EIN BEITRAG ZU DEN SÄTZEN VON C. G. JACOBI, W. FENCHEL UND V. AVAKUMOVIĆ

Vilko Niče, Zagreb

Sonderabdruck aus
GLASNIK MATEMATIČKI 4 (24) (1969), 291—297

Štamparski zavod »Ognjen Prica« Zagreb, Savska cesta 31, 1969.

GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 4 (24) — No. 2 — 1969.

EIN BEITRAG ZU DEN SÄTZEN VON C. G. JACOBI, W. FENCHEL UND V. AVAKUMOVIĆ

Vilko Niče, Zagreb

Einleitung

C. G. Jacobi publizierte im Jahr 1842 folgenden Satz: Das sphärische Bild der Hauptnormalen einer stetigen geschlossenen doppelpunktlosen Raumkurve teilt die Oberfläche der Einheitskugel in zwei gleiche Teile. Im Jahre 1931 fand W. Fenchel, dass dieser Satz im folgenden enthalten ist: Die Indikatrix der Tangenten einer geschlossenen stetigen sphärischen Kurve teilt die Einheitskugel in zwei flächengleiche Teile. V. Avakumović ergänzte im Jahre 1951 diese zwei Sätze mit folgendem Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die sphärische Kurve k das Tangentenbild einer stetigen geschlossenen und doppelpunktlosen sphärischen Kurve sein soll ist, dass die Kurve k zwei flächengleiche Teile der Einheitskugel begrenzt.

In dieser Arbeit werden diese Sätze auf eine einfache Weise hergeleitet, die sich auf keine differentialgeometrische Mittel stützt, sondern aus einen einfachen visuell klaren Grenzübergang besteht. Auf diese Weise werden auch zwei neue Eigenschaften erhalten, die mit den erwähnten Sätzen in Zusammenhang stehen.

1.

Es sei auf einer Kugel K ein Kreis c gegeben. Das sphärische Bild s der Tangenten dieses Kreises auf derselben Kugel ist derjenige seiner Hauptkreise, dessen Ebene mit der Ebene des Kreises c parallel ist. Der Kreiskegel des Kreises c und des Mittelpunktes O der Kugel K sei mit $(O c)$ bezeichnet. In seiner Verlängerung über den Scheitel O durchdringt der Kegel $(O c)$ die Kugel K in noch einem Kreis c_1, der dem Kreis c gleich ist, und dessen Ebene offenbar mit der Ebene des Kreises c parallel ist. Der Hauptkreis s ist also das sphärische Tangentenbild auch des Kreises c_1.

Teilt man den Kreis c in n gleiche Teile t_n, dann teilen die diese Teilpunkte enthaltenden Erzeugenden des Kegels $(O c)$ den Kreis c_1 offensichlich auch in n gleiche Teile t_n^1 die den Teilen t^n gleich sind. Mit jeder längs dieser Erzeugenden an diesen

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

Kegel (Oc) gelegten Berührungsebene schneide man die Kugel K in Hauptkreisen, und ziehe nur diejenigen Hälften dieser Hauptkreise in Betracht, die durch Teilung durch die Erzeugenden entstanden sind, und sich immer auf derselben Seite befinden, so dass keine zwei von ihnen sich schneiden können. Alle derartigen Hauptkreise teilen die Oberfläche der Kugel K zwischen den Kreisen c, c_1 in n gleiche Teile, die teilweise auch durch Teile der Kreise c, c_1 begrentz sind, und der Hauptkreis s hälftet den Flächeninhalt aller dieser Teile. Dies gilt offenbar für jede Zahl n, die auch ins Unendliche streben kann. Sind die Kreise c, c_1 unendlich klein, ziehen sich also in zwei diametrale Punkte C, C_1 zusammen, dann ist der Hauptkreis s der auf dem Diameter CC_1 normal stehende Hauptkreis.

