JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VILIM NIČE

DAS KOAXIALE NULLRAUMBÜSCHEL

PRAMEN KOAKSIJALNIH NIŠTIČNIH PROSTORA

ZAGREB

1969

Vilim Niče

DAS KOAXIALE NULLRAUMBÜSCHEL

Einführung: Wenn sich zwei Räume in einer derartigen korrelativen Zuordnung befinden, dass die je einem Raumpunkt zugeordnete Ebene diesen Punkt enthält, bilden zwei derartig korrelativ zugeordnete Räume einen Nullraum. Diese Nullkorrelation entdeckten ganz unabhängig voneinander Giorgini (1828), Möbius (1833) und Chasles (1837).

Man bezeichne den einer Ebene α in einer Nullkorrelation zugeordneten Punkt mit A. Die irgend einem anderen Punkt B dieser Ebene in dieser Nullkorrelation zugeordnete Ebene β muss offenbar den Punkt B und den Punkt A enthalten, da der Punkt B in der Ebene α liegt. Was für den Punkt B gilt, gilt offenbar auch für alle anderen Punkte der Schnittgeraden $AB = s$ der Ebenen α, β. Eine derartige Gerade s heisst ein Nullstrahl dieser Nullkorrelation. Der Punkt A ist der Nullpunkt der Nullebene α. Die den Nullebenen des Strahles s zugeordneten Nullpunkte liegen auf diesem Strahl, und bilden, auf Grund der Definition der korrelativen Zuordnung, eine Punktreihe (s), die dem Ebenenbüschel (s) ihrer Nullebenen projektiv zugeordnet ist. Alle den Punkt A in der Ebene α enthaltenden Strahlen sind also Nullstrahlen des durch die Nullkorrelation bestimmten Nullraumes, und alle den Strahl s schneidenden Nullstrahlen bilden eine lineare parabolische Kongruenz der Leitgeraden s. In jeder Ebene des Raumes befindet sich also ein Nullstrahlbüschel unseres Nullraumes, und jeder Punkt des Raumes ist der Scheitel eines derartigen Nullstrahlbüschels. Die Nullstrahlen eines Nullraumes bilden also einen linearen Strahlkomplex, der diesem Nullraum zugeordnet ist, aber auch dieser Nullraum ist durch diesen linearen Strahlkomplex bestimmt.

Wie es schon in der allgemeinen korrelativen Zuordnung bekannt ist, liegen die den eine gewöhnliche Gerade g, die kein Nullstrahl ist, enthaltenden Ebenen zugeordneten Nullpunkte auf einer anderen Geraden

g_1, und diese zwei Geraden g, g_1 sind in unserem Nullraum involutorisch zugeordnet. Die derartig den unendlich fernen Geraden zugeordneten Geraden heissen Durchmesser des Nullraumes, während die den unendlich fernen Punkten zugeordneten Nullebenen die Durchmesserebenen dieses Nullraumes sind. Alle Durchmesser enthalten den Nullpunkt der Fernebene, sind also parallel, und alle Durchmesserebenen enthalten parallele Nullstrahlen, die den unendlichfernen Nullpunkt dieser Durchmesserebene enthalten. Die der Polare dieses unendlichfernen Nullpunktes, bezüglich des absoluten Kegelschnittes, zugeordnete Gerade, die offenbar auch diesen unendlich fernen Nullpunkt enthält, heisst »Hauptachse« des Nullraumes. Die Hauptachse enthält die Nullpunkte aller auf sie senkrecht liegenden Nullebenen, wie auch den Nullpunkt der Fernebene (Möbius).

Ein Nullraum kann durch verschiedene Elemente und auf verschiedene Weisen bestimmt und gegeben werden. Es ist leicht zu beweisen, dass ein Nullraum eindeutig durch drei windschiefe Gerade bestimmt ist, von denen zwei einander zugeordnet sind, während die dritte ein Nullstrahl ist [1]. Auf Grund dessen und des vorher Erwähnten folgt, dass der Nullraum durch seine Achse und einen Nullstrahl eindeutig bestimmt ist.

Es sei eine Gerade a im Raum die Achse eines Nullraumes, der durch eine andere Gerade s als Nullstrahl bestimmt sein soll. Die Geraden a, s dürfen sich nicht schneiden noch rechtwinklig kreuzen. Nimmt man anstatt der Geraden s ein Strahlbüschel so, dass keiner der Strahlen dieses Büschels ein Nullstrahl des durch einen anderen Strahl dieses Büschels bestimmten Nullraumes ist, so wird auf diese Weise ein Büschel koaxialer Nullräume bestimmt, das wir in dieser Arbeit betrachten werden. Um einen besseren Einblick in die Betrachtungen über ein derartiges Nullraumbüschel zu finden, werden wir die Ebene des angenommenen Strahlbüschels parallel mit der Achse a im Raum wählen.

Da jedem Nullraum ein linearer Komplex seiner Nullstrahlen zugeordnet ist, muss dem erwähnten Nullraumbüschel auch ein Büschel linearer Nullstrahlkomplexe zugeordnet sein. Das Büschel linearer Nullstrahlkomplexe eines allgemeinen Nullraumbüschels ist schon bekannt und in der Literatur betrachtet worden [2]. Ein derartiges Büschel ist durch zwei Nullräume in ganz beliebiger Lage entstanden und bestimmt, und zu ihm gehört die gemeinsame rotatorische hyperbolische Strahlkongruenz der zwei linearen Nullstrahlkomplexe der gegebenen zwei Nullräume als »Trägerkongruenz«. Die Achsen zweier derartig angenommenen Nullräume sind zwei getrennte Geraden, die sich im Raum gewöhnlich nicht schneiden. In unserem koaxialen Fall werden diese zwei Achsen zusammenfallen, also alle Nullräume unseres speciellen Nullraumbüschels werden eine gemeinsame Achse haben. Wir haben also die Absicht in dieser Arbeit dasjenige Nullraumbüschel näher zu betrachten, bei dem die Achsen seiner Nullräume kein Plückersches Konoid (Zylindroid) bilden, sondern in die Hauptachse dieses Nullraumbüschels zusammenfallen [3].

Da jedem Nullraum auch ein Achsenkomplex zugeordnet und durch ihn bestimmt ist, werden wir auch diese, den Nullräumen unseres koaxialen Büschels zugeordneten und einen Achsenkomplexbüschel bildenden Achsenkomplexe in Betracht ziehen.

