

**EINE NEUE EIGENSCHAFT DES FLÄCHENBÜSCHELS  
2. GRADES**

**JEDNO SVOJSTVO PRAMENA PLOHA 2. STUPNJA**

**Vilko Niče, Zagreb**

Sonderabdruck aus  
GLASNIK MATEMATIČKI 3 (23) (1968), 261—263

---

Štamparski zavod »Ognjen Prica« Zagreb, Savska c. 31, 1968.

## EINE NEUE EIGENSCHAFT DES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

Vilko Niče, Zagreb

### Einleitung

Alle eine gemeinsame Raumkurve 4. Ordnung I. Art enthaltenden Flächen 2. Grades bilden, wie bekannt, ein Flächenbüschel 2. Grades. Diese Flächen seien mit  $\varphi_n$ , und das Flächenbüschel mit  $(\varphi_n)$ , bezeichnet. Offenbar kann diese Raumkurve 4. Ordnung I. Art verschiedene Formen annehmen (ein oder zweiteilig), und in Kurven niedrigerer Ordnung zerfallen. Die Grundraumkurve 4. Ordnung I. Art dieses Flächenbüschels sei mit  $g^4$  bezeichnet. Die Normalen jeder der  $\infty^1$  Flächen  $\varphi_n$  längs der Grundkurve  $g^4$  bilden eine Regelfläche, die diese Fläche  $\varphi_n$  in dieser Grundkurve  $g^4$  und noch in einer weiteren Raumkurve  $k_n$  durchdringt. Die stetige Menge derartiger  $\infty^1$  Raumkurven  $k_n$  bildet eine interessante Fläche, die wir in dieser Arbeit betrachten und untersuchen werden. Es sei diese unbekannte Fläche mit  $F_n$  bezeichnet.

### 1. Über eine besondere ebene Kurve 3. Ordnung

Das Erzeugnis eines Strahlbüschels 1. Ordnung und eines Kurvenbüschels 2. Grades, die projektiv zugeordnet sind, ist, wie bekannt, eine Kurve 3. Ordnung. Nimmt man den Scheitel  $K$  des Strahlbüschels 1. Ordnung in einem der vier Grundpunkte, etwa  $A, B, C, D$ , des Kurvenbüschels 2. Grades an, z. B.  $K \equiv A$ , dann bekommt man auf der erzeugten Kurve 3. Ordnung im Punkt  $K$  einen Doppelpunkt. Das Strahlbüschel  $(K)$  und das Büschel der Berührungsgeraden der Kurven des Kurvenbüschels 2. Grades im Punkt  $K \equiv A$  sind, wie bekannt, zwei kollokale projektiv zugeordnete Strahlbüschel, deren Doppelgeraden die Berührungsgeraden der erzeugten Kurve 3. Ordnung in deren Doppelpunkt  $K$  sind.

Es sei ein Kurvenbüschel 2. Grades durch seine vier Grundpunkte  $A, B, C, D$  gegeben. Der Grundpunkt  $A$  sei der Scheitel  $K \equiv A$  eines Strahlbüschels  $(K)$  2. Grades, das dem Kurvenbüschel 2. Grades so projektiv zugeordnet sein soll, dass die Berührungsgerade einer Kurve 2. Grades dieses Büschels im Punkt  $K \equiv A$  auf

dem dieser Kurve zugeordneten Strahl im Strahlbüschel ( $K$ ) senkrecht steht. Diese zwei kollokalen, auf diese Weise projektiv zugeordneten Strahlbüschel bilden also ein zirkularinvolutorisches Strahlbüschel, mit einem Paar isotroper Doppelgeraden. Die auf diese Weise durch derartige zwei Büschel erzeugte Kurve 3. Ordnung hat also den Punkt  $K \equiv A$  als einen isolierten Doppelpunkt, in welchen sie durch ein isotropes Geradenpaar berührt wird. Es handelt sich also um eine derartige Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht Null, deren ein Brennpunkt in ihren Doppelpunkt fällt.

In unserem Betrachtungen über die bisher unbekannte Fläche  $F_n$  werden wir sehr bald auf derartige Kurven 3. Ordnung treffen.

