden. Auf Grund dieser Tatsache folgt weiter, dass die den Punkten des Kegelschnittes c_u als Ausgangspunkten zugeordneten Strahlen des (RK) Komplexes auch in diesen Berührungsebenen liegen, und, offenbar, auch eine Regelfläche $\overline{S}$ bilden. Die den Punkt P enthaltenden Berührungsebenen der Regelfläche $\overline{S}$ und des Kegels (Pc_u) sind also gemeinsam, und hüllen den Kegel (Pc_u) ein.

Es sei einem Punkt A des Kegelschnittes c_u in dem (TK) Komplex des Büschels (φ_u) der Strahl a, und in dem (RK) Komplex dieses Büschels der Strahl $\bar{a}$ zugeordnet. Wie bekannt gilt $a \perp \bar{a}$, und der Schnittpunkt dieser zwei Strahlen sei mit $\bar{A}$ bezeichnet. Der den Punkt P enthaltende Strahl $a^0 \parallel a$ schneide den Strahl $\bar{a}$ im Punkt A^0. Wenn man dies für alle Punkte A_u des Kegelschnittes c_u durchführt, bilden die Punkte A_u^0 auf der Erzeugenden a der Regelfläche S die Fusspunktkurve dieser Regelfläche bezüglich des Pols P. Die Geraden a_u^0 des Punktes P bilden, offenbar, einen Kegel dessen Grad der Ordnung dieser Fusspunktkurve gleich ist, wenn der Punkt P nicht auf dieser Raumkurve liegt. Im Falle dass die Erzeugenden a_u^0 dieses Kegels mit den Erzeugenden $\bar{a}_u$ der Regelfläche S zusammenfallen, also beide sich in eine Erzeugende des Kegels (Pc_u) zusammenziehen, werden diese Erzeugenden des Kegels (Pc_u) Erzeugende der Regelfläche S, also Strahlen des (RK) Komplexes, deren Ausgangspunkte, wie wir sahen, auf dem Kegelschnitt c_u liegen. Da in diesen Fällen der Kegel (Pc_u) und der erwähnte Fusspunktkegel des Scheitels P gemeinsame Berührungsebenen haben, also sich untereinander berühren und in jedem diesem Fall zwei unendlich nahe gemeinsame Erzeugende haben, ist die Zahl der gemeinsamen Erzeugenden dieser zwei Kegel gleich der Hälfte der Zahl ihrer gemeinsamen Erzeugenden.