1. Über einige besondere Eigenschaften eines Nullraumes. Ein Nullraum sei durch zwei windschiefe Geraden *a*, *s* bestimmt und gegeben, wobei *a* die Achse, und *s* sein Nullstrahl sind. Die diese Geraden senkrecht schneidende Gerade sei mit *d* bezeichnet, und ihre Schnittpunkte mit den Geraden *a* und *s* bezeichne man mit *A* und *P*. Die durch die Geraden *d*, *s* bestimmte Ebene ist, wie bekannt, die dem Nullpunkt *P* zugeordnete Nullebene π [4]. Trägt man auf die Achse *a* oberhalb des Punktes *A* die Länge *AP* bis zum Punkt *L* auf, und wir stellen in diesem Punkt auf die Ebene der Geraden *d*, *a* eine senkrecht stehende Gerade *p*, so wird diese Gerade die Nullebene π im Punkt *K* durchstossen (Abb. 1). Es sei der Winkel $\sphericalangle$ *LAK* mit α bezeichnet. Wie bekannt, ist die Länge *LK* die charakteristische Konstante dieses Nullraumes, da

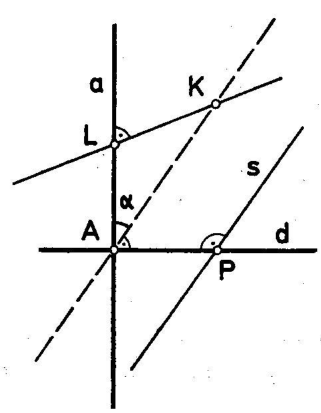

Abb. 1

nach Möbius die Grösse k in der Gleichung $LK = LA \cdot tg\ \alpha = k$ in diesem Nullraum konstant bleibt, und von Plücker als »Parameter« dieses Nullraumes bezeichnet wurde.

Wird also im Raum ein Punkt P gegeben, so zieht man zuerst durch diesen Punkt eine die Achse a im Punkt A senkrecht schneidende Gerade d. Nimmt man auf der Achse a oberhalb des Punktes A denjenigen Punkt L, für welchen $PA = AL$ gilt, und stellt in diesem Punkt auf die Ebene (ad) eine senkrecht stehende Gerade g, auf welcher der Punkt K so angenommen wird dass $LK = k$ ist, dann ist die Ebene des Punktes K und der Geraden d die in unserem Nullraum dem Nullpunkt P zugeordnete Nullebene π. Im umgekehrten Sinn kann auch jeder Ebene π des Raumes der ihr zugeordnete Nullpunkt P gefunden werden, und zwar auf folgende Weise: Im Schnittpunkt A der Ebene π und der Achse a legt man in dieser Ebene die auf die Achse a senkrechte Gerade d. Auf der Schnittgeraden der Ebene π mit derjenigen Ebene der Achse a, die auf der Geraden d senkrecht steht, wählt man denjenigen Punkt K, dessen Entfernung KL von der Achse a gleich k ist, also $KL = k$, wo $KL \perp a$ ist. Trägt man die Länge AL von dem Punkt A auf die Gerade d bis zum Punkt P auf, haben wir so den Nullpunkt P der Nullebene π in unserem Nullraum bestimmt.

Den Punkt P können wir auf der Geraden d links oder rechts von dem Punkt A abtragen. In unseren Fall hätten wir einen links gewundenen Nullraum, während er in zweitem Fall rechts gewunden wäre. Also je nachdem, ob man den Punkt L oberhalb oder unterhalb des Punktes A an der Achse a annimmt, oder den Punkt K auf der Geraden g auf die eine oder die andere Seite des Punktes L legt, bekommt man zwei gleiche Nullräume, die von Plücker als rechts oder links gewunden bezeichnet wurden. Wie man sieht, haben wir die bekannte Tatsache erhalten, dass alle Punkte K eines Nullraumes auf einem Kreiszylinder mit der Achse a und dem Halbmesser k liegen [5]. Ein Nullraum ist also durch die Achse a und durch die charakteristische Konstante (Parameter) k, resp. durch den Kreiszylinder mit der Achse a und dem Halbmesser k, bestimmt.

II. Definition und Bestimmung eines koaxialen Nullraumbüschels. Nebst der Achse a sei ein Geradenbüschel 1. Klasse gegeben, das sich in einer mit der Achse a parallelen Ebene σ befindet, und den Scheitel S man so gewählt hat, dass er von der Achse a den kürzesten Abstand hat. Durch die Achse a und durch jeden Strahl s_n dieses Büschels (S)

als Nullstrahl, ist, wie wir schon vorher sahen, ein Nullraum bestimmt. Zieht man die den Scheitel S enthaltende und die Achse a im Punkt P senkrecht schneidende Gerade d, dann ist jede Ebene (ds_n) dieses Ebenenbüschels $[d]$ die Nullebene des Nullpunktes S in dem durch die Achse a und durch den Nullstrahl s_n bestimmten Nullraum. Alle derartigen, durch die Achse a und durch die Strahlen s_n des Büschels (S) auf die eben erwähnte Weise bestimmten Nullräume, bilden eine stetige Menge von ∞^1 koaxialen Nullräumen, die wir als ein spezielles koaxiales Nullraumbüschel bezeichnen werden. Der Punkt S ist also als Nullpunkt je einer Ebene des Ebenenbüschels $[d]$ der Geraden d, als Nullebene in je einem dieser Nullräume zugeordnet.

Ein gewöhnliches Nullraumbüschel ist, wie bekannt, durch zwei beliebig angenommene Nullräume bestimmt, deren gemeinsame Strahlkongruenz die »Trägerkongruenz« (oder »Grundkongruenz«) dieses Nullraumbüschels ist. Unser spezielles Nullraumbüschel könnte also auf diese Weise durch zwei zwar verschiedene, aber im Raum koaxial liegende Nullräume bestimmt werden. Es kann aber diese Bestimmung auch viel leichter ausgeführt werden, wie wir gleich sehen werden. Es ist auch leicht ersichtlich, dass man ein koaxiales Nullraumbüschel in sich selbst längs seiner Achse a verschieben, um diese Achse a drehen und längs dieser Achse irgendwie verschrauben kann, ebenso wie jeden einzelnen seiner Nullräume.