## 2. Ein besonderes Schnittkurvensystem der Fläche $F_n$

Man nehme auf der Grundkurve  $g^4$  des gegebenen Flächenbüschels ( $\varphi_n$ ) 2. Grades einen Punkt  $K$  ganz beliebig an. Diese Raumkurve  $g^4$ , die, wie bekannt, 4. Ordnung I. Art ist, werde in dem Punkt  $K$  durch die Gerade  $t$  berührt. Durch die Grundkurve  $g^4$  und eine Ebene  $\tau$  der Berührungsgersten  $t$  ist, wie bekannt, eine Fläche  $\varphi_1$  des Flächenbüschels ( $\varphi_n$ ) bestimmt, die im Punkt  $K$  durch diese Ebene  $\tau$  berührt wird. Auf diese Weise ist bekanntlich das Ebenenbüschel  $[\tau]$  mit der Achse  $t$  diesem Flächenbüschel ( $\varphi_n$ ) 2. Grades projektiv zugeordnet. Die Normalen der Flächen  $\varphi_n$  des Büschels ( $\varphi_n$ ) im Punkt  $K$  bilden ein Strahlbüschel ( $K_n$ ), das sich in der Ebene  $\alpha \perp t$  befindet, die die Berührungsebenen  $\tau_n$  der Flächen  $\varphi_n$  im Punkt  $K$  in einem anderen, mit dem Strahlbüschel ( $K_n$ ) kollokalen Strahlbüschel ( $K_t$ ) so schneidet, dass die Strahlen eines zugeordneten Paares dieser zwei kollokalen Strahlbüschel zu einander senkrecht liegen. Diese zwei kollokalen Strahlbüschel bilden also ein zirkulares involutorisches Strahlbüschel, durch dessen konjugiert imaginäre Doppelgeraden ein isotropes Geradenpaar definiert ist.

Die Ebene  $\alpha \perp t$  schneidet das Flächenbüschel ( $\varphi_n$ ) in einem Kurvenbüschel 2. Grades ( $K^2$ ), das wegen  $(K_n) \overline{\wedge} (K_t)$  dem Strahlbüschel ( $K_n$ ) auch projektiv zugeordnet ist, also  $(K_n) \overline{\wedge} (K^2)$  gilt. Auf Grund des in Abt. 2. dieser Arbeit Erwähnten folgt, dass offenbar das Erzeugnis des Strahlbüschels ( $K_n$ ) und des ihm projektiv zugeordneten Kurvenbüschels ( $K^2$ ) eine Kurve  $k^3$  3. Ordnung ist, die in ihrem isolierten Doppelpunkt  $K$  durch ein isotropes Geradenpaar berührt wird, also in diesem Punkt einen ihrer Brennpunkte hat.

Da wir den Punkt  $K$  auf der Grundkurve  $g^4$  ganz beliebig angenommen haben, gilt offenbar dasselbe auch für alle anderen Punkte dieser Raumkurve  $g^4$ . Durch die Berührungsgerade  $t$  und durch die zwei erwähnte isotropen Berührungsgersten der Schnittkurve der Fläche  $F_n$  mit der Normalebene  $\alpha$  in diesem Punkt  $K$  ist ein isotropes Ebenenpaar bestimmt, dessen Ebenen die betrachtete Fläche  $F_n$  in dem Punkt  $K$  berühren. Es gilt also folgender Satz:

*Die Grundraumkurve 4. Ordnung 1. Art eines Flächenbüschels 2. Grades ist eine isolierte Doppelkurve der Fläche  $F_n$  dieses Büschels, längs welcher diese Fläche  $F_n$  durch isotrope Ebenenpaare berührt wird.*

Auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen folgt, dass die Fläche  $F_n$  des Flächenbüschels ( $\varphi_n$ ) durch die  $\infty^1$  eben beschriebenen Kurven  $k_n^3$  in den Normalebenen  $\alpha_n$  der Grundkurve  $g^4$  dieses Flächenbüschels gebildet wird. Es ist offenbar, dass diese Normalebenen  $\alpha_n$  die Fläche  $F_n$  nicht nur in den kubischen Kurven  $k_n^3$  schneiden, sondern noch in je einer ebener Kurve  $\overline{k_n}$  bisher unbekannter Ordnung.

