NEUE BEITRÄGE ZU DEN EIGENSCHAFTEN EINES POLARRAUMBÜNDELS

Vilko Niče, Zagreb

Sonderabdruck aus
GLASNIK MATEMATIČKI 4 (24) (1969), 259—274

Štamparski zavod »Ognjen Prica« Zagreb, Savska cesta 31, 1969.

GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 4 (24) — No. 2 — 1969.

NEUE BEITRÄGE ZU DEN EIGENSCHAFTEN EINES POLARRAUMBÜNDELS

Vilko Niče, Zagreb

Einführung

Durch sieben beliebig angenommene Punkte, oder durch acht assoziierte Punkte ist im Raum, wie bekannt, ein Flächenbündel 2. Grades bestimmt. Wird jede Fläche dieses Bündels als Inzidenzfläche eines Polarraumes angenommen, so ist dadurch ein Polarraumbündel bestimmt.

Durch jeden Polarraum ist, wie bekannt, ein Achsenkomplex bestimmt. In einem Polarraumbündel bestehen also ∞^2 Achsenkomplexe der dieses Bündel bildenden Polarräume. In dieser Arbeit werden einige Eigenschaften des Polarraumbündels im Zusammenhang mit seinen ∞^2 Achsenkomplexen betrachtet.

Die ∞^2 Polarräume eines Polarraumbündels können in ∞^2 Polarraumbüschel zerfällt werden. Wie bekannt, sind jedem Polarraumbüschel folgende vier Strahlkomplexe zugeordnet. Der tetraedrale quadratische Strahlkomplex, der kubische Majcensche Komplex, dann der Normalenkomplex 8. Grades des Inzidenzflächenbüschels und der diesem Polarraumbüschel zugeordnete kubische Tangentialkurzwegekomplex. Also, in jedem Polarraumbündel befinden sich ∞^2 jeder dieser vier Strahlkomplexe, die durch die ∞^2 Büschel des Polarraumbündels bestimmt sind. In dieser Arbeit werden auch die verbindende Eigenschaften dieser vier Strahlkomplexbündel in einem Polarraumbündel betrachtet, die mittels der bekannten Eigenschaften eines Flächenbündels 2. Grades hergeleitet werden. Im Zusammenhang mit diesen vier Strahlkomplexen jedes der ∞^2 Polarraumbüschel eines Polarraumbündels werden auch einige singuläre Eigenschaften dieses Polarraumbündels betrachtet.

1. Eine Eigenschaft der Achsenkomplexe des Polarraumbündels

Eine der wichtigsten Eigenschaften eines Polarraumbündels ist die, dass die einem Raumpunkt P durch alle polaren Räume dieses Bündels zugeordneten Polarebenen ein Ebenenbündel bilden, dessen Scheitel P_1 dem Punkt P involutorisch zugeordnet ist. Nämlich,

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

alle auf die gleiche Weise dem Punkt P_1 zugeordneten Polarebenen bilden das Ebenenbündel des Scheitels P [4].

Nebenbei sei hier erwähnt, dass die Verbindungsgeraden aller derartigen involutorisch zugeordneten Raumpunktpaare Strahlen eines kubischen Strahlkomplexes sind, und durch diese Raumpunktpaare ist eine kubische Raumtransformation bestimmt [4].

Auf Grund der bekannten Definition des Achsenkomplexes eines polaren Raumes folgt, dass jede Gerade des Punktes P als Strahl zum Achsenkomplex eines Polarraumes des gegebenen Polarraumbündels gehört, der diesem Punkt als Pol zugeordnet ist. Nämlich, jede Ebene des diesem Punkt P involutorisch zugeordneten Punktes P_1 ist Polarebene des Pols P in einem Polarraum dieses Polarraumbündels, also jede Gerade des Punktes P steht auf der ihr zugeordneten Ebene des Punktes P_1 senkrecht. Offenbar gilt dasselbe auch für den zugeordneten Punkt P_1, wie auch für alle anderen ∞^3 konjugiert zugeordneten Raumpunktpaare. Es gilt also das Folgende:

Jede Gerade eines Raumpunktes P ist der diesem Punkt als Pol zugeordnete Strahl in dem Achsenkomplex eines in einem Polarraumbündel sich befindenden Polarraumes.

Man betrachte nun alle Punkte einer im Raum sich befindenden Geraden g. Jedem Punkt dieser Geraden ist, wie wir sahen, durch das Polarraumbündel im Raum ein Punkt zugeordnet. Auf Grund der Tatsache, dass durch die beschriebenen konjugiert zugeordneten Punktpaare P, P_1 eine kubische Raumtransformation bestimmt ist, folgt, dass die den Punkten P der gegebenen Geraden g konjugiert zugeordneten Punkte P_1 eine Raumkurve k^3 3. Ordnung bilden. Die die Punkte P_1 enthaltenden und auf der Geraden g senkrecht stehenden Ebenen sind Polarebenen der die Gerade g enthaltenden Pole P in je einem Polarraum des gegebenen Polarraumbündels. Also, die Gerade g ist ein gemeinsamer Strahl der Achsenkomplexe von ∞^1 Polarräumen des Polarraumbündels. Es gilt also folgender Satz:

Jede Gerade des Raumes gehört als gemeinsamer Achsenkomplexstrahl den Achsenkomplexen von ∞^1 Polarräumen eines Polarraumbündels an.

Der einem Strahl eines Achsenkomplexes zugeordnete Fusspunkt ist dessen Schnittpunkt mit der Polarebene, die dem Pol dieses Achsenkomplexstrahles in seinem Polarraum zugeordnet ist, und die, wie bekannt, auf diesem Strahl senkrecht steht. Also der Schnittpunkt jeder Geraden g des Punktes P mit der auf dieser Geraden senkrechten und den konjugiert zugeordneten Punkt P_1 enthaltenden Ebene ist der Fusspunkt dieses dem Pol P zugeordneten Achsenkomplexstrahles in einem Polarraum des Polarraumbündels. Alle derartigen Fusspunkte der Achsenkomplexstrahlen des Pols P bilden also eine Fläche, die das Erzeugnis des Strahlbündels P und des Ebenenbündels P_1 ist, wobei die zugeordneten Elementenpaare im Raum senkrecht stehen. Es handelt sich also offenbar um eine Kugel, da das Erzeugnis dieser zwei korrelativ zugeordneten Bündel, also eine Fläche 2. Grades, den absoluten Kegelschnit enthält. Nimmt man den Punkt P_1 als Scheitel des Strahlbündels, bleibt, offenbar, als Erzeugnis dieser zwei Bündel dieselbe Kugel. Dies folgt auf Grund der Tatsache, dass die dem Pol P_1 in allen Polarräumen unseres Bündels zugeordneten Polarebenen den Punkt P enthalten. Es gilt daher auch folgender Satz:

Die Fusspunkte der einem Pol P zugeordneten Achsenkomplexstrahlen in den Achsenkomplexen aller polaren Räume eines Polarraumbündels liegen auf einer Kugel, für welche der Punkt P und der ihm konjugiert und involutorisch zugeordnete Punkt P_1 in diesem Polarraumbündel die Endpunkte eines Durchmessers sind. Die Fusspunkte der dem Pol P_1 auf dieselbe Weise zugeordneten Achsenkomplexstrahlen liegen auf derselben Kugel.