Nimmt man auf der Achse a, oberhalb des Punktes D, den Punkt L so an, dass $SD = LD$ gilt, und stellt man in diesem Punkt L eine auf die Ebene der Geraden d, a senkrecht stehende Gerade p, dann wird diese Gerade durch die Ebenen des Ebenenbüschels $[d]$ in den Punkten $K_1, K_2, K_3, \ldots$ einer Punktreihe (k) geschnitten, durch deren Entfernung von dem Schnittpunkt L mit der Geraden a die charakteristische Konstante k (Parameter) des betreffenden Nullraumes bestimmt ist. Da die Längen dieser Entfernungen ∞^1 Werte annehmen können, kann die charakteristische Konstante, resp. Parameter, als ein richtiger Parameter angenommen werden. Jedem Werte dieses Parameters ist eine Strecke LK_n zugeordnet, resp. durch diesen Wert ein Punkt K_n in der Punktreihe (k) gegeben, der mit der Geraden d eine dem Nullpunkt S in einem Nullraum unseres Nullraumbüschels zugeordnete Nullebene bestimmt. Der Neigungswinkel der Achse a zu derartigen Nullebenen des Büschels $[d]$ sei mit α_n bezeichnet. Da aber $K_nL : LD = tg\alpha_n$ ist, also $K_nL = LD \cdot tg\alpha_n$ gilt, kann nebst der konstanten Länge DS, also nebst dem fixen Punkt S, auch der Winkel α_n als Parameter angenommen werden, durch dessen jeden Wert ein Nullraum unseres Büschels bestimmt wird. Wie bekannt, ändert sich ein Nullraum durch irgendwelche Schraubung um die Achse a nicht, also was für den Punkt S und für das ihm zugeordnete Ebenenbüschel gilt, gilt offenbar für alle Punkte, die von der Achse a gleich entfernt sind wie der Punkt S, d. h. für alle Punkte des Kreiszylinders mit der Achse a dessen Halbmesser der Länge DS gleich ist.

Man nehme auf der Geraden d irgendwelchen neuen Punkt S an, und durch den diesen Punkt auf die eben beschriebene Weise zugeordneten Punkt L auf der Achse a lege man die Gerade $p^n \parallel p$ (Abb. 2.).

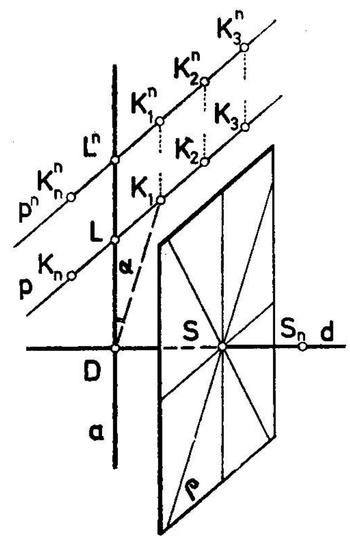

Abb. 2

Auf dieser Geraden wähle man die Punkte K^n, K_1^n, K_2^n, ... so, dass $L^nK^n = LK$, $L^nK_1^n = LK_1$, $L^nK_2^n = LK_2$, ... gilt. Auf Grund der bisherigen Ausführungen wissen wir, dass die Nullpunkte S, S^n den Ebenen (dK), (dK^n) als Nullebenen in demselben Nullraum zugeordnet sind, dessen charakteristische Konstante gleich $LK = L^nK^n$ ist. Dasselbe gilt offenbar auch für die Ebenenpaare (dK_1), (dK_1^n), dann (dK_2), (dK_2^n) usw. Man sieht also, dass die zwei den Punkten S, S^n zugeordneten kollokalen Nullebenenbüschel des gegebenen Nullraumbüschels untereinander projektiv zugeordnet sind, weil die Punktreihen (p), (p^n) durch die Nullräume des Nullraumbüschels nicht nur perspektiv zugeordnet sind, sondern auf Grund der obigen Darlegungen kongruent sind. Da aber der

Punkt S^n irgendwo auf der Geraden d angenommen werden kann, und um die Achse a nach Belieben verschraubt werden kann, gilt offenbar auch hier die schon bekannte Eigenschaft eines nichtspeziellen Nullraumbüschels, die hier etwas anders ausgeführt und bewiesen ist. Sie lautet: Die allen Raumpunkten in einem Nullraumbüschel durch seine Nullräume zugeordneten Nullebenen bilden Nullebenenbüschel, die alle untereinander projektiv zugeordnet sind, wenn in ihnen die Ebenen eines und desselben Nullraumes zugeordnet sind.

Auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen und Ausführungen kann offenbar für unser koaxiales Nullraumbüschel das Folgende bewiesen werden:

Innerhalb der den ∞^3 den Raumpunkten durch ein koaxiales Nullraumbüschel zugeordneten Nullebenenbüschel befinden sich immer deren ∞^1 in koaxialer Lage, und die gemeinsamen Achsen dieser ∞^2 koaxialen Nullebenenbüschelmengen schneiden rechtwinklig die Achse a dieses Nullraumbüschels. Diese Achsen bilden also eine hyperbolische lineare rotatorische Normalenkongruenz dieser Achse als Leitgeraden.

Offensichtlich ist diese rotatorische Normalenkongruenz die Trägerkongruenz dieses Nullrraumbüschels. Mittels unserer Betrachtungen bekommt man auch hier folgende schon bekannte Tatsache: Die auf die Achse a normalen Ebenen sind Nullebenen ihrer Schnittpunkte mit dieser Achse in allen Nullräumen des koaxialen Nullraumbüschels und dasselbe gilt auch für die die Achse a enthaltenden Ebenen, deren Nullpunkte sich unendlich fern in der senkrechten Richtung auf die Achse a befinden.

Je zwei projektiv zugeordnete kollokale Ebenenbüschel in jeder derartigen erwähnten kollokalen Ebenenbüschelmenge haben also immer die gleichen zwei Doppelebenen, von welchen eine die Achse a enthält, und die andere auf dieser Achse senkrecht steht.

Man nehme im Raum eine beliebige Ebene π an, die die Achse a im Punkt D schneidet. Abb. 3. Die in dieser Ebene den Punkt D enthaltende Gerade, die auf die Achse a senkrecht steht, sei auch hier mit d bezeichnet. Die die Achse a enthaltende und auf die Ebene π normale Ebene ε schneide die Ebene π in der Geraden t, die mit der Achse a den Winkel $a_1 = \sphericalangle a\pi$ bildet. Man ziehe in der Ebene ε ein Büschel von mit der Achse a parallelen Geraden $m_1, m_2, m_3, \ldots$, deren Abstand von der Achse a mit $k_1, k_2, k_3, \ldots$ bezeichnet sei. Durch jeden dieser Werte $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ist, die vorher gezeigt, ein Nullraum mit der Achse a bestimmt. Die Schnittpunkte der Geraden t mit den Geraden k_1, k_2, k_3,