Da die durch ein Strahlbüschel 1. Ordnung und durch ein Kurvenbüschel 2. Grades erzeugte Kurve 3. Ordnung alle vier Grundpunkte des Kurvenbüschels 2. Grades enthält, schneiden offenbar alle kubischen Kurven  $k_n^3$  in den Normalebenen  $\alpha_n$  der Grundkurve  $g^4$  diese Grundkurve noch in drei Punkten, von welchen wenigstens einer reell sein muss. Die Fläche  $F_n$  des Flächenbüschels ( $\varphi_n$ ) enthält also die Grundkurve  $g^4$  nicht nur als eine isolierte Doppelkurve, sondern es liegt diese Kurve noch wenigstens als eine einfache reelle Kurve auf dieser Fläche  $F_n$ . Auf diese Weise muss die Grundkurve  $g^4$  wenigstens als eine dreifache Kurve der Fläche  $F_n$  betrachtet werden.

Wie schon erwähnt, schneiden die Normalebenen  $\alpha_n$  der Grundkurve  $g^4$  die Fläche  $F_n$  in ihren Punkten  $K_n$  ausser in den kubischen Kurven  $k_n^3$ , noch in einer weiteren Kurve  $\overline{k_n}$ , die den Punkt  $K_n$  reell enthält, und sie enthält die weiteren drei Schnittpunkte auf der Grundkurve  $g^4$  als isolierte Doppelpunkte und auch noch als einen wenigstens einfachen reellen Punkt.

Die die kubischen Teilschnittkurven  $k_n^3$  der Fläche  $F_n$  mit den Normalebenen  $\alpha_n$  der Grundkurve  $g^4$  in ihren isolierten Doppelpunkten  $K_n$  berührenden isotropen Geradenpaare bilden offenbar eine Regelfläche isotroper Erzeugenden, die  $(4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 10$ -ten Grades ist ([1], S. 48) und reell nur die Raumkurve  $g^4$  enthält.

### 3. Die Ordnung der Fläche $F_n$

Um die Ordnung der Fläche  $F_n$  zu bestimmen, werden wir zuerst den Grad derjenigen Regelfläche bestimmen, die durch die Normalen einer der Flächen  $\varphi_n$  des Flächenbüschels ( $\varphi_n$ ) in den Punkten der Grundkurve  $g^4$  gebildet wird. Alle derartigen  $\infty^1$  Normalenregelflächen bilden ein Regelfächensystem, deren sämtliche Flächen nur die Grundkurve  $g^4$  gemeinsam enthalten, und den Flächen  $\varphi_n$  des Flächenbüschels ( $\varphi_n$ ) dieser Grundkurve  $g^4$  eindeutig zugeordnet sind. Es ist offensichtlich, dass die Berührungsebene einer Fläche  $\varphi_n$  des Flächenbüschels ( $\varphi_n$ ) und die der ihr zugeordneten eben erwähnten Normalenregelfläche, in einem Punkt

$K_n$  der Grundkurve  $g^4$ , aufeinander senkrecht stehen, und dadurch diese eineindeutige Zuordnung auf gewisse Weise auch als projektiv betrachtet werden kann. Unsere unbekannte Fläche  $F_n$  kann also als das Erzeugnis des eineindeutig zugeordneten Flächenbüschels  $(\varphi_n)$  2. Grades der Grundkurve  $g^4$ , und des beschriebenen Normalenregelflächensystems dieser Grundkurve ausgeführt werden, so wie es schon in der Einleitung dieser Arbeit angedeutet war.

Da, wie bekannt, die Kongruenz der Normalen einer Fläche 2. Grades 6.-ter Ordnung und 2.-ter Klasse ist, bilden alle diejenigen Normalen einer Fläche  $\varphi_n$  2. Grades, die eine Gerade im Raum schneiden, eine Regelfläche 8. Grades. Die Fusspunkte der Erzeugenden dieser Regelfläche bilden auf der Fläche  $\varphi_n$  eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art ([3], S. 64—65).