2. Über die einzelnen Flächen eines Flächenbündels 2. Grades

Ein gewöhnliches Flächenbündel 2. Grades ist, wie bekannt, durch acht assoziierte Punkte bestimmt [4]. Durch jeden neunten Punkt ist, mit diesen acht assoziierten Punkten, eine Fläche dieses Bündels bestimmt, da eine Fläche 2. Grades durch neun Punkte bestimmt ist.

Sind aber nebst den acht assoziierten Punkte noch zwei der vorher erwähnten in diesem Flächenbündel 2. Grades konjugiert zugeordneten Punkte P, P_1 gegeben, dann sieht man auf Grund unserer in der Abt. 1. durchgeführten Betrachtungen, dass durch jede Gerade, oder durch jede Ebene eines dieser zwei Punkte ebenfalls eine Fläche unseres Flächenbündels bestimmt ist. Es sei z. B. eine Gerade p des Punktes P gegeben. Die den Punkt P_1 enthaltende und auf der Geraden p senkrecht stehende Ebene π ist die dem Pol P zugeordnete Polarebene in einem Polarraum des durch das erwähnte Inzidenzflächenbündel 2. Grades bestimmten Polarraumbündels, weil die Gerade p der dem Pol P zugeordnete Strahl des diesem Polarraum zugeordneten Achsenkomplexes ist. Verbindet man nämlich den Punkt P mit den acht gegebenen assoziierten Grundpunkten $A_i (i = 1-8)$ des Flächenbündels 2. Grades und schneidet die Polarebene π mit diesen acht Verbindungsgeraden in den Punkten $Q_i (i = 1-8)$, und findet man auf jeder dieser Verbindungsgeraden denjenigen Punkt $R_i (i = 1-8)$, für welchen $(P\, Q_i\, R_i\, A_i) = -1$ gilt, dann liegen, offenbar, die Punkte R_i auf derjenigen Fläche unseres durch die acht assoziierten Grundpunkte A_i bestimmten Flächenbündels, die durch die Gerade p des Punktes P, oder durch die Ebene π des Punktes P_1, bestimmt ist. Ist ein Flächenbündel 2. Grades durch acht assoziierte Punkte gegeben, dann können offenbar nicht beide Punkte P, P_1 eines konjugiert zugerdneten Paares beliebig angenommen werden, da jedem Raumpunkt P durch ein gegebenes Flächenbündel 2. Grades nur ein bestimmter Punkt P_1 involutorisch zugeordnet ist.

3. Über die vier erwähnten Strahlkomplexe der in einem Flächenbündel 2. Grades sich befindenden Flächenbüschel

Die einem Punkt in einem Polarraumbüschel zugeordneten Polarebenen bilden, wie bekannt, ein Ebenenbüschel, dessen Achse diesem Punkt eineindeutig im Raum zugeordnet ist. Die allen Raumpunkten auf diese Weise durch ein Polarraumbüschel zugeordneten Achsen bilden den bekannten, diesem Polarraumbüschel zugeordneten, quadratischen tetraedralen Strahlkomplex. Das gemeinsame Polartetraeder dieses Polarraumbüschels ist das Haupttetraeder dieses tetraedralen Strahlkomplexes.

Es sei auch hier durch assoziierte Punkte $A_i (i = 1—8)$ ein Polarraumbündel gegeben, und einem Punkt P sei durch dieses Polarraumbündel der Punkt P_1 konjugiert zugeordnet. Den Punkt P_1 enthalten, wie bekannt, alle dem Punkt P in dem Polarraumbündel ∞^2 zugeordneten Polarebenen. Die diesem Punkt P zugeordneten Strahlen in den tetraedralen Strahlkomplexen aller ∞^2 Polarraumbüschel unseres Polarraumbündels müssen also den dem Punkt P involutorisch zugeordneten Punkt P_1 enthalten, bilden also das Strahlbündel $\{P_1\}$. Da aber analog wie vorher die dem Pol P_1 zugeordneten ∞^2 Polarebenen den Punkt P enthalten, gilt offenbar für den Punkt P_1 dasselbe wie für den Punkt P. Nämlich, die dem Punkt P_1 zugeordneten Strahlen der tetraedralen Strahlkomplexe aller ∞^2 Polarraumbüschel des gegebenen Polarraumbündels enthalten den Punkt P, und bilden das Strahlbündel $\{P\}$ dieses Scheitels. Es gilt also folgender Satz:

Die einem Raumpunkt P zugeordneten Strahlen in den tetraedralen Strahlkomplexen aller ∞^2 Polarraumbündel eines Polarraumbündels enthalten einen Punkt P_1, und die diesem Punkt P_1 auf die gleiche Weise zugeordneten Strahlen dieser ∞^2 tetraedralen Strahlkomplexe enthalten den Punkt P. Die Punkte P, P_1 bilden die bekannten konjugiert zugeordneten Punktpaare in allen Polarräumen des Polarraumbündels.

Es sei in dem tetraedralen Strahlkomplex eines Polarraumbüschels unseres Polarraumbündels dem Punkt P der Strahl t zugeordnet. Die ebene dieses Strahles t und des Punktes P ist die Berührungsebene in diesem Punkt einer Inzidenzfläche dieses Polarräumbüschels. Jede diese Gerade t schneidende und den Punkt P enthaltende Gerade berührt die erwähnte Inzidenzfläche im Punkt P. In ihrem Schnittpunkt mit dem Strahl t berührt sie aber noch eine andere Inzidenzfläche dieses Polarraumbüschels. Auf Grund einer der Definitionen des Majcenschen Komplexes ist die den Punkt P enthaltende Gerade $m \parallel t$ ein Strahl des Majcenschen Komplexes dieses Polarraumbüschels, der dem Punkt P zugeordnet ist. Die den Punkt P enthaltende und den Strahl t senkrecht schneidende Gerade $r \perp t$ gehört, wie bekannt, als Strahl zu dem diesem Polarraumbüschel zugeordneten Tangentialkurzwegekomplex. Die Normale der Berührungsebene (Pt) im Punkt P

ist offenbar derjenige Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Normalenkomplexes, der diesem Fusspunkt zugeordnet ist.