Man nehme an, dass ein Halbhauptkreis k sich auf der Oberfläche der Kugel K so bewegt, dass seine Grezpunkte die Kreise c, c_1 durchlaufen und dieser bewegliche Haupthalbkreis k in diesen Grenzpunkten die Kreise c, c_1 berührt. Bei dieser Bewegung wird der Haupthalbkreis k die ganze Oberfläche der Kugel K zwischen den Kreisen c, c_1 überdecken, und sein Hälftepunkt S wird den Hauptkreis s beschreiben. Die Verbindungsgerade OS ist immer mit den Tangenten der Kreise c, c_1 in den Grenzpunkten des betreffenden Halbhauptkreises k parallel. Es handelt sich hier offenbar um eine Rotation des Halbhauptkreises k, und im Falle der eben erwähnten Punkte C, C_1 geht diese Bewegung in eine Rotation um die Achse CC_1 über.

2.

Es sei c eine stetige doppelpunktlose auf der Kugel K liegende Kurve, und c_1 die bezüglich des Mittelpunktes O ihr zentralsymmetrisch auf dieser Kugel liegende Kurve. Man bezeichne diese zwei Kurven c, c_1 einfach als »antipodische« Kurven der Kugel K. Offenbar begrenzen zwei geschlossene antipodische Kurven auf der Kugel K zwei gleiche Flächenteile dieser Kugel.

Man wähle auf der Kurve c beliebig zwei Punkte A, B, welchen auf der antipodischen Kurve c_1 die Punkte A_1, B_1 zugeordnet sind. Die Tangente der Kurve c im Punkt A sei mit a bezeichnet. *Abb.* 1. Alle Ebenen der Geraden a schneiden die Kugel K in Kreisen, die die Kurve c und die Tangente a im Punkt A berühren. Man wähle diejenige dieser Ebenen, die den beliebig gewählten Punkt B der Kurve c enthält, und die Kugel K im Kreis d schneidet. Der antipodische Kreis d_1 enthält die Punkte A_1, B_1 und berührt im Punkt A_1 die Tangente a_1 der Kurve c_1, also auch diese Kurve. Die Ebenen der Kreise d, d_1 liegen offenbar im Raum parallel. Auf der Kugel K ziehe man jetzt drei Haupthalbkreise k, k_1 und l_1 so, dass die Haupthalbkreise k, k_1 die antipodischen Kurven c, c_1 in den Punkten A, A_1 resp. B, B_1 berühren, während der Haupthalbkreis l_1 in den Punkten B, B_1 die Kreise d, d_1 berührt. Die drei Haupthalbkreise k, k_1 und l_1 laufen aus ihren Ausgangspunkten auf dieselbe Seite hinaus. Gleitet also der Haupthalbkreis k auf der Kugel K so vorwärts, dass seine Endpunkte A, A_1 auf der Kurven c, c_1 bleiben und er in diesen Punkten die Kurve c, resp. die Kurve c_1 berührt, gelangt dieser Haupthalbkreis k auch in die Lage k_1, und durch eine kleine Rotation um den Durchmesser BB_1 auch in die Lage l_1. Man ziehe jetzt denjenigen Teil der Oberfläche der Kugel K in Betracht, der durch die Haupthalbkreise k, k_1 und durch die Bogen AB, A_1B_1 der Kreise d, d_1 begrentz ist, und innerhalb welchen sich der Halbkreis l_1 befindet. Man bezeichne diesen sphärischen Flächenteil mit $ABk_1B_1A_1k$. Der Haupthalbkreis l_1

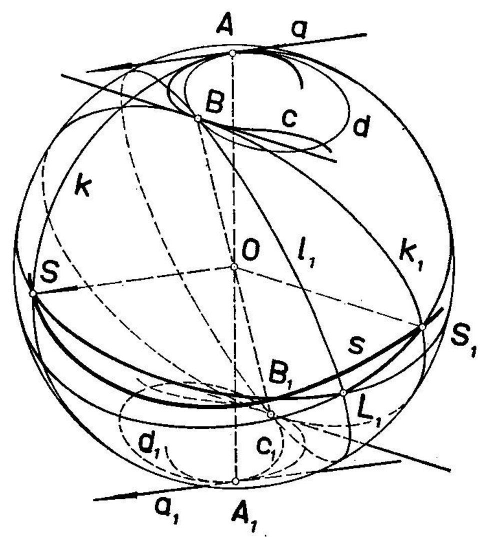

Abb. 1.