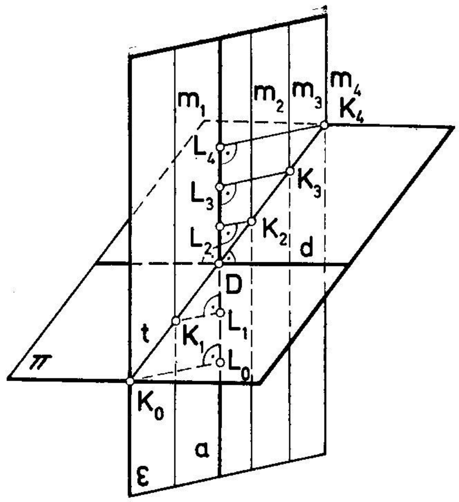

Abb. 3

... bezeichne man mit K_1, K_2, $K_3, \ldots$, und die Fusspunkte der aus diesen Punkten auf die Achse a gefällten Lote sollen auch hier mit L_1, L_2, $L_3, \ldots$ bezeichnet werden. Den der Nullebene π im Nullraum mit der charakteristischen Konstanten k_1 zugeordneten Nullpunkt S_1 erhält man bekanntlich so, dass man auf die Gerade d vom Punkt D bis zum Punkt S_1 die Länge DL_1 abträgt. Dasselbe tut man auch in allen anderen Nullräumen unseres Nullraumbüschels. So lange die Punkte L_1, L_2, $L_3, \ldots$ auf einer Seite der Achse a, bezüglich des Punktes D, liegen, müssen auch die ihnen zugeordneten Punkte S_1, S_2, $S_3, \ldots$ auf derselben Seite der Geraden d, bezüglich desselben Punktes D, liegen, da für ein derartiges Nullraumbüschel die Voraussetzung bestehen muss, dass alle Nullräume dieses Büschels im gleichen Sinn gewunden sind. Was für die Ebene π gilt, gilt offenbar auch für alle Ebenen des Raumes, die mit der Achse a den gleichen Winkel α_1 bilden, da jede derartige Ebene durch eine Schraubung um die Achse a in die Ebene π gebracht werden kann.

Man nehme noch irgend eine andere, die Gerade d enthaltende Ebene π_n, die die Ebene ε in der Geraden t_n schneidet. Durch die Schnittpunkte K_1^n, K_2^n, $K_3^n, \ldots$ dieser Geraden t_n mit den parallelen Geraden m_1, m_2, $m_3, \ldots$, resp. durch die ihnen auf der Achse a zugeordneten Fusspunkte L_1^n, L_2^n, $L_3^n, \ldots$ sind die schon erwähnten charakteristischen Konstanten k_1, k_2, $k_3, \ldots$ derjenigen Nullräume gegeben, in denen die der Nullebene π_n zugeordneten Nullpunkte S_1^n, S_2^n, $S_3^n, \ldots$ auf der

Geraden d durch die bekannten Gleichungen $DL_1^n = DS_1^n$, $DL_2^n = DS_2^n$, $DL_3^n = DS_3^n$, ... bestimmt sind. Man sieht also, dass wegen $m_1 \| m_2 \| m_3 \| \ldots$ die Punktreihe K_1, K_2, K_3, ... und die Punktreihe K_1^n, K_2^n, K_3^n, ... perspektiv sind, und ebenso ist die Punktreihe K_1, K_2, K_3. ... der Punktreihe L_1, L_2 L_3, ... und die Punktreihe K_1^n, K_2^n, K_3^n, ... der Punktreihe L_1^n, L_2^n, L_3^n, ... perspektiv zugeordnet. Wegen $DL_1 = DS_1$, $DL_2 = DS_2$, $DL_3 = DS_3$, ... und wegen $DL_1^n = DS_1^n$, $DL_2^n = DS_2^n$, $DL_3^n = DS_3^n$, ... gilt offenbar, dass die Punktreihen S_1, S_2, S_3, ... und S_1^n, S_2^n, S_3^n, ... nicht nur kollokal auf der Geraden d liegen, sondern dass sie auch untereinander projektiv zugeordnet sind. Da wir jede Ebene des Raumes durch eine Schraubung um die Achse a in eine Ebene der Geraden d bringen können, bekommt man auf diese Weise in unserem koaxialen Nullraumbüschel eine Eigenschaft, die auch im allgemeinen Nullraumbüschel, anders ausgeführt und in anderer Form ausgesprochen, besteht. Diese Eigenschaft lautet:

Die den Ebenen des Raumes durch die Nullräume eines koaxialen Nullraumbüschels zugeordneten Nullpunkte bilden in jeder dieser Ebenen eine dieser Ebene zugeordnete gerade Punktreihe, wo alle dieser ∞^3 *Punktreihen untereinander projektiv zugeordnet sind.*

Ausser dieser Eigenschaft eines koaxialen Nullraumbüschels kann auch sehr leicht gefunden werden, dass es ∞^2 Ebenenbüschel gibt, wo die deren Ebenen zugeordneten Punktreihen auf einer gemeinsamen Achse d liegen. Auf jeder derartigen Geraden d befinden sich also ∞^1 kollokaler projektiver Punktreihen. Der Schnittpunkt dieser Geraden d und der Achse a (wo $d \perp a$ gilt), und der unendlich ferne Punkt der Gerade d, sind in allen diesen ∞^1 kollokalen projektiven Punktreihen sich selbst zugeordnet, sind also Doppelpunkte je zweier dieser kollokalen und projektiv zugeordneten Punktreihen. Alle Geraden d, wie schon vorher gezeigt, sind die die Achse a senkrecht schneidenden Geraden, welche die schon oft erwähnte spezielle lineare Normalenkongruenz der Achse a bilden.

III. Das lineare Nullstrahlkomplexbüschel des koaxialen Nullraumbüschels. Jedem Nullraum ist, wie bekannt, ein durch ihn bestimmter linearer Strahlkomplex zugeordnet, der aus den Nullstrahlen dieses Nullraumes besteht. Die Nullstrahlen der Nullräume eines Nullraumbüschels bilden also ein Büschel linearer Strahlkomplexe, das, wie bekannt, eine Kongruenz als »Träger« dieses Komplexbüschels hat [6].

Auf Grund unserer bisherigen Ausführungen folgt offenbar, dass die Trägerkongruenz dieses Büschels linearer Nullstrahlkomplexe von den die Achse a senkrecht schneidenden Geraden d gebildet wird, und daher die hyperbolische lineare Kongruenz der Leitgeraden a und der auf dieser Geraden senkrecht unendlich fern liegenden Leitgeraden ist.