Es sei t ein Strahl des Punktes P_1. Wie gezeigt, kann dieser Strahl als der dem Punkt P zugeordnete Strahl des tetraedralen Strahlkomplexes eines Polarraumbüschels in unserem Polarraumbündel angenommen werden. Die den Punkt P enthaltende und die Gerade t senkrecht schneidende Gerade r ist, wie eben erwähnt, der dem Punkt P zugeordnete Strahl in dem Tangentialkurzwegekomplex desselben Polarraumbüschels. Auf diesem Strahl r ist der Punkt P der Ausgangspunkt seines Tangentialweges, und sein Schnittpunkt mit dem Strahl t sein Endpunkt. Da die zwei sich schneidenden Strahlen t, r im Raum aufeinander senkrecht stehen, folgt, dass die Endpunkte der den Punkt P enthaltenden Strahlen der Tangentialkurzwegekomplexe aller Polarraumbüschel unseres Polarraumbündels, als Schnittpunkte der zwei die Punkte P, P_1 enthaltenden senkrecht stehenden Geraden, auf einer Kugel liegen müssen. Da der Punkt P, oder der Punkt P_1, im Raum ganz beliebig angenommen werden kann, gilt folgender Satz:

Nimmt man einen Raumpunkt P als Ausgangspunkt aller diesem Punkt zugeordneten Strahlen in den Tangentialkurzwegekomplexen aller Polarraumbüschel eines Polarraumbündels an, dann liegen die Endpunkte dieser Tangentialwege auf derjenigen Kugel, für welche der Punkt P und der ihm durch dieses Polarraumbündel konjugiert zugeordnete Punkt P_1 *Diametralpunkte sind.*

Man kann aber in unseren eben durchgeführten Betrachtungen auch die Gerade r des Punktes P als Strahl des tetraedralen Strahlkomplexes eines Polarraumbüschels in unserem Polarraumbündel annehmen, der dem Punkt P zugeordnet ist. In diesem Fall ist, auf Grund des erwähnten Zusammenhanges der einem Raumpunkt zugeordneten Strahlen der vier Strahlkomplexe eines Polarraumbüschels, die Gerade t der dem Punkt P zugeordnete Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Tangentialkurzwegekomplexes. Also, der Schnittpunkt der Geraden t, r ist auch Endpunkt des Tangentialweges des Strahles t, wobei der Ausgangspunkt im Punkt P_1 liegt. Weil dies für jedes involutorisch zugeordnete Paar P, P_1 des Polarraumbündels gilt, gilt offenbar auch folgender Satz:

Die Endpunkte derjenigen Strahlen der Tangentialkurzwegekomplexe eines Polarraumbündels, die zwei Punkten eines konjugierten, durch dieses Polarraumbündel zugeordneten Punktepaares zugeordnet sind, also zwei Strahlbündel bilden, und der Scheitel eines jeden dieser Bündel der Ausgangspunkt jedes seiner Strahlen ist, liegen auf derselben Kugel, für welche die Punkte des in diesem Polarraumbündel konjugiert zugeordneten Punktpaares diametral liegende Punkte sind.

Wie wir bisher sahen, ist jede Gerade eines Punktes P Strahl eines der ∞^2 tetraedralen Strahlkomplexe, die zu den ∞^2 Polarraumbüscheln unseres Polarraumbündels gehören. Dieser Strahl ist in diesem Strahlkomplex dem Punkt P_1 zugeordnet, welcher dem Punkt P konjugiert und involutorisch zugeordnet ist. Jede dieser Geraden ist auch dem Punkt P in je einem der ∞^2 Majcenschen Strahlkomplexe, dann je in einem der ∞^2 Normalenkomplexe und in je einem der ∞^2 Tangentialkurzwegekomplexe als Strahl zugeordnet, welche Strahlkomplexe, wie bekannt, den ∞^2 Polarraumbüscheln des Polarraumündels zugeordnet und durch sie bestimmt sind.

Ein Polarraumbündel ist, wie erwähnt, durch das Flächenbündel 2. Grades seiner Inzidenzflächen gegeben, welches, wie bekannt, durch acht assoziierte Punkte bestimmt ist. In unserer Arbeit sind diese assoziierten Punkte mit A_i $(i = 1—8)$ bezeichnet. Wird ein Punkt P und eine Ebene π ganz beliebig gegeben, die als Pol und dessen Polarebene eines Polarraumes betrachtet werden sollen, können, wie vorher gezeigt, sehr leicht weitere acht Punkte der Inzidenzfläche dieses Polarraumes konstruktiv gefunden werden. Dadurch ist also diese Inzidenzfläche auch eindeutig vollständig bestimmt. Betrachtet man anstatt der Ebene π eine andere Ebene π_1 als Polarebene des Pols P, so wird damit eine neue Fläche des Inzidenzflächenbündels unseres Polarraumbündels gegeben, die mit der vorigen, wie bekannt, ein Flächenbüschel 2. Grades bildet, durch welches ein Polarrambüschel unseres Polarraumbündels gegeben ist. Die Schnittgerade g der Ebenen π, π_1 ist offenbar ein Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Strahlkomplexes, der dem gegebenen Punkt P zugeordnet ist, so dass auf ihm auch der dem Punkt P durch das Polarraumbündel konjugiert zugeordnete Punkt P_1 liegt.