Die der Ebene π_u bezüglich aller Flächen φ_u des Büschels (φ_u) zugeordneten Pole bilden, wie bekannt, eine kubische Raumkurve k^3, die, offenbar, auch den Punkt P enthält. Die den Punkten der Ebene π_u zugeordneten Strahlen des dem Büschel (φ_u) zugeordneten (TK) Komplexes sind, wie bekannt, die Bisekanten dieser kubischen Raumkurve k^3, bilden also die bekannte Strahlkongruenz 1. Ordnung und 3. Klasse. Die den Punkten A_u des Kegelschnittes c_u in dem (TK) Komplex zugeordneten Strahlen a_u bilden eine Regelfläche S, die 4. Grades ist und die die kubische Raumkurve k^3 als Doppelkurve enthält. Es handelt sich also um eine Regelfläche 4. Grades III. oder IV. Art. Dies kann auch auf folgende Weise bewiesen werden: Die Erzeugenden der Regelfläche S sind, wie gezeigt, Bisekanten der Raumkurve k^3 und gehören also zur Bisekantenkongruenz 1. Ordnung 3. Klasse dieser kubischen Raumkurve k^3. Diese Erzeugenden sind aber auch Berührungsgeraden des Kegels (Pc_u), also Strahlen des quadratischen Komplexes der Berührungsgeraden dieses Kegels (Pc_u). Die Erzeugenden der Regelfläche S sind also gemeinsame Strahlen dieser Kongruenz und dieses Komplexes, und bilden, wie bekannt, eine Regelfläche $2\,(1 + 3) = 8$. Grades. In jeder Berührungsebene des Kegels (Pc_u) befinden sich drei Erzeugende dieser Regelfläche. Da aber die kubische Raumkurve k^3 den Scheitelpunkt P des Kegels (Pc_u) enthält, liegen in jeder Berührungsebene des Kegels (Pc_u) zwei Bisekanten der Raumkurve k^3, die diesen Punkt P enthalten, und eine andere ausserhalb dieses Punktes. Da der einem Punkt A des Kegelschnittes c_u zugeordnete Strahl a des (TK) Komplexes nicht den Punkt P enthalten kann, weil die den Punkt P enthaltenden Strahlen des (TK) Komplexes nur den Punkten der Geraden $p = \tau \times \pi$ zugeordnet sind, folgt, dass die den Punkten A_u des Kegelschnittes c_u zugeordneten Strahlen a des (TK) Komplexes, ausser in den zwei Schnittfällen der Gerade p und des Kegelschnittes c_u, die diesen Punkt P nicht enthaltenden Bisekanten der Raumkurve k^3 sind. Jede Bisekante der Raumkurve k^3 enthält aber zwei Berürungsebenen des Kegels (Pc_u), ist also eine zweifache Erzeugende der eben erwähnten Regelfläche 8. Grades. Der zweifache Kegel 2. Grades dieser den Punkt P enthaltenden Bisekanten der Raumkurve k^3 gehört also als ein ausgearteter Teil zu der eben erwähnten Regelfläche 8. Grades, welcher Teil in unseren weiteren Ausführungen nicht berücksichtigt wird. Die den Punkten A_u des Kegelschnittes c_u zugeordneten Strahlen a_u des (TK) Komplexes bilden also den Restteil S der erwähnten Regelfläche 8. Grades, welcher aus einer Regelfläche 4. Grades besteht. Da weiterhin jeder Punkt der Raumkurve k^3 zwei Berührungspunkte des Kegels (Pc_u) enthält, folgt, wie schon erwähnt, dass diese kubische Raumkurve eine Doppelkurve dieser Regelfläche ist. Die den Punkt P enthaltenden Erzeugenden dieser Regelfläche S sind diejenigen den Punkt P enthaltenden Bisekanten der Raumkurve k^3 die in denjenigen Berührungsebenen des Kegels (Pc_u) liegen, die die Berührungsgerade der Kurve k^3 im Punkt P enthalten. Die Fusspunktkurve des Pols P bezüglich dieser Regelfläche S, die 4. Grades ist, ist eine Raumkurve f^8 8. Ordnung, die im Punkt P einen Doppelpunkt hat, weil dieser Punkt zwei Erzeugende der Regelfläche S enthält. Der durch die den Punkt P enthaltenden Bisekanten dieser Raumkurve f^8 erzeugte Kegel ist also 6. Grades. Auf Grund des vorher Ausgeführten folgt, dass dieser Kegel 6. Grades und der Kegel (Pc_u) 2. Grades sich längs sechs gemeinsamen Erzeugenden berühren können. Es bestehen also auf dem Kegelschnitt c_u in der Ebene π_u sechs Punkte A_u $(u = 1 - 6)$, denen die als Ausgangspunkten zugeordneten Strahlen des (RK) Komplexes Erzeugende des Kegels (Pc_u) sind. Da auf der Geraden p, wie vorher gezeigt, drei Punkte bestehen, die Ausgangspunkte dreier Strahlen des (RK) Komplexes sind, die den Punkt P (als gemeinsamen Eingangspunkt) enthalten, folgt, dass in der Ebene π_u der Geraden p neun Punkte bestehen, denen die als Ausgangspunkten zugeordneten Strahlen des (RK) Komplexes den Punkt P enthalten. Offenbar gilt dies für jede Ebene π_u der Geraden p. Es folgt also, dass alle diese in den Ebenen π_u der Geraden p liegenden Ausgangspunkte, deren im (RK) Komplex zugeordnete Strahlen den Punkt P enthalten, eine stetige eindimensionale Punktmenge bilden, also auf einer Raumkurve 9. Ordnung liegen. Alle diese Strahlen bilden also einen Kegel 8. Grades des Scheitels P, weil dieser Scheitel P auf dieser Raumkurve 9. Ordnung als einfacher Punkt liegt. Da es sich in diesen unseren Betrachtungen um alle Strahlen des (RK) Komplexes handelt, die den Punkt P enthalten und einen Kegel 8. Grades bilden, und dies für alle Raumpunkte gilt, gilt der Satz:

Der (RK) Komplex eines Flächenbüschels 2. Grades ist achten Grades.

Auf jedem den Punkt P enthaltendem Strahl des (RK) Komplexes befindet sich ausser dem ihm zugeordneten Ausgangspunkt auch der diesem Ausgangspunkt zugeordnete Eingangspunkt, der in keinem Fall auch Ausgangspunkt dieses Strahles sein kann. Also alle diese den Strahlen des *(RK)* Komplexes des Punktes *P* zugeordneten Eingangspunkte bilden auch eine stetige eindimensionale Punktmenge, also eine Raumkurve, die auch auf dem Komplexkegel 8. Grades des Punktes *P* liegt.

III. In der in der Einleitung angeführten Arbeit über den *(RK)* Komplex, wurde versehentlich die Raumkurve 7. Ordnung als die einzige Raumkurve der Ausgangspunkte und der Eingangspunkte auf den den Punkt *P* enthaltenden Strahlen des *(RK)* Komplexes angenommen, und diese Strahlen erschienen auf diese Weise als die den Punkt enthaltenden Trisekanten dieser Raumkurve. Dadurch erhielt auch der *(RK)* Komplex den Grad drei anstatt den Grad acht, wie wir es in dieser Arbeit ausgeführt haben.