Wie gezeigt, ist ein Nullraum, also auch sein linearer Nullstrahlkomplex, durch seine Achse und durch seine charakteristische Konstante bestimmt, die auch als eine Länge gegeben sein kann. Wir nehmen nun nebst der Achse a diese charakteristische Konstante, also den sogenannten Parameter, als einen wirklichen Parameter an, aber anstatt dass wir jedem seinem Werte eine Zahl zuordnen, ordnen wir jedem diesem Werte eine Länge zu. Dann haben wir auf diese Weise das lineare Nullstrahlkomplexbüschel eines koaxialen Nullraumbüschels bestimmt. Also, durch je einen Strahl des Raumes, oder durch je eine Länge ist ein Nullraum der gegebenen Achse bestimmt, und damit auch sein linearer Nullstrahlkomplex.

In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir ein koaxiales Nullraumbüschel, und dadurch auch sein Nullstrahlkomplexbüschel, durch seine Achse a und durch ein Geradenbüschel (S) bestimmt, dessen Ebene mit der Achse a im Raum so parallel steht, dass die Ebene der Achse a und des Punktes S auf diese Büschelebene senkrecht ist. Durch die Entfernung des Scheitels S von der Achse a und durch den Winkel der Achse a mit je einem Strahl dieses Büschels (S) ist, wie wir sahen, die charakteristische Konstante des diesem Strahl zugeordneten Nullraumes bestimmt. Die den Punkt S enthaltende und die Achse a senkrecht schneidende Gerade sei wieder mit d bezeichnet. Die dem Nullpunkt S zugeordnete Nullebenen in allen Nullräumen des koaxialen Nullraumbüschels enthalten, wie gezeigt, diese Gerade d. Die Strahlen des Punktes S in jeder dieser Ebenen sind also Nullstrahlen des betreffenden Nullraumes dieses koaxialen Nullraumbüschels.

Es sei jetzt die Achse a gegeben und ein Geradenbüschel (S), dessen Ebene α beliebig im Raum liegt, wobei aber die Verbindungsgerade des Scheitels S mit dem Schnittpunkt der Achse a und der Ebene α nicht auf der Achse a senkrecht stehen darf. Durch die Achse a und durch jeden Strahl des Büschels (S) als Nullstrahl ist wieder ein Nullraum der Achse a bestimmt. Die den Punkt S enthaltende und die Achse a senkrecht schneidende Gerade d wird die Achse eines Ebenenbüschels sein, deren jede Ebene die den Punkt S enthaltende und auf der Geraden d senkrecht stehende Ebene in einem Strahl eines neuen, in dieser

Ebene liegenden Strahlbüschel $(\overline{S})$ mit gemeinsamen Scheitel schneidet, durch dessen Strahlen, wie eben gezeigt, je ein Nullraum unseres koaxialen Nullraumbüschels bestimmt ist. In jeder Ebene der Geraden d befinden sich also zwei Strahlen des Punktes S, welche Nullstrahlen dieses Nullpunktes im demselben Nullraum der Achse a sind. Auf Grund dieser Betrachtungen gilt also folgender Satz:

Ein koaxiales Nullraumbüschel und sein Nullstrahlkomplexbüschel sind auch dann durch die Achse a und ein Strahlbüschel bestimmt, wenn der die Achse a schneidende Strahl dieses Büschels diese Achse nicht senkrecht schneidet.

Wenn ein Strahl des gegebenen Strahlbüschels die Achse a senkrecht schneidet, wäre, wie wir vorher sahen, durch dieses Strahlbüschel nur ein Nullraum der Achse a gegeben, und kein ganzes Nullraumbüschel.

Die Nullebene eines Raumpunktes S enthält, wie bekannt, die diesen Punkt S enthaltende und die Achse a des Nullraumes senkrecht schneidende Gerade d, die ein Strahl der Trägerkongruenz des koaxialen Nullraumbüschels ist. Die Gerade d ist also die Achse des Nullebenenbüschels der dem Punkt S zugeordneten Nullebenen in dem koaxialen Nullraumbüschel. Nimmt man im Raum beliebig eine Gerade p an, dann gehört diese Gerade als Nullstrahl einem Nullraum des koaxialen Nullraumbüschels, das durch diesen Nullstrahl p und durch die Achse a bestimmt ist. Alle diesen Nullstrahl p schneidenden Nullstrahlen seines Nullraumes bilden, wie bekannt, eine lineare parabolische Strahlkongruenz. In jedem anderen Nullraum unseres Büschels bilden offenbar derartige Nullstrahlen eine hyperbolische lineare Strahlkongruenz, deren Leitgeraden die Gerade p und die durch diesen Nullraum ihr zugeordneten Gerade p_1 ist. Da sich der Nullpunkt einer Ebene auf derjenigen ihrer Geraden befindet, die die Achse a des Nullraumes senkrecht schneidet, folgt offenbar, dass die dieser Geraden p derartig zugeordnete parabolische Kongruenz mit der Trägerkongruenz der Achse a ein hyperbolisches Paraboloid gemeinsam hat, das sich auch in der dieser Geraden p auf die beschriebene Weise zugeordneten hyperbolischen linearen Kongruenzen aller Nullräume (Trägerkongruenz) unseres Büschels befindet. Es gilt also folgender Satz:

Die eine Gerade p schneidenden Nullstrahlen eines Nullraumes bilden die bekannte hyperbolische lineare Kongruenz. Alle derartigen hyperbolischen linearen Kongruenzen, zugeordnet der Geraden p in den Nullräumen eines koaxialen Nullraumbüschels, liegen in dem linearen *singulären Komplex dieser Leitgeraden p, und bilden ein Kongruenzbüschel mit einem gemeinsamen hyperbolischen Paraboloid als Grund- oder Trägerparaboloid dieses Kongruenzbüschels.*

Dieses hyperbolische Paraboloid bilden offenbar auch die der Geraden p zugeordneten Geraden p_1 in allen Nullräumen des koaxialen Nullräumbüschels, als die Erzeugenden seines zweiten Systems. Es gilt also auch folgender Satz:

Die den Ebenen einer Geraden p zugeordneten Nullpunkte in einem koaxialen Nullraumbüschel, liegen auf einem hyperbolischen Paraboloid, das sich in der Trägerkongruenz dieses Nullraumbüschels befindet.