Auf Grund der Tatsache, dass der einem Punkt P zugeordnete Strahl des Tangentialkurzwegekomplexes eines Polarraumbüschels den diesem Punkt zugeordnete Strahl des tetraedralen Strahlkomplexes dieses Polarraumbüschels senkrecht schneidet, folgt, dass jeder Strahl des Tangentialkurzwegekomplexes dieses Polarraumbüschels auch Strahl eines der ∞^1 Achsenkomplexe ist, die durch die Polarräume dieses Polarraumbüschels bestimmt sind. Jedem Polarraum dieses Polarraumbüschels ist, wie bekannt, ein Achsenkomplex zugeordnet, aber jedem dieser Achsenkomplexe auch ein Polarraum dieses Polarraumbüschels. In der Abt. 1. dieser Arbeit wurde ausgeführt, dass jede Gerade des Raumes ein Strahl von ∞^1 Achsenkomplexe ist, die durch ∞^1 Polarräume eines Polarraumbündels bestimmt sind. Auf Grund dessen folgt, dass eine Gerade ein gemeinsamer Strahl von ∞^1 Tangentialkurzwegekomplexe von ∞^1 Polarraumbüscheln unseres Polarraumbündels ist. Man wird es aber hier auf folgende Weise beweisen. Es soll auch hier eine ganz beliebige Gerade p des Raumes betrachtet werden, gleich so wie es bei der Betrachtung der Achsenkomplexe eines Polarraumbündels der Fall war. Die den Punkten P^g der Geraden g durch das Polarraumbündel konjugiert zugeordneten Punkte $P_1{}^g$ bilden, wie bekannt, eine Raumkurve k^3 3. Ordnung. Die die Punkte $P_1{}^g$ enthaltenden und auf der Gerade g senkrecht stehenden Ebenen sind Polarebenen π_g der Pole P^g in je einem Polarraum des Polarraumbündels. Der Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene π sei mit Q bezeichnet. Auf Grund der vorher ausgeführten Betrachtungen wissen wir, dass die Verbindungsgerade $P_1{}^g Q$ als Strahl des tetraedralen Strahlkomplexes eines Polarraumbüschels unseres Polarraumbündels angenommen werden kann, wenn die Verbindungsgerade $P^g Q = g$ ein Strahl des Tangentialkurzwegekomplexes eines der erwähnten Polarraumbüschel ist. Da dies, wie eben erwähnt, in diesem Fall so ist, sind alle Verbindungsgeraden der Punkte $P_1{}^g$ mit den ihnen auf die beschriebene Weise zugeordneten Punkten Q der Geraden g Strahlen je eines tetraedralen Strahlkomplexes der Polarraumbüschel in unserem Polarraumbündel. Aber, wie schon gezeigt wurde, es kann jede der zwei Verbindungsgeraden $P^g Q$ und $P_1{}^g Q$ Strahl des einen und des anderen der besprochenen zwei Strahlkomplexe sein. Demnach kann die Verbindungsgerade $P_1{}^g Q$ als Strahl des Tangentialkurzwegekomplexes eines besprochenen Polarraumbüschel betrachtet werden, und deswegen wird in jedem der ∞^1 Fällen die Gerade $g = P^g Q$ auch Strahl je eines tetraedralen Komplexes unseres Polarraumbündels sein. Auf Grund desen gilt also auch folgender Satz:

Jede Gerade des Raumes gehört als Strahl zu ∞^1 tetraedralen Strahlkomplexen von ∞^1 Polarraumbüschel eines Polarraumbündels.

Zieht man also alle Punkte P^g einer Geraden g in Betracht, dann bilden die diesen Punkten P^g zugeordneten Strahlen in den tetraedralen Strahlkomplexen derjenigen Polarraumbüschel, zu deren Tangentialkurzwegekomplexen die Gerade g als Strahl göhert, eine Regelfläche. Die Erzeugenden dieser Regelfläche schneiden die der Geraden g auf die vorher beschriebene Weise zugeordnete kubische Raumkurve k^3, so wie rechtwinklig die Gerade g. Es handelt sich also um ein Konoid, dessen Leitlinien die kubische Raumkurve k^3, die Gerade g und die unendlich ferne auf der Geraden g senkrecht liegende Gerade sind. Diese Regelfläche liegt also in einer linearen Strahlkongruenz und in einem kubischen Strahlkomplex, hat also den Grad $3(1 + 1) = 6$. Da jede auf der Geraden g senkrechte Ebene die kubische Raumkurve k^3 in drei Punkten schneidet, und jede Ebene der Geraden g das Gleiche tut, folgt offenbar, dass die Gerade g und die unendlich ferne Leitgerade dieses Konoides dessen dreifache Geraden sind. Es gilt also folgender Satz:

Die den Punkten einer Geraden g zugeordneten Strahlen in denjenigen tetraedralen Strahlkomplexen der Polarraumbüschel eines Polarraumbündels, deren Tangentialkurzwegekomplexe die

Gerade g als Strahl enthalten, bilden ein Konoid 6. Grades, für welches die Gerade g und die unendlich ferne Leitgerade dreifache Geraden sind.

Auf Grund der Tatsache, dass jede der vorher beschriebenen Verbindungsgeraden $P^g Q \perp P_1{}^g Q$ als Strahlen eines tetraedralen Strahlkomplexes, oder eines Tangentialkurzwegekomplexes der Polarraumbüschel unseres Polarraumbündels angenommen werden können, bilden die den Punkten der Geraden g zugeordneten Strahlen derjenigen Tangentialkurzwegekomplexe der erwähnten Polarraumbüschel, deren tetraedrale Strahlkomplexe die Gerade g als Strahl enthalten, auch ein Konoid, das mit dem eben beschriebenen identisch ist. Also gilt auch folgender Satz:

Die den Punkten einer Geraden g zugeordneten Strahlen in denjenigen Tangentialkurzwegekomplexen der Polarraumbüschel eines Polarraumbündels, deren tetraedrale Strahlkomplexe die Gerade g als Strahl enthalten, bilden ein Konoid 6. Grades, für welches die Gerade g und die unendlich ferne Leitgerade dreifache Gerade sind.

Wie bekannt, sind jedem Strahl eines Tangentialkurzwegekomplexes zwei auf ihm liegende Punkte zugeordnet. Einer derselben ist Aussgangspunkt und der andere Endpunkt des in diesem Strahl sich befindenden räumlichen Tangentialweges zwischen zwei Inzidenzflächen desjenigen Polarraumbüschels, welchem dieser Tangentialkurzwegekomplex zugeordnet ist. Auf Grund dieser Tatsache kann der letzte Satz auch so lauten:

Diejenigen Tangentialkurzwege deren Ausgangspunkte auf einer Geraden g liegen, und die zu denjenigen Tangentialkurzwegekomplexen der Polarraumbüschel eines Polarraumbündels gehören, für welche die den Polarraumbüscheln zugeordneten tetraedralen Strahlkomplexe die Gerade g als Strahl enthalten, haben ihre Endpunkte auf einer Raumkurve 3. Ordnung. Jeder Punkt der Geraden g ist Ausgangspunkt dreier derartiger Tangentialkurzwege, während in jedem Punkt dieser kubischen Raumkurve nur einer dieser Tangetialkurzwege endet.