Auf Grund der Tatsache, dass die den Punkten der Erzeugenden der Regelflächen eines Flächenbüschels 2. Grades zugeordneten Strahlen in dem *(TK)* Komplex dieses Flächenbüschels ein System der Erzeugenden einer Regelfläche 2. Grades bilden, die diese erste Erzeugende in ihrem zweiten Erzeugendensystem enthalten, und dass in jedem System der Erzeugenden einer Regelfläche 2. Grades zwei Erzeugende bestehen, die eine Erzeugende des anderen Systems dieser Fläche senkrecht schneiden, was für jede Erzeugende der beiden Systeme gilt, wurde in der vorher erwähnten Arbeit festgestellt, dass die Erzeugenden aller Regelflächen eines Flächenbüschels 2. Grades, also die Bisekanten der Grundraumkurve 4. Ordnung dieses Büschels, als Strahlen zu dem *(RK)* Komplex dieses Büschels gehören. Die zwei sich senkrecht schneidenden Erzeugenden können offenbar auch zusammenfallen, oder konjugiert imaginär sein.

Diese Eigenschaft des *(RK)* Komplexes muss hier etwas näher untersucht werden, da die Strahlen dieser besonderen Kongruenz des *(TK)* Komplexes eine interessante, in der erwähnten Arbeit nicht bemerkte Eigenschaft haben, die dem ganzen *(RK)* Komplex eine neue interessante Form gibt.

Wie bekannt, sind die Strahlen des *(RK)* Komplexes eines Flächenbüschels 2. Grades diejenigen den Raumpunkten zugeordneten Geraden, die diesen Punkt enthalten und rechtwinklig den diesem Punkt zugeordneten Strahl in dem diesem Flächenbüschel zugeordneten *(TK)* Komplex schneiden. Auf Grund der zwei eben erwähnten Eigenschaften jeder Regelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades folgt, dass jede Erzeugende der Regelfläche dieses Flächenbüschels zwei Ausgangspunkte und die zwei diesen Ausgangspunkten zugeordneten Eingangspunkte enthält. Für diese vier Punkte besteht aber kein Grund dafür, dass sie sich in ein Punktepaar zusammenziehen müssten. Jede Erzeugende der Regelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades gehört also zu dem *(RK)* Komplex dieses Flächenbüschels als ein Doppelstrahl. Die zwei einen Raumpunkt *P* enthaltenden Erzeugenden der diesen Raumpunkt enthaltenden Fläche φ dieses Flächenbüschels (φ_u) sind also Doppelerzeugende des *(RK)* Komplexkegels 8. Grades des Punktes (Scheitels) *P*, und Trisekanten der vorher beschriebenen Raumkurve 9. Ordnung der Ausgangspunkte der den Punkt *P* enthaltenden Strahlen des (*RK*) Komplexes (Komplexstrahlkegel des Punktes *P*), wie auch der Raumkurve der Eingangspunkte auf diesem (*RK*) Komplexstrahlkegel des Punktes *P*, der, wie erwähnt, 8. Grades ist. Die Ordnung der Raumkurve der Eingangspunkte auf jedem diesem (*RK*) Komplexstrahlkegel des Punktes *P*, der, wie erwähnt, 8. Weise gefunden werden: Die Berührungspunkte aller einen Raumpunkt *P* enthaltenden Berührungsgeraden aller Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades bilden, wie bekannt, eine allgemeine Fläche 3. Ordnung, auf welcher die zwei Erzeugenden dieses Punktes der diesen Punkt *P* enthaltenden Fläche dieses Büschels liegen. Wie wir eben sahen, sind diese zwei Erzeugenden Doppelstrahlen des (*RK*) Komplexstrahlkegels, der 8. Grades ist. Da jeder Strahl des (*RK*) Komplexes zwei Flächen seines Flächenbüschels 2. Grades berührt, von welchen einer der Ausgangspunkt und der andere sein Eingangspunkt ist, besteht die Kurve der Eingangspunkte der einen Raumpunkt *P* enthaltenden Strahlen des (*RK*) Komplexes aus einem Teil der Durchdringungskurve des Komplexstrahlkegels 8. Grades des Punktes *P* und der erwähnten, dem Punkt *P* zugeordneten allgemeinen Fläche 3. Ordnung. Da sich auf der Durchdringungskurve 24. Ordnung dieser dem Punkt *P* zugeordneten Fläche 3. Ordnung und des diesem Punkt zugeordneten (*RK*) Komplexstrahlkegels 8. Grades die zwei diesen Punkt *P* enthaltenden Doppelstrahlen des (*RK*) Komplexes befinden, besteht der Restteil dieser Durchdringungskurve aus einer Raumkurve 20. Ordnung. Diese Raumkurve zerfällt aber in die Raumkurve 9. Ordnung der Ausgangspunkte auf diesem (*RK*) Komplexstrahlkegel des Punktes *P*, und in die Raumkurve der Eingangspunkte auf diesem Komplexkegel, die also die Ordnung elf haben muss. Offenbar enthält diese Eingangspunktraumkurve 11. Ordnung den Punkt *P* als dreifachen Punkt, da der Punkt *P*, wie alle anderen Punkte des Raumes, der Ausgangspunkt seines Ausgangsstrahles, und der Eingangspunkt seiner drei Eingangsstrahlen im (*RK*) Komplex ist. Die Resultate unserer bisherigen Betrachtungen können also in folgendem Satz zusammengefasst werden:

Die einen Raumpunkt P enthaltenden Strahlen des (RK) Komplexes bilden einen Kegel 8. Grades mit zwei Doppelerzeugenden. Die Ausgangspunkte dieser Komplexstrahlen bilden eine Raumkurve 9. Ordnung und ihre Eingangspunkte bilden eine andere Raumkurve, die 11. Ordnung auf diesem Komplexkegel ist. Die zwei Doppelerzeugenden sind gemeinsame Trisekanten dieser zwei Raumkurven 9. und 11. Ordnung.

In der Ebene τ des Punktes *P* und der Geraden *p*, also in der Berührungsebene der Fläche φ des Büschels (φ_u) im Punkt *P*, befinden sich die zwei Doppelerzeugenden und vier gewöhnliche Erzeugende des (*RK*) Komplexes, die den Punkt *P* enthalten, aber nur acht Punkte jeder dieser zwei auf diesem Kegel sich befindenden Raumkurven 9. und 11. Ordnung. Auf Grund der Tatsache, dass *P* Scheitel des Komplexkegels ist, ist leicht zu ersehen, dass die drei Eingangsgeraden des Punktes *P* in diesen dreifachen Punkt die Raumkurve der Eingangspunkte berühren, und die Ausgangsgerade dieses Punktes in diesem Punkt die Raumkurve der Ausgangspunkte berührt. Diese zwei Raumkurven haben also auf den betreffenden vier Geraden im Punkt P zwei unendlich nahe Punkte. Also auch diese Ebene τ schneidet jede dieser zwei Raumkurven 9. und 11. Ordnung des Punktes P in 9 resp. 11 Punkten.

IV. In der Abt. IV der in der Einleitung erwähnten Arbeit über den (RK) Komplex ist ein Satz ausgeführt, der aber auf Grund unserer neuen Betrachtungen in dieser Arbeit neu stilisiert werden muss, und der jetzt so lautet:

Diejenigen Strahlen des einem Polarraumbüschel zugeordneten (RK) Komplexes, deren Ausgangspunkt auf einer Geraden liegt, bilden eine Regelfläche 6. Grades, auf welcher diese Gerade eine einfache Gerade ist. Die Eingangspunkte dieser Strahlen bilden eine Raumkurve 5. Ordnung.

Für die den Punkten der Geraden p als Eingangspunkten zugeordneten Strahlen des (RK) Komplexes, und für den geometrischen Ort ihrer Ausgangspunkte, ist in diesem Satz nichts ausgesprochen.

In der Abt. V. der betreffenden Arbeit ist ein Satz über den geometrischen Ort der den in einer Ebene liegenden Strahlen des (RK) Komplexes zugeordneten Punktepaare ausgesprochen. Auf Grund unserer Ausführungen muss dieser Satz auf folgende Weise umstilisiert und verbessert werden:

Die den in einer Ebene liegenden und eine Kurve 8. Klasse umhülenden Strahlen des (RK) Komplexes eines Polarraumbüschels zugeordneten Ausgangspunkte bilden eine Kurve 5. Ordnung.

Was die Eingangspunkte dieser Strahlen in dieser Ebene bilden, ist offenbar mit diesem Satz nicht ausgesprochen.

Der nächste Satz in derselben Abt. der erwähnten Arbeit muss aus derselben Gründen auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Diejenigen Strahlen des (RK) Komplexes eines Polarraumbüschels, deren Ausgangspunkte in einer Ebene liegen, bilden eine Strahlkongruenz 9. Ordnung und 5. Klasse.

Über diejenigen Strahlen des (RK) Komplexes, deren Eingangspunkte in einer Ebene liegen, ist in diesem Satz auch nichts gesagt.

In der Abt. VI. der betreffenden Arbeit besteht ein Satz über den geometrischen Ort der zugeordneten Punktepaare der eine Gerade p schneidenden Strahlen des (RK) Komplexes, der auf Grund unserer Ausführungen jetzt so lauten muss:

Die den eine Gerade p schneidenden Strahlen des (RK) Komplexes eines Polarraumbüschels zugeordneten Ausgangspunkte bilden eine Fläche 6. Ordnung, auf welcher diese Gerade g eine einfache Gerade ist.