IV. Projektive koaxiale Nullraumbüschel und ihre Erzeugnisse. Wie bekannt, können zwei Nullraumbüschel in projektiv zugeordnete Lage gebracht werden, da die durch die Nullräume des Büschels allen Raumpunkten zugeordneten Nullebenenbüschel, und die ebenso allen Ebenen des Raumes zugeordneten Punktreihen, untereinander projektiv zugeordnet sind. Durch die Achsen a_1, a_2 und durch einen Parameter seien zwei koaxiale Nullstrahlkomplexbüschel gegeben. Durch die gemeinsamen Parameterwerte (gleiche Längen) werden auf Grund des bisher ausgeführten je zwei Nullstrahlkomplexe dieser zwei Büschel eineindeutig so zugeordnet, dass das Doppelverhältnis je vier derartiger Komplexe in einem Büschel gleich dem zugeordnetem Doppelverhältnis der vier zugeordneten Komplexe in zweitem Büschel ist. Die zwei projektiv zugeordneten Nullebenenbüschel in jedem Raumpunkt erzeugen also einen Strahlkegel 2. Grades, und das Erzeugnis dieser zwei projektiv zugeordneten koaxialen Komplexbüschel ist also ein quadratischer Strahlkomplex, gleich so wie es schon bei zwei projektiv zugeordneten allgemeinen Nullraumkomplexbüscheln bekannt ist. Da durch die Parameterwerte 0 und ∞ die die Achsen enthaltenden und die auf diesen Achsen senkrecht stehenden Ebenenpaare zugeordnet sind, folgt, dass in jedem Raumpunkt der entstandene Komplexkegel 2. Grades dieses quadratischen Komplexes nicht nur die diesen Punkt enthaltenden Strahlen der Trägerkongruenzen enthält, sondern auch die diesen Punkt enthaltende Transversale der Achsen a_1, a_2 und diejenige Gerade dieses Punktes, die auf den Achsen a_1, a_2 senkrecht steht. Es kann also folgender Satz ausgesprochen werden:

Diejenigen gemeinsamen Nullstrahlen zweier koaxialen Nullraumbüschel, die zwei gleichparametrigen Nullräumen dieser zwei Büscheln gehören, bilden einen quadratischen Strahlkomplex, in dem sich die Trägerkongruenzen beider Nullraumbüschel, die lineare hyperbolische

Transversalenkongruenz der Hauptachsen dieser Büschel und das Parallelenstrahlbündel der auf die Hauptachsen dieser Büschel senkrecht stehenden Strahlen, befindet.

Selbstverständlich kann die projektive Zuordnung zweier koaxialen Nullraumbüschel, resp. ihrer Nullstrahlkomplexbüschel, auch so durchgeführt werden, dass drei Nullräume des einen Büschels eineindeutig drei Nullräumen des zweiten Büschels zugeordnet werden.

V. Die Achsenkomplexe des koaxialen Nullraumbüschels. Zwei in einem Nullraum zugeordnete Gerade p, p_1 die untereinander normal sind, heissen Achsen dieses Nullraumes. Offenbar ist die in dem Nullpunkt A einer Nullebene α auf dieselbe gestellte Normale $\bar{a}$ eine Achse dieses Nullraumes, und alle derartigen Achsen $\bar{a}$ eines Nullraumes bilden seinen bekannten quadratischen Achsenkomplex [7]. Die einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Achsenkomplexes bilden einen orthogonalen Komplexkegel, der durch die auf die Achse a normalen Ebenen, und durch die mit der Nullebene dieses Nullpunktes parallelen Ebenen, in Kreisen geschnitten wird.

Wie bekannt bekommt man einen derartigen Komplexkegel eines Raumpunktes als das Erzeugnis zweier Ebenenbüschel, deren Achsen s, p den Punkt P enthalten und deren zugeordnete Ebenenpaare untereinander normal stehen. Die Ebenenbüschelachse p ist ein Durchmesser ($p \parallel a$) des Nullraumes, und die Ebenenbüschelachse s ist der dem Fusspunkt P zugeordnete Achsenkomplexstrahl. Die Erzeugenden p, s eines jeden derartigen Komplexkegels sind dessen Scheitelerzeugenden, und seine Berührungsebenen längs dieser Erzeugenden stehen je auf einer Kreisschnittebene dieses Kegels normal, während die Ebene τ dieser zwei Geraden p, s parallel zur Nullraumachse ist. Die Berührungsebene dieses Kegels längs der Erzeugenden p enthält die Nullraumachse a. Die Fusspunkte der einen Punkt P enthaltenden Achsenkomplexstrahlen bilden, wie bekannt, eine Raumkurve 3. Ordnung, die auf demjenigen den Punkt P und die Nullraumachse a enthaltenden Rotationszylinder liegt, auf dem der Punkt P und die Nullraumachse a diametral liegen [8]. Die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Achsenkomplexstrahlen liegen, wie bekannt, auf einer Geraden.

Es sei durch die Hauptachse a ein koaxiales Nullraumbüschel gegeben. Die einen Punkt P enthaltende und die Hauptachse a senkrecht schneidende Gerade sei auch hier mit d bezeichnet. Die Nullebenen des Punktes P in allen Nullräumen unseres koaxialen Nullraumbüschels bilden, wie gezeigt, das Ebenenbüschel $[d]$ der Geraden d, die ein Strahl der Trägerkongruenz dieses Nullraumbüschels ist. Die dem Fusspunkt P zugeordneten Strahlen s_n in den Achsenkomplexen unseres koaxialen Nullraumbüschels bilden also ein Strahlbüschel (P) mit dem Scheitel P, dessen Ebene normal auf der Büschelachse d steht. Die Achsenkomplexkegel 2. Grades des Punktes (Scheitels) P enthalten also je einen dieser Strahlen s_n und alle zusammen die den Punkt P enthaltende Parallele $p \parallel a$. Da die Gerade p auch als ein Strahl zum Strahlbüschel (P) gehört, berührt die Ebene der Geraden p, a die Achsenkomplexkegel des Scheitels P aller Nullräume unseres koaxialen Büschels längs dieser Erzeugenden p. Da weiterhin alle diese Achsenkomplexkegel des Punktes P durch die auf der Hauptachse a normalen Ebenen in Kreisen geschnitten werden, also zwei isotrope Erzeugende gemeinsam haben gilt, offensichtlich folgender Satz:

Die je einem Raumpunkt zugeordneten Achsenkomplexkegel 2. Grades der Achsenkomplexe aller Nullräume eines koaxialen Nullraumbüschels, bilden ein Kegelbüschel 2. Grades, deren zwei Grunderzeugende in eine allen diesen Komplexkegeln gemeinsame Erzeugende zusammenfallen, die parallel mit der Hauptachse a des Nullraumbüschels ist, und längs welcher alle diese Achsenkomplexkegel die Ebene dieser Erzeugenden p und der Achse a berühren. Die zwei weiteren Grunderzeugenden sind durch ein isotropes Geradenpaar gegeben, das in einer auf die Hauptachse a normalen Ebene liegt.