Auf Grund der vorher beschriebenen Zusammenstellung der einem Raumpunkt P zugeordneten Strahlen t, m, n und r der vier Strahlkomplexe eines Polarraumbüschels ist leicht ersichtlich, dass die Strahlen m, n, r des Majcenschen Komplexes, des Normalenkomplexes und des Tangentialkurzwegekomplexes eindeutig bestimmt sind, wenn der diesem Punkt P zugeordnete Strahl t des tetraedralen Komplexes bekannt ist. Man nehme wieder eine Gerade g im Raum als gemeinsamen Strahl der beschriebenen ∞^1 tetraedralen Strahlkomplexe an, in welchen die diesem Strahl zugeordneten Punkte eine Raumkurve 3. Ordnung bilden. Auf Grund der Tatsache, dass die einem Raumpunkt zugeordneten Strahlen des tetraedralen Strahlkomplexes und des Majcenschen Komplexes parallel sind, gilt offebar auch folgender Satz:

Die mit einer Geraden g parallelen Strahlen der Majcenschen Strahlkomplexe derjenigen Polarraumbüschel eines Polarraumbündels, für welche die den Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Strahlkomplexe diese Gerade g als ihren gemeinsamen Strahl enthalten, bilden einen mit diesem Strahl g parallelen Zylinder 3. Grades. Die den Erzeugenden dieses Zylinders als Strahlen der Majcenschen Komplexe zugeordneten Punkte bilden eine Raumkurve 3. Ordnung.

Betrachtet man anstatt einer ganz beliebigen Geraden eine Verbindungsgerade zweier durch das Polarraumbündel konjugiert zugeordneter Punkte P, P_1, so wird den Punkten dieser Geraden eine kubische Raumkurve auch hier zugeordnet, für welche aber diese Verbindungsgerade eine Bisekante sein wird, da die Punkte P, P_1 einander konjugiert zugeordnet sind. Das eben in dem Satz erwähnte Konoid 6. Grades zerfällt in diesem Fall in zwei Strahlbüschel der Punkte P, P_1 und in eine konoidale Regelfläche 4. Grades X. Art (nach Sturm).

Wie bekannt, steht der einem Punkt P zugeordnete Strahl des Normalenkomplexes eines Polarraumbüschels senkrecht auf der Ebene dieses Punktes und des ihm zugeordneten Strahles in dem tetraedralen Komplex dieses Polarraumbüschels, und enthält, selbstverständlich, diesen Punkt. Die in den Punkten Q der kubischen Raumkurve k^3 auf die Ebenen dieses Punktes und der Geraden g errichteten Normalen bilden eine Regelfläche, die ein Konoid ist. Jede seiner Erzeugenden ist ein Strahl eines der Normalenkomplexe, die denjenigen Polarraumbüscheln unseres Polarraumbündels zugeordnet sind, zu welchen wieder die Gerade g als gemeinsamer Strahl der diesen Polarraumbüscheln zugeordneten tetraedralen Strahlkomplexe gehört. Diese Regelfläche kann als Erzeugnis der unendlich fernen Punktreihe auf der unendlich fernen Leitgeraden und der Punktreihe auf der kubischen Raumkurve k^3 erhalten werden. Jedem Punkt der kubischen Raumkurve k^3 ist ein Punkt der unendlich fernen Leitgerade zugeordnet, und jeder Punkt dieser Leitgeraden wird durch drei Erzeugende dieser Regelfläche mit drei Punkten der kubischen Leitkurve k^3 verbunden. Dieses Konoid hat also den Grad $(3 \cdot 1 + 1 \cdot 3) = 6$. Es gilt also auch folgender Satz:

Die Strahlen der Normalenkomplexe derjenigen Polarraumbüschel eines Polarraumbündels, welche einer Geraden g so zugeordnet sind, dass diese Gerade als gemeinsamer Strahl den tetraedralen Komplexen aller dieser Polarraumbüschel angehört, bilden ein Konoid 6. Grades, dessen unendlich ferne Leitgerade dreifach ist, und auf der Geraden g senkrecht steht.

Die durch diese tetraedralen Strahlkomplexe der Geraden g zugeordnete Raumkurve k^3 liegt als einfache Kurve auf diesem Konoid.

Auf Grund der vorher beschriebenen Lage der einem Punkt P zugeordneten Strahlen t, m, n und r der bekannten vier einem

Polarraumbüschel zugeordneten Strahlkomplexe folgt, dass in den Punkten Q der kubischen Raumkurve k^3 die Ebenen dieser Punkte und der Geraden g je eine Inzidenzfläche des Inzidenzflächenbündels unseres Polarraumbündels berühren. Ausser dem ist leicht ersichtlich, dass in jedem Polarraumbüschel, in dem wir den einem Punkt P zugeordneten Strahl g in dem tetraedralen Komplex dieses Polarraumbüschels kennen, eine Inzidenzfläche dieses Polarraumbüschels besteht, die in diesem Punkt P diese Ebene dieses Punktes berührt. Auf Grund dessen und des übrigen bisher Betrachteten gilt folgender Satz:

Es bestehen in einem Polarraumbündel immer ∞^1 so verteilte Polarraumbüschel, dass die Ebenen einer gegebenen Geraden in jedem diesem Polarraumbüschel als Polarebenen zu einem gemeinsamen Pol P gehören, und alle diese ∞^1 Pole bilden eine Raumkurve 3. Ordnung. Jede Gerade des Raumes zerteilt die ∞^2 Polarräume eines Polarraumbündels auf diese Weise in ∞^1 Polarraumbüschel, durch welche die ihr zugeordnete Raumkurve 3. Ordnung bestimmt ist. In jedem Punkt dieser Raumkurve 3. Ordnung berührt die Ebene dises Punktes und der gegebenen Geraden eine Inzidenzfläche des diesem Punkt und dieser Geraden zugeordneten Polarraumbüschels.

4. Einige singuläre Eigenschaften des Polarraumbündels

Wie bekant ist jedem Stahrl des Majcenschen Komplexes eines Polarraumbüschels ein auf diesem Strahl liegender Punkt zugeordnet. In diesem Punkt berührt dieser Strahl eine Inzidenzfläche dieses Polarraumbüschels, und in ihrem unendlich fernen Punkt berührt er eine andere Inzidenzfläche desselben Inzidenzflächenbüchels. Die Mittelpunkte der Inzidenzflächen, die ein Flächenbüschels 2. Grades bilden, liegen, wie bekannt, auf einer Raumkurve 3. Ordnung. Jeder Punkt dieser Raumkurve enthält, wie jeder andere Raumpunkt, eine Inzidenzfläche dieses Polarraumbüschels. Die den Punkten dieser Raumkurve zugeordneten Strahlen des tetraedralen Komplexes dieses Polarraumbüschels liegen unendlich fern, und hüllen in der unendlich fernen Ebene eine Kurve 2. Klasse ein. Die Polarebene des Mittelpunktes einer Fläche 2. Grades ist, wie bekannt, die unendlich ferne Ebene. Alle Berührungsgeraden einer Inzidenzfläche des Polarraumbüschels im Mittelpunkt einer anderen dieser Inzidenzflächen, die diesen Mittelpunkt enthält, sind also Strahlen des Majcenschen Komplexes dieses Polarraumbüschels, da sie diese Inzidenzfläche, in diesem Mittelpunkt einer anderen, berühren, und den diesem Mittelpunkt zugeordneten unendlich fernen Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Komplexes schneiden. Dadurch berühren sie also noch eine Inzidenzfläche unendlich fern. In jedem Polarraumbüschel bestehen also ∞^1 Punkte, welchen nicht einer, sondern ∞^1 ein

Strahlbüschel bildende Strahlen des Majcenschen Komplexe dieses Polarraumbüschels zugeordnet sind, und alle diese Punkte bilden eine Raumkurve 3. Ordnung. Man betrachte jetzt die analoge Situation in einem, durch acht assoziierten Punkte bestimmten, Polarraumbündel.