Auf Grund dieser umstilisierten und ergänzenden Sätzen der betreffenden Arbeit, muss auch der in der Abt. VII. dieser Arbeit ausgesprochene Satz über die Raumtransformation 5. Ordnung, auf folgende Weise erweitert und präzisiert werden:

Durch die Paare der auf den Strahlen des (RK) Komplexes zugeordneten Ausgangs- und Eingangspunkte ist eine Raumtransformation 5.

Ordnung bestimmt, in welcher die den Punkten einer Ebene als Eingangspunkten zugeordneten Ausgangspunkte eine allgemeine Fläche 5. Ordnung bilden.

Was die den in einer Ebene liegenden Ausgangspunkten zugeordneten Eingangspunkte bilden, wird in dieser Arbeit nicht betrachtet.

V. In diesen ergänzenden und verbesserten Sätzen über den (RK) Komplex sahen wir, dass es sich fast immer nur um die geometrischen Örter der Eingangspunkte der gegebenen Ausgangspunkte, oder umgekehrt, handelt. Diejenigen Betrachtungen in welchen die geometrischen Örter der den gegebenen Eingangspunkten zugeordneten Ausgangspunkte, oder umgekehrt, aufgesucht werden sollten, werden in dieser Arbeit nicht ausgeführt.

VI. Auf Grund der Tatsache, dass jedem Punkt des Raumes vier Strahlen des (RK) Komplexes, dessen Ausgangsstrahl und seine drei Eingangsstrahlen zugeordnet sind, und der Tatsache, dass jedem Strahl dieses Komplexes zwei seiner Punkte, sein Ausgangspunkt und sein Eingangspunkt, zugeordnet sind, folgt offenbar, dass auch bei den ganz speziellen Flächenbüscheln 2. Grades deren (RK) Komplexe achten Grades sind. Der in der Abt. 3. der Arbeit »Homothetische polare Räume« (1966), ausgeführte Grad des (RK) Komplexes dieses speziellen Polarraumbüschels hätte uns, auf Grund der eben erwähnten Tatsachen, auch auf den Grad acht geführt, wenn die zwei eben erwähnten Tatsachen über jeden Raumpunkt und über jeden Strahl des (RK) Komplexes in Betracht gezogen wären, so wie es in dieser Arbeit getan wurde. Offenbar wird wegen der Ausartung des (TK) Komplexes eines derartigen speziellen Polarraumbüschels auch sein (RK) Komplex ausarten, aber dies haben wir nicht die Absicht in dieser Arbeit zu betrachten.

In der Arbeit »Koaxiale polare Räume« (1966) wurde neben den anderen drei Strahlkomplexe eines derartigen Polarraumbüschels auch dessen (RK) Komplex erwähnt. Hier aber wurden nur spezielle Eigenschaften und Ausartungen betrachtet, die im Zusammenhang mit den anderen drei Komplexen dieses Büschels stehen, aber mit dem Grad dieses (RK) Komplexes nichts zu tun haben.

Auch in der Arbeit »Konzentrische polare Räume« (1967) wurde neben den drei anderen auch der (RK) Komplex dieses Polarraumbüschels betrachtet. In dieser Arbeit wurde besonders über die durch den (RK) Komplex bestimmte Raumtransformation 5. Ordnung gesprochen, in welcher die geometrischen Örter der Ausgangspunkte in die geometrischen Örter der Eingangspunkte übergeführt wurden. Auf Grund unserer in dieser Arbeit ausgeführten Eigenschafte des (RK) Komplexes, muss diese Betrachtung auf die Raumtransformation 5. Ordnung angewandt werden, in welcher die Eingangspunkte in die Ausgangspunkte übergeführt werden. Die erste Raumtransformation kann auf Grund der in dieser Arbeit ausgeführten Eigenschaften nicht in Betracht gezogen werden. Auf diese Erweiterung und auf gewisse nähere Betrachtungen innerhalb eines derartigen speziellen Flächenbüschels 2. Grades, resp. seines Polarraumbüschels, auf Grund der Ausführungen in dieser Arbeit, haben wir in dieser Arbeit nicht die Absicht einzugehen.

Da die in der Arbeit »Die gemeinsamen Kongruenzen der vier Strahlkomplexe eines Polarraumbüschels« (1968) durchgeführten Betrachtungen, im Zusammenhang mit dem (*RK*) Komplex eines Polarraumbüschels, mit dem Grad dieses Komplexes sehr nahe zusammenhängen, müssen die dort ausgeführten Sätze im Sinn unserer in dieser Arbeit durchgeführten Betrachtungen verbessert und ergänzt werden.