Man wähle in unserem Flächenbüschel  $(\varphi_n)$  der Grundkurve  $g^4$  eine Fläche  $\varphi_1$ . Die Normalen dieser Fläche  $\varphi_1$ , die eine beliebig angenommene Gerade  $p$  schneiden und, wie eben erwähnt, eine Regelfläche 8. Grades bilden, haben auf dieser Fläche  $\varphi_1$  Fusspunkte, die, wie erwähnt, auf dieser Fläche eine weitere Raumkurve  $s^4$  4. Ordnung I. Art bilden. Diese zwei, auf der Fläche  $\varphi_1$  sich befindenden, Raumkurven  $g^4$  und  $s^4$  haben, wie bekannt, acht gemeinsame Punkte (assoziierte Punkte). Auf Grund dessen folgt, dass die Regelfläche der längs der Grundkurve  $g^4$  auf die Fläche  $\varphi_1$  gestellten Normalen, und die eben erwähnte Regelfläche 8. Grades der Leitgeraden  $p$ , acht gemeinsame Erzeugende haben. Hieraus folgt weiterhin, dass die beliebig angenommene Gerade  $p$  die längs der Raumkurve  $g^4$  auf die Fläche  $\varphi_1$  gestellte Normalenregelfläche in acht Punkten schneidet, also diese Normalenregelfläche 8. Grades ist. Es gilt also der folgende Satz:

*Die längs einer auf einer Fläche 2. Grades sich befindenden Raumkurve 4. Ordnung I. Art auf diese Fläche gestellten Normalen bilden eine Regelfläche 8. Grades.*

Jeder der Flächen  $\varphi_n$  unseres Flächenbüschels  $(\varphi_n)$  ist eine derartige Normalenregelfläche 8. Grades der Grundkurve  $g^4$  eineindeutig zugeordnet. Ausser in der Grundkurve  $g^4$  schneiden sich zwei derartige, eineindeutig zugeordnete Flächen noch in einer Restraumkurve 12. Ordnung  $\overline{k_n^{12}}$ , da eine dieser zwei Flächen vom Grad zwei, und die andere vom Grad acht ist, also ihre Durchdringungskurve  $12 + 4 = 16$ . Ordnung sein muss. Alle derartigen stetig im Raum verbundenen Restdurchdringungsraumkurven 12. Ordnung bilden also auch die untersuchte Fläche  $F_n$ .

Wenn die Normalenregelflächen der Grundkurve  $g^4$  im Flächenbüschel  $(\varphi_n)$  ein gewöhnliches Regelflächenbüschel 8. Grades bildeten, so wie es die Flächen  $\varphi_n$  tun, wäre die Fläche  $F_n$  das Erzeugnis dieser zwei eineindeutig zugeordneten Flächenbüschel, müsste also die Ordnung 10 haben ([2], S. 274—275). Dies kann aber

nicht gelten, da die erwähnten Normalenregelflächen kein gewöhnliches Flächenbüschel 8. Grades bilden. Jede zwei Regelflächen 8. Grades dieses Normalenregelflächensystems durchdringen sich ausser in der Grundkurve  $g^4$  noch in einer Raumkurve  $g_n^{60}$  60. Ordnung, die nicht allen diesen  $\infty^1$  Normalenregelflächen 8. Grades gemeinsam ist. Man sieht also, dass alle diese Normalenregelflächen 8. Grades wirklich kein gewöhnliches Flächenbüschel bilden, und deshalb auch der Schluss über das Erzeugnis dieser zwei eindeutig zugeordneten Flächensysteme auf die bekannte Weise nicht richtig ist.

Die Durchdringungskurve 16. Ordnung jeder der Flächen  $\varphi_n$  des Büschels ( $\varphi_n$ ) mit der ihr zugeordneten Normalenregelfläche 8. Grades längs der Grundkurve  $g^4$  zerfällt, wie gezeigt, in diese Raumkurve  $g^4$  4. Ordnung und in die erwähnte Restraumkurve 12. Ordnung. Da jeder Raumpunkt nur eine Fläche  $\varphi_n$  des Büschels ( $\varphi_n$ ) enthält, kann die Fläche  $\varphi_n$  mit der betrachteten Fläche  $F_n$  keine anderen gemeinsamen Punkte haben, ausser den Punkten der Grundkurve  $g^4$ , und den Punkten der erwähnten Restdurchdringungsraumkurve 12. Ordnung. Die Fläche  $F_n$  wird also tatsächlich, wie schon erwähnt, durch die stetige Menge derartiger  $\infty^1$  Raumkurven 12. Ordnung gebildet. Auf Grund des eben Erwähnten folgt weiterhin auch, dass die Fläche  $F_n$  keine mehrfachen Punkte haben kann, ausser denjenigen, die die Grundkurve  $g^4$  bilden.