Die Mittelpunkte der ∞^2 Inzidenzflächen des Inzidenzflächenbündels eines Polarraumbündels bilden, wie bekannt, eine Fläche 3. Ordnung. Der jedem Punkt dieser Fläche durch das Polarraumbündel konjugiert zugeordnete Punkt liegt unendlich fern, da diese Fläche 3. Ordnung durch die, am Anfang erwähnte, kubische Raumtransformation der unendlich fernen Ebene entstanden ist. Zerlegt man auf irgend eine Weise das Polarraumbündel in ∞^1 Polarraumbüschel, dann bilden offenbar die Mittelpunktkurven der Inzidenzflächenbüschel dieser ∞^1 Polarraumbüschel die eben erwähnte Fläche 3. Ordnung. Da kein Punkt dieser Fläche 3. Ordnung der Mittelpunkt zweier Inzidenzflächen unseres allgemeinen Polarraumbündels sein kann, also jeden Punkt dieser Fläche nur eine der diese Fläche 3. Ordnung bildenden, eben erwähten, Mittelpunktkurven 3. Ordnung enthält, sieht man, dass jeder Punkt dieser Fläche 3. Ordnung ∞^1 ein Strahlbüschel bildende Geraden enthält, die in diesem Punkt eine Inzidenzfläche unseres Polarraumbündels berühren, und eine andere dieser Inzidenzflächen unendlich fern berühren. Also alle diese Berührungsgeraden in diesem Punkt sind die demselben zugeordneten Strahlen in dem Majcenschen Komplex eine Polarraumbüschels dieses Polarraumbündels. Für ein Polarraumbündel gilt also auch folgender Satz:

In Rahmen eines Polarraumbündels besteht eine stetige Menge von ∞^2 singulärer Raumpunkte, welche nicht nur ein Strahl in einem Majcenschen Komplex dieses Polarraumbündels zugeordnet ist, sondern unendlich viele, die ein Strahlbüschel dieses Punktes bilden. Alle diese Punkte bilden die Fläche 3. Ordnung, auf welcher die Mittelpunkte aller Inzidenzflächen dieses Polarraumbündels liegen.

Alle derartigen Strahlen des Majcenschen Komplexes eines Polaraumbündels, bzw. die den ∞^1 Punkten der kubischen Mittelpunktkurve zugeordneten ∞^1 Strahlbüschel, gehören auch als ausgearteter Teil dem Tangentialkurzwegekomplex dieses Polarraumbüschels an [2]. Man sieht also, dass auch folgender Satz gilt:

Alle den Punkten der kubischen Mittelpunktfläche des Inzidenzflächenbündels eines Polarraumbündels zugeordneten Strahlen in den Majcenschen Komplexen der Polarraumbüschel dieses Polarraumbündels, sind auch Strahlen der diesen Polarraumbüscheln zugeordneten Tangentialkurzwegekomplexe. die aber nur zu gewissen ausgearteten Teilen dieser Tangentialkurzwegekomplexe gehören.

Man weiss, dass auf der Fläche 3. Ordnung der Mittelpunkte aller Inzidenzflächen eines Polarraumbündels die bekannte Kernraum kurve 6. Ordnung liegt, die durch die Scheitel der in dem Inzidenzflächenbündel des Polarraumbündels sich befindenden Kegel gebildet wird [4]. Das Inzidenzflächenbüschel jedes Polarraumbüschels unseres Polarraumbündels enthält, wie bekannt, vier dieser Kegel, deren Scheitel die Scheitel des Polartetraeders eines Inzidenzflächenbüschels sind. Die Geraden der vier Scheitelpunkte des Polartetraeders eines Polarraumbüschels sind Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Komplexes, sowie des ihm zugeordneten Normalenkomplexes und des ihm zugeorneten Tangentialkurzwegekomplexes. Durch jedes Polarraumbüschels des Polarraumbündels ist auf dieser Raumkurve 6. Ordnung ein Punktquadrupel zugeordneter Scheitelpunkte des Polartetraeders dieses Polarraumbüschels bestimmt. Da es in unserem Polarraumbündel ∞^2 Polarraumbüschel gibt, befinden sich auf der erwähnten Raumkurve ∞^2 der beschriebenen Scheitelpunktquadrupel. Also die Geraden eines jeden Punktes der erwähnten Kernraumkurve 6. Ordnung sind Strahlen der eben erwähnten drei Komplexe in Polarraumbüscheln des gegebenen Polarraumbündels. Dies kann durch folgenden Satz ausgesprochen werden:

Die Unisekanten der durch die Scheitelpunkte der Kegel des Inzidenzflächenbündels eines Polarraumbündels gebildeten Kernkurve 6. Ordnung sind Strahlen eines jeden einem Polarraumbüschel unseres Polarraumbündels zugeordneten tetraedralen Komplexes, Normalenkomplexes und Tangentialkurzwegekomplexes, die durch jedes derartige Polarraumbüschel bestimmt sind.

Diejenigen Strahlen der Scheitelpunkte des Polartetraeders eines Polarraumbüschels, die dem Majcenschen Komplex dieses Polarraumbüschels angehören, bilden ein Strahlbüschel dieser Scheitelpunkte, dessen Ebene mit der gegenüberliegenden Seitenebene dieses Polartetraeders parallel ist [1]. Also jede Gerade eines Punktes der vorher erwähnten Kernraumkurve 6. Ordnung ist Strahl nur eines Majcenschen Komplexes innerhalb derjenigen Majcenschen Komplexe die den Polarraumbüscheln eines Polarraumbündels zugeordnet sind. Es gilt also auch folgender Satz:

Jede Unisekante der Kernraumkurve 6. Ordnung eines Polarraumbündels ist Strahl nur eines Majcenschen Komplexes unter den ∞^2 derartigen Komplexen die den ∞^2 Polarraumbüscheln des Polarraumbündels zugeordnet sind.