Die gemeinsame Kongruenz des (*TK*) Komplexes und des (*RK*) Komplexes sei auch hier mit (*TR*) bezeichnet. Da der (*TK*) Komplex quadratisch ist und der (*RK*) Komplex den Grad acht hat, müsste die (*TR*) Kongruenz den Grad 16 haben. Wie aber bekannt, müssen die Geraden der vier Hauptpunkte als Strahlen des (*TK*) Komplexes und des (*RK*) Komplexes angenommen werden, also auch Strahlen der (*TR*) Kongruenz sind. Diese vier ausgearteten Strahlbündel der (*TR*) Kongruenz bleiben hier ausserhalb unserer Betrachtungen, gleich so wie in der vorher erwähnten Arbeit. Der (*TR*) Kongruenz bleibt also die Ordnung 12 und die Klasse 16.

Die durch den (*TK*) Komplex, und die durch den (*RK*) Komplex den Strahlen der (*TR*) Kongruenz zugeordneten Punkte bilden Flächen, deren Ordnungen in der vorher erwähnten Arbeit ausgeführt wurden. Zieht man in diesen Ausführungen anstatt der Eigenschaften des (*RK*) Komplexes, die in der erwähnten Arbeit entwickelt wurden, diejenigen heran, die in dieser Arbeit ausgeführt worden sind, dann bekommt der auf der S. 203 der betreffenden Arbeit ausgesprochene Satz folgende neue Form:

Die den Strahlen der gemeinsamen (TR) Kongruenz des (TK) und des (RK) Komplexes eines Flächenbüschels 2. Grades durch den (RK) Komplex zugeordneten Ausgangspunkte bilden eine Fläche 12. Ordnung.

Die den Strahlen der (*TR*) Kongruenz durch den (*TK*) Komplex zugeordneten Eingangspunkte werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Der auf der S. 205 ausgesprochene Satz bekommt auf Grund der neuen Ausführungen diese korrigierte Form:

Die den Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte bilden eine Fläche 12. Ordnung.

Auf Grund dieser zwei letzten Sätze gilt offenbar auch das Folgende:

Diejenigen Punkte des Raumes, die den Strahlen der (TR) Kongruenz eines Flächenbüschels 2. Grades durch deren (TK) Komplex und durch deren (RK) Komplex zugeordnet sind, bilden eine Raumkurve 144. Ordnung.

Die gemeinsame Kongruenz *(MR)* der Komplexe *(MK)* und *(RK)* eines Flächenbüschels 2. Ordnung müsste den Grad 24 haben, wegen der Grade drei und acht des Majcenschen (*MK*) Komplexes und des (*RK*) Komplexes. Schon in der oben erwähnten Arbeit sah man, das die (*MR*) Kongruenz keinen echten Strahl, sondern nur singuläre Strahlen des (*RK*) Komplexes enthalten kann. Da die Geraden der unendlich fernen Ebene als Doppelstrahlen des (*MK*) und des (*RK*) Komplexes angenommen werden müssen, also einen ausgearteten Teil der *(MR)* Kongruenz bilden, der durch ein vierfaches Strahlfeld gebildet wird, bekommt die (MR) Kongruenz die Ordnung *24* und die Klasse *20*. Wie in der erwähnten Arbeit gezeigt, zerfällt diese Kongruenz in zwei Teile, von welchen eine die Ordnung *5* und die Klasse *3* hat, also der andere Teil die Ordnung *19* und die Klasse *17* haben kann. Deswegen muss auch in dem Satz auf S. 211 der erwähnten Arbeit die Ordnung 4 und die Klasse 2 durch die Ordnung 19 und durch die Klasse 17 ersetzt werden. Die Fläche der den Strahlen der (MR) Kongruenz durch den (MK) Komplex zugeordneten Punkte bekommt auf diese Weise anstatt der Ordnung 10 hier die Ordnung 100.

Die gemeinsame Kongruenz (NR) des (RK) und des (NK) Komplexes, die beide achten Grades sind, muss also den Grad 64 haben. Den (NK) Komplex bilden, wie bekannt, die Normalen der Inzidenzflächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Da aber hier die unendlich ferne Ebene des Raumes als ein sechsfaches Strahlfeld zur (NR) Kongruenz gehört, und die Normalen der Grundraumkurve 4. Ordnung des Flächenbüschels 2. Grades eine Kongruenz 12. Ordnung und 4. Klasse bilden, und diese zwei ausgearteten Teile der (NR) Kongruenz ausserhalb unserer Betrachtungen bleiben, wie auch die Strahlen der vier Hauptpunkte die den Komplexen (NK) und (RK) gehören, bleibt der (NR) Kongruenz die Ordnung 48 und die Klasse 54. In den zwei in der Abt. IV. der erwähnten Arbeit auf den S. 213–214 ausgeführten Sätzen, muss diese Tatsache also berücksichtigt werden.