Alle diese einem Raumpunkt zugeordneten Achsenkomplexkegel haben eine gemeinsame Symmetrieebene, die mit der Ebene des Strahlbüschels (P) identisch ist, also immer mit der Hauptachse a parallel liegt. Weil der jeder Ebene des Büschels $[d]$ zugeordnete Strahl des Büschels $(\bar{P})$ auf dieser Ebene normal steht, ist das Strahlbüschel $(\bar{P})$ dem Nullebenenbüschel $[d]$ des Punktes P projektiv zugeordnet. Da weiterhin die Berührungsebenen dieser Achsenkomplexkegel des Punktes P längs der Scheitelerzeugenden s_n die Gerade d des Punktes P enthalten, gleich so wie die Nullebenen dieses Punktes die Strahlen s_n des Büschels (P) enthalten, ist auch das Büschel der erwähnten Berührungsebenen mit dem Büschel der Nullebenen des Punktes P kollokal und ihm projektiv zugeordnet. Werden in den Nullebenenbüscheln aller Raumpunkte durch die Nullräume des koaxialen Nullraumbüschels deren Ebenen eineindeutig zugeordnet, dann sind, wie bekannt, alle diese ∞^3 Nullebenenbüschel untereinander projektiv zugeordnet. Auf Grund dessen folgt, dass die eben beschriebenen Büschel der längs der Erzeugenden s_n berührenden Ebenen in allen Raumpunkten untereinander auch projektiv zugeordnet sind. Hieraus folgt weiterhin, dass die, in den durch die Nullräume des koaxialen Nullraumbüschels bestimmten Achsenkomplexkegelbüschel aller Raumpunkte, zugeordneten Kegel auch eine projektive Zuordnung aller dieser ∞^3 Achsenkomplexkegelbüschel bilden. Es gilt also auch folgender Satz:

Die ∞^3 Komplexkegelbüschel des Achsenkomplexbüschels eines koaxialen Nullraumbüschels sind untereinander projektiv zugeordnet, wenn die zugeordneten Kegel in diesen Komplexbüscheln dem Achsenkomplex eines Nullraumes des koaxialen Nullraumbüschels angehören.

Auf Grund der bekannten Eigenschaften eines Nullraumbüschels und auf Grund des eben erwähnten Satzes, gilt offenbar auch folgender Satz:

Bei einem harmonischen Nullraumquadrupel eines koaxialen Nullraumbüschels ist immer der ihm zugeordnete Achsenkomplexquadrupel in zweitem Nullraumbüschel auch harmonisch, wenn diese zwei Nullraumbüschel projektiv zugeordnet sind.

Wie bekannt, bilden die Fusspunkte der einen Raumpunkt P enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes eines Nullraumes eine Raumkurve 3. Ordnung, die ausser auf ihrem Achsenkomplexkegel 2. Grades, auch auf demjenigen Rotationszylinder liegt, der die Achse a des Nullraumes und den Punkt P enthält und dessen Achse den Abstand des Punktes P von der Achse a hälftet [9].

Es sei a die Hauptachse eines koaxialen Nullraumbüschels, dem, wie bekannt, ein Achsenkomplexbüschel zugeordnet ist. Der Raumpunkt P ist dann der gemeinsame Scheitel der ∞^1 Achsenkomplexkegel 2. Grades, die, wie wir sahen, ein besonderes Büschel bilden, das zu allen anderen derartigen Büscheln projektiv ist. Auf jedem derartigen Kegel dieser ∞^1 Achsenkomplexkegel des Punktes P befindet sich offenbar eine der eben erwähnten Raumfusspunktkurven 3. Ordnung. Alle diese Raumkurven 3. Ordnung sind stetig verbunden und bilden eine Fläche, die auch dem Punkt P zugeordnet ist. Da aber im Fall eines koaxialen Nullraumbüschels für alle seine Nullräume die Hauptachse gemeinsam bleibt, und selbstverständlich der Punkt P ebenfalls, so haben alle diese ∞^1 Fusspunktkurven 3. Ordnung des Punktes P offenbar den eben erwähnten Rotationszylinder gemeinsam, auf dem sich alle diese Raumkurven befinden. Es gilt also folgender Satz:

Die Fusspunkte der einen Raumpunkt P enthaltenden Strahlen der Achsenkomplexe aller Nullräume eines koaxialen Nullraumbüschels *liegen auf einem Rotationszylinder, der den Punkt P und die Nullraumbüschelachse a so enthält, dass dieser Punkt P und die Hauptachse a auf ihm diametral liegen.*

Zieht man diejenige den Punkt P enthaltende Gerade g, die mit der Hauptachse a im Raum parallel ist, so befinden sich die ∞^1 Fusspunktkurven aller Punkte P_g dieser Geraden g offenbar auf demselben Rotationszylinder.

Auf Grund unserer bisherigen Ausführungen folgt leicht, dass die Achsenkomplexbüschel zweier projektiv zugeordneten koaxialen Nullraumbüschel auch projektiv zugeordnet sind. Es kann also auch folgender Satz ausgesprochen werden:

Diejenigen gemeinsamen Strahlen zweier Achsenkomplexe in je einem Achsenkomplexbüschel zweier koaxialen Nullraumbüschel, deren Nullräume, jeder in einem dieser zwei Büschel, durch dieselbe charakteristische Konstante (Parameter) bestimmt sind, bilden einen Strahlkomplex 4. Grades.

Dies folgt aus der Tatsache, dass zwei projektiv zugeordneten Strahlkomplexbüschel 2. Grades einen Strahlkomplex 4. Grades erzeugen.

LITERATUR

[1] *Th. Reye:* Die Geometrie der Lage (1907), Abt. II., S. 114.; [2] l. c., S. 134; [3] l. c., S. 138; [4] l. c., S. 121; [5] l. c., S. 121; [6] l. c., S. 134; [7] l. c., S. 285; [8] l. c., S. 287; [9] l. c., S. 287.