In einem Polarraumbüschel ist jede Berührungsgerade der Grundkurve g^4 4. Ordnung I. Art des Inzidenzflächenbüschels 2. Grades dieses Polarraumbüschels ein Strahl des tetraedralen und des Majcenschen Komplexes, die diesem Polarraumbüschel zugeordnet sind. Alle Normalen dieser biquadratischen Grundraumkurve g^4 sind Strahlen des Normalenkomplexes und des Tangentialkurzwegekomplexes, die diesem Polarraumbüschel zugeordnet und durch dasselbe bestimmt sind. Jede dieser Normalen ist ihrem Fusspunkt zugeordnet, der, offenbar, auf der Grundkurve g^4 liegt. Die Berührungsgeraden dieser biquadratischen Grundraumkurve g^4

bilden eine Regelfläche 8. Grades [4], während ihre Normalen eine Strahlkongruenz 12. Ordnung und 4. Klasse bilden [2].

Man nehme in unserem, durch acht assoziierte Punkte A_i (i = 1—8) bestimmten Polarraumbündel drei Flächen F_1, F_2, F_3 seines Inzidenzflächenbündels zur Hilfe, so zwar, dass sich diese drei Flächen nicht in einem Flächenbüschel befinden. Eine der gegebenen Flächen, es sei die Fläche F_1, soll einen Raumpunkt P enthalten. Der diesem Punkt P durch dieses Polarraumbündel konjugiert zugeordnete Punkt heisse auch hier P_1. Durch die Flächen F_2, F_3 ist, wie bekannt, ein Flächenbüschel ($F_2 F_3$) 2. Grades bestimmt. Durch jede Fläche F_n dieses Büschels und durch die Fläche F_1 ist je ein weiteres Flächenbüschel 2. Grades bestimmt. Jede Fläche des Inzidenzflächenbüschels 2. Grades unseres Polarraumbündels befindet sich in je einem dieser ∞^1 Flächenbüschel. Die Grund Kurve 4. Ordnung I. Art jedes dieser ∞^1 Flächenbüschel befindet sich auf der Fläche F_1, und alle diese Grundkurven enthalten offenbar die acht assoziierten Punkte A_i auf der Fläche F_1, und können deswegen keine weiteren gemeinsamen Punkte auf dieser Fläche haben. Also, alle diese Raumkurven 4. Ordnung bilden auf dieser Fläche F_1 ein besonderes Kurvenbüschel 4. Ordnung, das durch die Grundpunkte A_i ($i = 1 — 8$) auf dieser Fläche bestimmt ist. Eine dieser Raumkurven dieses Büschels auf der Fläche F_1 enthält, offenbar, auch den Punkt P, da durch dieses Raumkurvenbüschel 4. Ordnung die ganze Fläche F_1 bedeckt ist, auf Grund der Tatsache, dass durch jeden Punkt dieser Fläche eine Fläche des Flächenbüschels ($F_2 F_3$) bestimmt ist.

Durch jede Grundkurve dieses Büschels auf der Fläche F_1 ist ein Inzidenzflächenbüschel eines Polarraumbüschels unseres Polarraumbündels bestimmt, und jedem dieser Polarraumbüschel ist offenbar auch ein tetraedraler Komplex und ein Majcenscher Komplex zugeordnet. Durch diejenige Grundraumkurve dieses Büschels auf der Fläche F_1, die den Punkt P enthält, ist also auch ein Polarraumbüschel unseres Polarraumbündels bestimmt, und die Berührungsgerade dieser Raumkurve im Punkt P ist, wie eben erwähnt, der diesem Punkt zugeordnete Strahl in dem erwähnten tetraedralen und in dem erwähnten Majcenschen Komplex dieses Polarraumbüschels.

Man sieht hier, dass wir auch auf diese Weise zu der bekannten Eigenschaft eines Flächenbündels 2. Grades gekommen sind, wo die einen Raumpunkt enthaltenden Flächen dieses Flächenbündels eine Gerade in diesem Punkt berühren, welche diesen Punkt mit dem demselben konjugiert zugeordneten Punkt verbindet. Alle diese, in diesem Punkt diese Gerade berührenden Flächen dieses Flächenbüschels bilden eines seiner Flächenbüschel.

Hätte man anstatt der Flächen F_2, F_3 irgend welche zwei andere Flächen des Inzidenzflächenbündels unseres Polarraumbündels genommen, die sich nicht mit der Fläche F_1 in einem Flächenbüschel befinden, müssten wir auf der Fläche F_1 wieder ein Raumkurvenbüschel 4. Ordnung der Grundpunkte A_i bekommen. Da aber zwei auf einer Fläche 2. Grades liegende Raumkurven 4. Ordnung I. Art nur acht gemeinsame Punkte haben können, folgt offenbar, dass es sich auf der Fläche F_1 um dasselbe Grundraumbüschel 4. Ordnung in jedem derartigen Fall handelt. Da weiterhin als Fläche F_1 irgendwelche Fläche des Inzidenzflächenbündels unter denselben Bedingungen angenommen werden kann, und als Punkt P jeder Punkt dieser Fläche, folgt auch hier die bekannte Tatsache, dass jedem Punkt des Raumes eine derartige Berührungsgerade zugeordnet ist. Es gilt also auch folgender Satz:

Jeder Punkt des Raumes enthält eine Gerade, die ein in diesem Punkt zugeordneter Strahl des tetraedralen Komplexes und des Majcenschen Komplexes eines in einem Polarraumbündel sich befindenden Polarraumbüschels ist. Alle derartigen Strahlen berühren in den ihnen zugeordneten Punkten ∞^1 *ein Büschel bildende Inzidenzflächen eines Polarraumbüschels, und alle diese Inzidenzflächen berührenden Strahlen hüllen auf dieser Fläche Kurven eines Raumkurvenbüschels 4. Ordnung ein, für welches die acht assoziierten Punkte des Inzidenzflächenbündels des gegebenen Polarraumbündels Grundpunkte sind. Jede dieser* ∞^1 *Raumkurven 4. Ordnung I. Art ist die Grundkurve des Inzidenzflächenbüschels eines Polarraumbüschels in diesem Polarraumbündel.*

Alle derartigen den Raumpunkten durch ein Polarraumbündel zugeordneten Geraden bilden, wie bekannt, einen kubischen Strahlkomplex [4].

Wie vorher schon erwähnt, sind die Normalen der Grundkurve des Inzidenzflächenbüschels eines Polarraumbündels Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Normalenkomplexes, und des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Tangentialkurzwegekomplexes. In jedem Punkt dieser Raumkurve bilden diese Normalen, wie bekannt, ein Strahlbüschel 1. Ordnung. Auf Grund unserer eben ausgeführten Betrachtungen, und des ausgesprochenen Satzes, folg offenbar auch folgender Satz:

Durch ein Polarraumbündel ist jedem Punkt P des Raumes ein Strahlbüschel 1. Ordnung mit diesem Punkt als Scheitel zugeordnet, dessen Strahlen die diesem Punkt zugeordneten Strahlen in dem Normalenkomplex und in dem Tangentialkurzwegekomplex eines Polarraumbüschels dieses Polarraumbündels sind.