Zieht man in weiteren Ausführungen der Abt. IV. der erwähnten Arbeit die in dieser Arbeit ausgeführten Eigenschaften in Betracht, dann bekommt die in dem Satz auf S. 214 ausgeführte Fläche anstatt der Ordnung 22 die Ordnung 42. Anstatt des auf S. 215 sich befindenden Satzes erhält man den folgenden Satz:

Die den Strahlen der (NR) Kongruenz eines Polarraumbüschels durch den (RK) Komplex zugeordneten Ausgangspunkte bilden eine Fläche 58. Ordnung.

Der auf S. 214 sich befindende Satz (der zweite) bekommt nur die Korrektur der Ordnung der betreffenden Fläche und lautet so:

Die den Strahlen der (NR) Kongruenz eines Polarraumbüschels durch den (NK) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Punkte (Fusspunkte) bilden eine Fläche 42. Ordnung.

Was die Eingangspunkte der Strahlen der (NR) Kongruenz bilden, wird auch hier nicht untersucht.

Die auf der Seite 215 der betreffenden Arbeit durchgeführten Betrachtungen sind auf Grund der neu ausgeführten Eigenschaften, entweder nicht aktuel, oder müssen durch diese neuen Eigenschaften korrigiert werden.

Institut für Mathematik
der Universität in Zagreb

Angenommen zur Veröffentlichung am 12. XII 1969. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

VILIM NIČE

DODATNA RAZMATRANJA KOMPLEKSA NAJKRAĆIH DIRNIH PUTOVA JEDNOG PRAMENA PLOHA 2. STUPNJA

Uvod: Svakom točkom P prostora prolazi jedna ploha φ nekog pramena ploha (φ_u) 2. stupnja. U dirnoj ravnini π te plohe u točki P prolazi njome ∞^1 tangenata, od kojih svaka dira još jednu plohu tog pramena, a sva se ova druga dirališta P_1 nalaze, kao što znamo, na pravcu p, kojim prolaze polarne ravnine pola P s obzirom na sve plohe φ_u pramena (φ_u). Svi tako točkama prostora pridruženi pravci p čine poznati kvadratni tetraedralni kompleks, koji označujemo s (TK). Sve ove tangente u svakoj točki P prostora zvat ćemo dirnim putovima između dviju ploha pramena (φ_u). Najkraći između tih dirnih putova svake točke prostora čine kompleks za koji je u radnji »Geometrijsko mjesto najkraćih dirnih putova među plohama pramena ploha 2. stupnja« utvrđeno da je trećeg stupnja. I ovdje ćemo taj kompleks označiti s (RK). Očito je da za sve zrake tog kompleksa koje označujemo s r, mora vrijediti $PP_1 = r \perp p$.

Svakoj točki prostora pridružena je u spomenutoj radnji jedna zraka r kompleksa (RK), koja je najkraći dirni put točke P kao izlazne točke tog puta. Točka P_1 je zalazna točka tog puta. Dakle, svakoj zraci kompleksa (RK) pridružene su dvije točke, jedna izlazna i jedna zalazna, a svakoj točki prostora po jedna zraka r, koju smo šutke smatrali izlaznom. Na temelju ovakvog gledanja na (RK) kompleks pramena ploha 2. stupnja dobiveni su i svi izvodi u spomenutoj radnji, pa i stupanj (RK) kompleksa.

Naknadnim proširenim razmatranjima (RK) kompleksa u ovoj radnji, u kojima se pokazalo da je svaka točka prostora ne samo izlazna točka jedne zrake (RK) kompleksa nego je ona i zalazna točka triju takvih zraka, od kojih s onom prvom ni jedna nije identična. Na temelju činjenice da svaka točka prostora ima jednu svoju izlaznu i tri svoje zalazne zrake u kompleksu (RK) pokazalo se da stupanj (RK) kompleksa nije treći, nego osmi. S tim u vezi u ovoj radnji su popravljeni i dopunjeni svi stavci izneseni u malo prije citiranoj radnji, kao i u nekim drugim radnjama koje su imale vezu sa stupnjem (RK) kompleksa.

I. Na temelju utvrđene činjenice da na svakoj zraci p kompleksa (TK) postoje tri točke koje su izlazne za one tri zrake kompleksa (RK) kojima zalazne točke padaju u toj zraci p pridruženu točku P u (TK) kompleksu, a od kojih se ni jedna ne podudara s izlaznom zrakom te točke P, određen je stupanj osam (RK) kompleksa. Osim toga se pokazalo da su bisekante temeljne prostorne krivulje 4. reda pramena ploha (φ_u), dakle izvodnice pravčastih ploha tog pramena, dvostruke zrake kompleksa (RK) tog pramena. Kongruencija 2. reda 6. razreda tih bisekanata je prema tome singularni dio (RK) kompleksa. Kompleksni stožac 8. stupnja (RK) kompleksa u svakoj točki prostora ima prema tome po dvije dvostruke izvodnice, koje se podudaraju s izvodnicama one plohe pramena (φ_u) koja tom točkom prolazi. Te izvodnice mogu, naravski, biti realne, konjugirano imaginarne ili mogu pasti skupa u jednu izvodnicu.