teilt diesen Flächenteil in den Teil $ABl_1B_1A_1k$ und in den Teil k_1l_1 innerhalb der Punkte B, B_1, der durch die Haupthalbkreise k_1, l_1 begrentz ist. Es seien die Hälftepunkte der Haupthalbkreise k, k_1 und l_1 mit S, S_1 und L_1 bezeichnet. Auf Grund der Betrachtungen in Abt. 1 wissen wir, dass der Bogen SL_1 des Haupthalbkreises der Punkte S, L_1 den sphärischen Flächenteil $ABl_1B_1A_1k$ in zwei gleiche Teile teilt, während der gleichartige Bogen L_1S_1 dasselbe mit dem Flächenteil k_1l_1 tut. Die Kreisbogen SL_1 und L_1S_1 teilen also zusammen den sphärischen Flächenteil $ABk_1B_1A_1k$ in zwei gleiche Teile, wenn die Bogen AB, A_1B_1 als Bogen der Kreise d, d_1 betrachtet werden. Die sphärischen Flächenteile, begrenzt innerhalb der Punkte A, B durch die Kurven d, c, und innerhalb der Punkte A_1, B_1 durch die Kurven d_1, c_1, sind gleich, da sie antipodisch auf der Kugel K liegen. Ziehen wir jetzt diese zwei Flächenteile dc und d_1c_1 von dem Flächenteil $ABk_1B_1A_1k$ ab, in welchem die Bogen AB und A_1B_1 zu den Kreisen d, d_1 gehören, dann bleibt der gleichnamige Flächenteil übrig, wo aber jetzt die Bogen AB, A_1B_1 als Bogen der Kurven c, c_1 betrachtet werden müssen. Diesen sphärischen Flächenteil der Kugel K teilen also die zwei Kreisbogen SL, L_1S_1 auch in zwei gleiche Teile.

Bewegt sich jetzt der Haupthalbkreis k auf der Kugel K so, dass seine Grenzpunkte A, A_1 längs der Kurven c, c_1 diese berührend gleiten, dann beschreibt der Hälftpunkt S dieses Haupthalbkreises k eine sphärische Kurve s, die, selbstverständlich, auch den Hälftepunkt S_1 des Haupthalbkreises k_1 enthält. Man betrachtet nun auf der Kurve c den Hälftepunkt C ihres Bogens $\overset{\frown}{AB}$, dessen antipodischer Hälftepunkt der Bogens $\overset{\frown}{A_1B_1}$ mit C_1 bezeichnet sei. Werden jetzt unsere Ausführungen auf den Teilen AB und A_1B_1 der Kurven c, c_1 analog auch auf den Teilen AC, A_1C_1 und CB, C_1B_1 dieser Kurven so durchgeführt, dass auf den Teilen AC, A_1C_1 die Endpunkte A, A_1 dieselbe Rolle behalten wie vorher, und die Punkte C, C_1 die Rolle der Punkte B, B_1 übernehmen, während auf den Teilen CB, C_1B_1 die Punkte C, C_1 die Rolle der Punkte A, A_1 spielen, bekommt man zwei analoge neue sphärische Flächenteile, deren Inhalte zusammen dem Inhalt des Flächenteiles $ABk_1B_1A_1k$ gleich sind, wenn die Bogen AB, A_1B_1 auf den Kurven c, c_1 liegen. Der Haupthalbkreis der Punkte C, C_1, der in diesen Punkten die Kurven c, c_1 berührt, heise k_2, während die dem Halbkreise l_1 analogen Halbkreise der Punktepaare C, C_1, B, B_1 mit l_2^{I} und l_2^{II} bezeichnet seien. Die Hälftepunkte dieser Haupthalbkreise k_2, l_2^{I}, l_2^{II} seien mit S_2, L_2^{I} und L_2^{II} bezeichnet. Der Hälftepunkt S_2 des Halbkreises k_2 befindet sich auf der Kurve s, während die Hälftepunkte L_2^{I} und L_2^{II} der Halbkreise l_2^{I} und l_2^{I} der Kurve s viel näher liegen als der Hälftepunkt L_1 des Halbkreises l_1, weil die Winkel, die die Tangenten der Kurve c und der betreffenden Kreise d, d_1 in den Punkten A, C, B bilden, kleiner sind, was wegen der Verkürzung der Längen der Bogen $\overset{\frown}{AC}$ und $\overset{\frown}{CD}$ auf die Hälfte des Bogens $\overset{\frown}{AB}$, resp. der Bogen $\overset{\frown}{A_1C_1}$ und $\overset{\frown}{C_1B_1}$ auf die Hälfte des Bogens $\overset{\frown}{A_1B_1}$ eintreten muss. Dies gilt offenbar auf Grund der stillschweigenden Voraussetzung, dass auf dem Bogen AB der Kurve c kein Wendepunkt dieser Kurve liegt. Die Punkte A, B können nämlich immer so gewählt werden, dass innerhalb des Bogens AB kein Wendepunkt liegt, und sollte einer vorhanden sein, kann er als Grezpunkt des beliebig angenommenen Bogens, so wie die Punkte A, B, angenommen werden.