Die Ebene dieses Strahlbüschels steht, auf Grund des bisher Erwähnten, senkrecht auf der Verbindungsgerade des Punktes P und des ihm konjugiert zugeordneten Punktes P_1. Da aber für den Punkt P_1 dasselbe gilt wie für den Punkt P, sehen wir, dass auch folgender Satz gültig ist:

Die in den Punkten P, P_1 *eines bezüglich eines Polarraumbündels konjugiert zugeordneten Punktepaares auf die Verbindungsgerade dieser zwei Punkte senkrecht stehenden Geraden, sind gemeinsame diesen Punkten zugeordnete Strahlen des Normalen-*

kompexes und des Tangentialkurzwegekomplexes derjenigen zwei Polarraumbüschel in diesem Polarraumbündel, die durch die Punkte P, P_1 und ihre Verbindungsgerade bestimmt sind.

Diese Verbindungsgerade berührt nämlich in jedem dieser Punkte ∞^1 Inzidenzflächen jedes dieser zwei Polarraumbüschel.

5. Es wäre interessant alle unsere bisherigen Betrachtungen auf ein Polarraumbündel zu übertragen, dessen Inzidenzflächen ein Bündel mit gemeinsamen Polartetraeder bilden. Hier stösst man auf ein Büschel tetraedraler Strahlkomplexe eines gemeinsamen Haupttetraeders, und dadurch müssten auch die drei anderen, einem Polarraumbüschel zugeordneten Strahlkomplexe eine besondere Lage und Form bekommen. Für diesmal haben wir aber nicht die Absicht damit diese Arbeit zu verlängern.

LITERATUR:

[1] *V. Niče*, Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn., Zagreb, **325** (1962), 107-125,

[2] *V. Niče*, Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik matematički **18** (1963), 255—268,

[3] *V. Niče*, Die gemeinsamen Kongruenzen der vier Strahlkomplexe eines Polarraumbüschels, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn., Zagreb, **343** (1968), 193—220,

[4] *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, Bd. III, Leipzig, 1910.

(Eigegangen am 27. XI 1968.)

Mathematisches Institut der Universität Zagreb

PRILOZI OSOBINAMA SVEŽNJA POLARNIH PROSTORA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Svakim polarnim prostorom određen je njegov osni kompleks. Svežnjem polarnih prostora određen je svežanj osnih kompleksa. U vezi s ovih ∞^2 osnih kompleksa jednog svežnja polarnih prostora dobiveni su ovi stavci:

a) *Svaki pravac neke tačke P je ovoj tački pridružena zraka u osnom kompleksu jednog polarnog prostora nekog svežnja takvih prostora.*

b) *Svaki je pravac prostora zajednička zraka osnih kompleksa od ∞^1 polarnih prostora jednog svežnja takvih prostora.*

c) *Nožišta zraka osnih kompleksa jednog svežnja polarnih prostora koje su pridružene jednoj tački P, leže na kugli promjera PP_1, gdje je P_1 konjugirano pridružena tački P u tom svežnju polarnih prostora.*

Svaki svežanj polarnih prostora možemo rastaviti u ∞^2 pramenova, a svakim takvim pramenom određen je po jedan tetraedralni

kvadratni kompleks, jedan kubični Majcenov kompleks, kompleks normala incidentnih ploha takvog pramena, kao i kompleks najkraćih dirnih putova između tih incidentnih ploha. U vezi s ovim kompleksima unutar svežnja polarnih prostora izvedeni su ovi stavci:

d) *Nekoj tački P pridružene zrake u tetraedralnim kompleksima svih pramenova polarnih prostora jednog svežnja takvih prostora, prolaze konjugiranom tačkom P_1 točki P u tom svežnju.*

e) *Ako je tačka P izlazna tačka najkraćih dirnih putova u svim kompleksima takvih putova jednog svežnja polarnih prostora, onda završne tačke tih putova leže na kugli promjera PP_1.*

f) *Svaki pravac prostora je zajednička zraka od ∞^1 tetraedralnih kompleksa pridruženih ∞^1 pramenova polarnih prostora jednog svežnja takvih prostora.*

g) *Tačkama nekog provca g pridružene zrake u onim tetraedralnim kompleksima jednog svežnja polarnih prostora, koji su pridruženi onim kompleksima najkraćih dirnih putova tog svežnja, kojima je pravac g zajednička zraka, čine konoid 6. stupnja, kojemu su pravac g i neizmjerno daleki pravac trostruki pravci.*

h) *Oni najkraći dirni putovi, kojih su ishodišta na jednom pravcu, a koji se nalaze u onim kompleksima takvih putova jednog svežnja polarnih prostora, koji su pridruženi onim njegovim tetraedralnim kompleksima kojima je taj pravac zajednička zraka, imaju svoje završne tačke na prostornoj krivulji 3. reda. Svaka tačka tog pravca je izlazna za tri takva najkraća dirna puta, dok u svakoj tački te prostorne krivulje završava samo jedan takav put.*

i) *S nekim pravcem g usporedne zrake onih Majcenovih kompleksa kojima pridruženi tetraedralni kompleksi u svežnju polarnih prostora imaju taj pravac g kao zajedničku zraku, čine valjak 3. stupnja, a tim zrakama pridružene tačke čine na tom valjku prostornu krivulju 3. reda.*

j) *Zrake onih kompleksa normala jednog svežnja polarnih prostora, koje su nekom pravcu g pridružene tako, da je taj pravac zajednička zraka tetraedralnih kompleksa pridruženih tim kompleksima normala, čine konoid 6. stupnja.*

k) *Svaki svežanj polarnih prostora moguće je razdijeliti na ∞^1 takvih pramenova, da ravninama nekog pravca, obzirom na sve polarne prostore jednog takvog pramena, pripada isti pol. Svim tim ravninama tog pravca tako pridruženi polovi čine prostornu krivulju 3. reda. Svaki pravac prostora dijeli svežanj polarnih prostora u ∞^1 takvih pramenova, kojima je određena i spomenuta prostorna krivulja 3. reda.*

Za stavke d) i e) vrijedi i obrat, kad tačkama P, P_1 zamijenimo uloge.

U nastavku radnje izvedeno je nekoliko daljnjih stavaka u vezi sa singularnim osobinama, koje se u takvim razmatranjima pojavljuju.