Institut für Mathematik
der Universität in Zagreb

Angenommen zur Veröffentlichung am 8. XII. 1967. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

VILIM NIČE

PRAMEN KOAKSIJALNIH NIŠTIČNIH PROSTORA

Uvod. Pridružimo li dva prostora korelativno tako, da svakoj ravnini jednog prostora pridružena tačka u drugom prostoru leži u toj ravnini, tada takva dva prostora čine poznati »ništični prostor«. Sve zrake neke ravnine u ništičnom prostoru, koje prolaze njenom ništičnom tačkom, zovu se ništične zrake tog prostora. Ravninama tih zraka pridružene ništične tačke leže na tim zrakama, te su taj niz tačaka i taj pramen ravnina projektivno pridruženi. Sve ovakve ništične zrake čine linearni ništični kompleks tog ništičnog prostora. Ravninama nekog pravca *g*, koji nije ništična zraka, pridružene ništične tačke leže na nekom drugom pravcu g_1, a ovakav par pravaca u prostoru pridružen je involutorno. Neizmjerno dalekim pravcima na taj način pridruženi konačni pravci zovu se promjeri ništičnog prostora, a neizmjerno dalekim tačkama pridružene ništične ravnine zovu se dijametralne, ili promjerne ravnine tog prostora. Svi promjeri prolaze ništičnom tačkom neizmjerno daleke ravnine, dakle su usporedni. Polari neizmjerno daleke ništične tačke s obzirom na apsolutu pridružen pravac u konačnosti je glavni promjer ili os ništičnog prostora.

I. Uzmemo li neki pravac a kao os ništičnog prostora i neku ravninu π kao ništičnu ravninu, tada se ništična tačka P te ravnine nalazi na onom pravcu te ravnine, koji tu os siječe okomito u njenom probodištu A s tom ravninom. Označimo li kut osi a s ravninom π s α, tad je $AP \cdot tg\, \alpha = k$ stalna veličina ništičnog prostora, koja se zove karakteristična konstanta tog prostora. Uzmemo li tu veličinu kao parametar, tad nam svaka njegova vrijednost daje po jedan ništični prostor iste osi a. U ovoj radnji istražen je ovakav pramen koaksijalnih ništičnih prostora, koji se dosta razlikuje od običnog pramena ništičnih prostora koji je određen s dva po volji odabrana ništična prostora i do sada uglavnom istražen. Osi ovakvog općeg pramena ništičnih prostora čine, kao što je poznato, Plückerov konoid, dok u našem neistraženom slučaju svi ništični prostori pramena imaju zajedničku os. Na temelju poznatih osobina ništičnog prostora lako se može zaključiti da ovakav pramen ništičnih prostora rotacijom oko svoje osi, pomicanjem u smjeru osi i bilo kojim zavojnim gibanjem oko osi, putuje uvijek sam u sebi, tj. on se ne mijenja, kao i svaki od ništičnih prostora tog pramena.

II. Nanesemo li od tačke A na os a dužinu AP do tačke K, te ovom tačkom postavimo okomit pravac na ravninu (aP), koji ravninu π siječe u tački K, tad je $LK = k$, tj. stalna veličina u svakom ništičnom prostoru. Sve tačke K očito se nalaze na kružnom valjku osi a polumjera k. S pomoću ove činjenice lako je zaključiti, da ništične ravnine jedne tačke prostora u pramenu koaksijalnih ništičnih prostora čine pramen ravnina, a svih takvih ∞^3 pramenova su međusobno projektivno pridruženi. Tj. uzmemo li po volji četiri ništična prostora našeg koaksijalnog pramena, tada će u svakoj tački prostora njoj pridružene četiri ništične ravnine činiti četvorke ravnina, koje sve imaju za istoimeni pridruženi dvoomjer jednaku vrijednost. Od tih ∞^3 pramenova ravnina pridruženih po jednoj tački prostora njih je uvijek ∞^1 koaksijalnih, tj. ∞^1 takvih pramenova imaju zajedničku os. Ovakvih naših ∞^2 pramenova imaju osi, koje okomito sijeku os a našeg pramena ništičnih prostora. Osim toga se lako može vidjeti da su okomite ravnine na os a ništične ravnine svog probodišta s tom osi, i to u svim ništičnim prostorima našeg pramena. Isto to vrijedi i za ravnine osi a, kojima ništične tačke leže neizmjerno daleko u okomitom smjeru na tu os.

III. Svaki ništični prostor ima svoj linearni kompleks ništičnih zraka, a takvi linearni kompleksi jednog pramena ništičnih prostora čine pramen takvih linearnih kompleksa. Takav pramen kompleksa ima svoju bazičnu (zajedničku, temeljnu) kongruenciju. U slučaju našeg koaksijalnog pramena ništičnih prostora tu bazičnu kongruenciju čine normale osi a tog pramena, dakle je to okomita linearna konoidalna hiperbolička kongruencija te osi kao ravnalice.

Ovakav pramen linearnih kompleksa ništičnih zraka ništičnih prostora jednog koaksijalnog pramena određen je njegovom osi a i pramenom pravaca tako da zraka tog pramena koja siječe tu os nju ne siječe okomito. Tom osi a i svakom zrakom tog pramena određen je po jedan kompleks ništičnih zraka u jednom ništičnom prostoru našeg pramena.

IV. Na temelju iznesenih činjenica mogu se dva pramena koaksijalnih ništičnih prostora dovesti lako u projektivan odnos, a prema tome i njihovi pramenovi linearnih kompleksa njihovih ništičnih zraka, te odrediti i njihovi proizvodi. Takva se projektivna pridruženost zadaje potpuno analogno kao što se to radi kod nizova tačaka, ili pramenova ravnina, ili pramenova pravaca. Tj. ili se pridružuju parovi kojima parametri imaju istu vrijednost, ili se trima elementima (kompleksima) u jednom pramenu jednojednoznačno pridruže tri elementa u drugom pramenu. Bazične kongruencije ovakvih dvaju pramenova linearnih ništičnih kompleksa imaju uvijek jedan zajednički hiperbolički paraboloid, kojemu su direkcione ravnine okomite na osi tih pramenova.

V. Kao što je poznato, svaki ništični prostor ima i svoj kvadratni osni kompleks. Pramen ništičnih prostora daje očito i pramen takvih kvadratnih osnih kompleksa. Zrake ovakvog osnog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom prostora, čine stožac 2. stupnja, a nožišta tih zraka čine prostornu kubnu krivulju 3. reda. Takvi stošci ništičnih prostora jednog pramena čine u svakoj tački prostora pramen stožaca 2. stupnja. Svih ovakvih ∞^3 pramenova stožaca su međusobno projektivno pridruženi, ako u njima pridružujemo stošce istih kompleksa. Nožišta na izvodnicama svih ovakvih ∞^1 stožaca jedne tačke P prostora leže na uspravnom kružnom valjku, koji sadržava os a i tačku P tako da se oni nalaze u dijametralnom položaju na tom valjku.

Očito je da se ovakva dva pramena osnih kompleksa dvaju koaksijalnih pramenova ništičnih prostora lako mogu dovesti u projektivan odnos, a njihov proizvod će biti kompleks 4. stupnja.

Institut za matematiku Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 8. prosinca 1967. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.