Teilen wir jetzt die entstandenen Bogenteile $\overset{\frown}{AC}$ und $\overset{\frown}{CB}$ auf dieselbe Weise weiter mit allen mit dieser Teilung verbundenen Betrachtungen, und die neu entstandenen Teile auf dieselbe Weise wieder weiter, d. h. wir betrachten »unendlich kleine« Teile des Bogens $\overset{\frown}{AB}$. Die Hälftepunkte S_n der neu entstandenen Haupthalbkreise k_n bleiben immer auf der Kurve s, während die Hälftepunkte L_n^m der Haupthalbkreise l_n^m der Kurve s immer näher rücken. Beim Grenzübergang dieser Teilung auf unendlich kleine Teile des Bogens AB kommen auch alle Hälftepunkte L_n^m der Kurve s unendlich nahe, resp. sie liegen auf der Kurve s. Die Kurve s teilt also die sphärische, durch das vierseit $ABk_1 B_1 A_1 k$ begrenzte Oberfläche in zwei gleiche Teile. Da dies für jeden Bogenteil der geschlossenen sphärischen Kurve c, resp. c_1, gilt, und die durch die sphärischen geschlossenen Kurven c und c_1 auf der Kugel K begrenzten Flächeninhalte gleich sind (antipodische Flächeninhalte), folgt offenbar, dass das sphärische Tangentenbild einer geschlossenen sphärischen doppelpunktfreien Kurve die Oberfläche der Einheitskugel in zwei gleiche Teile teilt. Wir haben also auf diese Weise die bekannten Sätze vom Jacobi und Fenchel hergeleitet und bewiesen.

3.

Nähert sich bei der in Abt. 2. beschriebenen Bogenteilung des Bogens AB der immer neu gewählte Hälftepunkt C^n dem Punkt A, dann kommt der betreffende Kreis d_n dem Schmiegkreis der sphärischen Kurve c im Punkt A unendlich nahe, wobei er beim Grenzübergang des Teilpunktes C^n in den Punkt A die Stelle des Schmiegkreises übernimmt. Auf Grund dessen und unserer Betrachtungen und Schlüsse in den Abt. 1 und 2, gilt also folgender Satz:

Das sphärische Tangentenbild einer geschlossenen doppelpunktlosen sphärischen Kurve c einer Kugel K ist die spärische Hüllkurve derjenigen Hauptkreise dieser Kugel, deren Ebenen zu den Schmiegebenen dieser sphärischen Kurve c parallel sind.

Diese sphärische Hüllkurve teilt also die Oberfläche der Kugel K in zwei gleiche Teile.

4.

Der Verbindungskegel (Oc) des Mittelpunktes O der Kugel K mit einer ihrer sphärischen geschlossenen Kurve c, schneidet diese Kugel K in der antipodischen Kurve c_1. Die durch den Mittelpunkt O und durch die Schmiegkreise der sphärischen Kurve c bestimmten Kegel sind offenbar die Schmiegkegel des Kegels (Oc) längs seiner Erzeugenden. Der Kegel der Achsen aller dieser Schmiegkegel ist der Evolutenkegel des Kegels (Oc) und er sei mit (Oe) bezeichnet. Der Kegel (Oc) ist also der Evolventenkegel des Kegels (Oe), der die Kugel K in unserer sphärischen Kurve c schneidet. Der Kegel (Oe) hat aber unendlich viele Evolventenkegel (Oc_i), und jeder dieser Evolventenkegel (Oc_i) schneidet die Kugel K in einer sphärischen Kurve c_i und in der dieser Kurve antipodisch liegenden Kurve c_i^1. Alle diese sphärischen Kurven c_i