II. Primijenimo li novo izvedene i proširene osobine (RK) kompleksa u ovoj radnji na stavke iznesene u spomenutoj radnji »Geometrijsko mjesto najkraćih dirnih putova među plohama pramena ploha 2. stupnja«, tada ti stavci dobivaju ovaj oblik:

a) *(RK) kompleks pramena ploha 2. stupnja je osmog stupnja.*

b) *Zrake (RK) kompleksa koje prolaze jednom točkom prostora čine stožac 8. stupnja s dvije dvostruke izvodnice. Ovim zrakama pridružene izlazne točke čine prostornu krivulju 9. reda, koja prolazi tom točkom, a tim zrakama pridružene zalazne točke čine prostornu krivulju 11. reda, kojoj je vrh P trostruka točka.*

Dvostruke izvodnice kompleksnog stošca vrha P su zajedničke trisekante tih dviju prostornih krivulja 9. i 11. reda.

c) *One zrake (RK) kompleksa nekog pramena ploha 2. stupnja kojima se izlazne točke nalaze na jednom pravcu čine pravčastu plohu 6. stupnja, kojoj je taj pravac jednostruk, dok zalazne točke na tim zrakama čine prostornu krivulju 5. reda.*

d) *Izlazne točke zraka (RK) kompleksa koje leže u jednoj ravnini i omataju krivulju 8. razreda leže na krivulji 5. reda.*

e) *One zrake (RK) kompleksa čije izlazne točke leže u jednoj ravnini čine kongruenciju 9. reda i 5. razreda.*

f) *Izlazne točke zraka (RK) kompleksa koje sijeku neki pravac p čine opću plohu 6. reda, kojoj je pravac p jednostruk.*

g) *Parovima izlaznih i zalaznih točaka na zrakama (RK) kompleksa nekog pramena ploha 2. stupnja određena je prostorna transformacija 5. reda, u kojoj svim točkama neke raznine kao zalaznim točkama pridružene izlazne točke čine opću plohu 5. reda.*

Analogna obratna transformacija izlaznih točaka u zalazne nije u ovoj radnji obuhvaćena.

III. Činjenica da je u (RK) kompleksu pramena ploha 2. stupnja svakoj točki prostora pridružena jedna izlazna i tri zalazne zrake koje njome prolaze, tj. na svakoj se zraci tog kompleksa nalazi njena izlazna i njena zalazna točka, a svaka točka prostora je jednostruko izlazna i trostruko zalazna točka, utječe naravski i na osobine (RK) kompleksa osobitih pramenova ploha 2. stupnja, kao što su homotetični, koaksialni i koncentrični takvi pramenovi. Očito da osobine (RK) kompleksa u radovima o tim specijalnim pramenovima moraju također biti prilagođene gore opisanim činjenicama, kao i izmijenjenom stupnju (RK) kompleksa, ukoliko se taj stupanj u tim radovima pojavljuje.

U radnji »Zajedničke kongruencije četiriju kompleksa pramena polarnih prostora« (1968) povezana su razmatranja o (RK) kompleksu gotovo isključivo s njegovim stupnjem. Na taj način tamo doneseni stavci ostaju uglavnom gotovo iste stilizacije, samo u njima donesene tvorevine dobivaju nove povišene redove, zbog višeg stupnja (RK) kompleksa. Radi se uglavnom o ovim, sada ovdje ispravljenim stavcima. Zajedničku kongruenciju (TK) kompleksa i (RK) kompleksa označit ćemo i ovdje s (TR).

h) *Zajednička kongruencija (TR) kompleksa (TK) i kompleksa (RK) jednog pramena ploha 2. stupnja je 12. reda i 16. razreda.*

i) *Zrakama kongruencije (TR) pramena ploha 2. stupnja preko (RK) kompleksa pridružene izlazne točke čine plohu 12. reda.*

j) *Zrakama kongruencije (TR) preko kompleksa (TK) pridružene točke čine plohu 12. reda.*

Zajedničku kongruenciju kompleksa (RK) i kompleksa (NK) normala incidentnih ploha jednog pramena polarnih prostora označimo s (NR).

k) *Kongruencija (NR) pramena ploha 2. stupnja je 48. reda i 54. razreda.*

l) *Zrakama kongruencije (NR) preko kompleksa (NK) pridružene točke čine plohu 42. reda.*

m) *Zrakama (NR) kongruencije preko kompleksa (RK) pridružene izlazne točke čine opću plohu 58. reda.*

Što čine zalazne točke na zrakama kongruencija (TR) i (NR) jednog pramena ploha 2. stupnja, u ovoj radnji nije istraženo.

Institut za matematiku
Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 12. prosinca 1969. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.