der Kugel K sind orthogonale Trajektorien der sphärischen Kurve e auf dieser Kugel, der Schnittkurve dieser Kugel mit dem Evolutenkegel $(O e)$, und alle diese sphärischen Kurven c_i, eimschliesslich der Kurven c, c_1, schneiden diejenigen Haupthalbkreise der Kugel senkrecht, die die sphärische Kurve e einhüllen. Wie bekannt, sind die Hauptkreise einer Kugel deren geodätischen Linien. Auf Grund des bekannten Satzes über die orthogonalen Trajektorien der geodätischen Linien weiss man, dass diejenigen Abschnitte auf derartigen Hauptkreisen, die auf ihnen von irgend welchen zwei orthogonalen Trajektorien c, c_1 abgeschnitten werden, gleich sind. Derartige orthogonale Trajektorien auf der Kugel K heissen sphärische Parallelkurven dieser Kugel. Die orthogonalen Trajektorien können offen (transzendent) oder geschlossen (endlicher Länge) sein. Es gilt offenbar, dass alle derartigen sphärischen orthogonalen Trajektorien geschlossen sind, wenn eine von ihnen geschlossen ist. Allen Punkten derartiger sphärischer Parallelkurven, die auf einem Berührungshalbkreis der sphärischen Kurve e liegen, ist derselbe Punkt der sphärischen Kurve s zugeordnet, weil die Tangenten dieser sphärischen Parallelkurven in diesen Punkten auf der Ebene dieses Berührungskreises senkrecht stehen, also untereinander parallel sind.

Man nehme jetzt auf der Kugel K eine geschlossene doppelpunktlose Kurve s an, die die Oberfläche der Kugel K hälftet, und errichte im Mittelpunkt O dieser Kugel die Normalen auf die Ebenen derjenigen Hauptkreise, die diese sphärische Kurve s einhüllen. Man bekommt so den bekannten Kegel $(O e)$. Alle Evolventenkegel $(O c_i)$ dieses Kegels $(O e)$ durchdringen die Kugel K in sphärischen Kurven c_i, c_i^1, die alle das gemeinsame Tangentenbild s haben werden. Wie schon erwähnt, sind alle derartigen sphärischen Kurven c_i, c_i^1 geschlossen, wenn wenigstens eine unter ihnen geschlossen ist. Wie schon in der Einführung erwähnt, hat V. Avakumović bewiesen, dass für jede sphärische Kurve s, die die Oberfläche ihrer Kugel hälftet, immer auf dieser Kugel eine stetige doppelpunktlose geschlossene Kurve besteht, deren Tangentenbild diese sphärische Kurve s ist. Dieser Satz von V. Avakumović kann also durch folgenden ergänzt werden:

Für jede geschlossene doppelpunktlose sphärische Kurve s einer Kugel K, die die Oberfläche dieser Kugel hälftet, bestehen ∞^1 sphärischer geschlossener Kurven auf dieser Kugel, für die diese sphärische Kurve s das gemeinsame Tangentenbild auf dieser Kugel ist.

(Eingegangen am 12. XII 1968.)

Mathematisches Institut der Universität Zagreb

PRILOG STAVCIMA C. G. JACOBIJA, W. FENCHELA i V. AVAKUMOVIĆA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Poznati stavak C. G. Jacobija (1842) o sfernoj slici glavnih normala neprekinute zatvorene prostorne krivulje bez dvostrukih tačaka, nadopunjen kasnije stavcima W. Fenchela (1931) i V. Avakumovića (1951), izveden je ovdje postupkom, koji se nebi mogao nazvati strogo matematičkim, ali je vizuelno i logički vrlo jasan. Tim postupkom dobivena su i ova dva stavka:

a) *Sferna slika tangenata zatvorene neprekinute sferne krivulje bez dvostrukih tačaka je anvelopa onih glavnih kružnica njene kugle, čije su ravnine usporedne s ravninama oskulacionih kružnica te sferne krivulje.*

b) *Za svaku zatvorenu neprekinutu sfernu krivulju s bez dvostrukih tačaka, koja površinu svoje kugle dijeli na dva jednaka dijela, postoji na toj kugli* ∞^1 *neprekinutih zatvorenih sfernih krivulja, kojima je krivulja s zajednička sferna slika njihovih tangenata.*