In unseren bisherigen Betrachtungen sahen wir, dass die Fläche  $F_n$  eines Flächenbüschels ( $\varphi_n$ ) dessen Grundkurve  $g^4$  4. Ordnung I. Art zweimal isoliert imaginär und wenigstens einmal reell enthält. Wenn diese Grundkurve  $g^4$  eine dreifache Kurve der Fläche  $F_n$  bliebe, also mit jeder der Flächen  $\varphi_n$  2. Grades diese dreifache Raumkurve 4. Ordnung und die eben erwähnte einfache Restraumkurve 12. Ordnung gemein hätte, müsste jede der Flächen  $\varphi_n$  die Fläche  $F_n$  in einer zerfallenen und ausgearteten Raumkurve  $4 \cdot 3 + 12 = 24$ . Ordnung durchdringen. In diesem Fall müsste also die Fläche  $F_n$  von der Ordnung zwölf sein. Die Ordnung der Fläche  $F_n$  hängt also ausschliesslich nur von der Mehrfachkeit der Grundkurve  $g^4$  auf dieser Fläche ab. Es muss also zuerst gefunden werden, welche Vielfachheit ein Punkt der Grundkurve  $g^4$  auf der Fläche  $F_n$  haben kann?

Wie wir schon vorher sahen, ist jeder dieser Punkte ein isolierter Doppelpunkt. Eine weitere Mehrfachkeit wird durch die Zahl derjenigen Normalen der Grundkurve  $g^4$  gegeben, die einen der Punkte dieser Grundkurve enthalten und nicht deren Normale in diesem Punkt sind, sondern nur als gewöhnliche Bisekanten zur Raumkurve  $g^4$  gehören. Jede dieser Normalen ist Normale einer der Flächen im Büschel ( $\varphi_n$ ), die diese Fläche in diesem zweiten Schnittpunkt mit der Grundkurve  $g^4$  schneidet, weil alle Flächen  $\varphi_n$  die Grundkurve  $g^4$  enthalten. Dieser zweite Schnittpunkt ist

also ein Punkt der Fläche  $F_n$ . Durch die Zahl der einen Punkt der Grundkurve  $g^4$  enthaltenden Normalen dieser Raumkurve, die nicht Normalen in diesem Punkt sind, ist daher ihre Mehrfachheit über zwei auf der Fläche  $F_n$  gegeben. Man suche also die Zahl derjenigen Normalen der Grundkurve  $g^4$ , die einen ihrer Punkte enthalten, und nicht ihre Normalen in diesem Punkt sind.

Die Berührungsgerechten der Grundkurve  $g^4$ , die 4. Ordnung I. Art ist, bilden bekanntlich die bekannte Chaslessche Regelfläche 8. Grades ([3], S. 48). Diese Regeltangentenfläche schneidet die unendlich ferne Ebene in einer Kurve  $r^8$  8. Ordnung. Offenbar sind die Punkte dieser unendlich fernen Kurve den Punkten der Grundkurve  $g^4$  eineindeutig zugeordnet. Die dieser unendlich fernen Kurve  $r^8$  durch den absoluten Kegelschnitt polar zugeordnete unendlich ferne Kurve  $t^8$  ist offenbar 8. Klasse, da sie durch die Polaren der Punkte der erwähnten Schnittkurve  $r^8$  8. Ordnung, bezüglich des absoluten Kegelschnittes, eingehüllt wird. Die Berührungsgerechten dieser unendlich fernen Kurve  $t^8$  sind offenbar auch eineindeutig den Punkten der Grundkurve  $g^4$  zugeordnet, und jede durch einen derartigen Punkt  $K$  der Raumkurve  $g^4$  und durch die diesem Punkt zugeordnete unendlich ferne Berührungsgerechte der Kurve  $t^8$  bestimmte Ebene ist die Normalebene der Grundkurve  $g^4$  in diesem Punkt  $K$ .

Man wähle jetzt auf der Grundkurve  $g^4$  beliebig einen Punkt  $K$ . Die den Punkt  $K$  enthaltenden Bisekanten der Raumkurve  $g^4$  bilden einen Kegel 3. Grades, da diese Raumkurve 4. Ordnung ist. Dieser Kegel schneidet die unendlich ferne Ebene in einer Kurve 3. Ordnung  $u^3$ , deren Punkte ebenfalls den Punkten der Kurve  $r^8$ , und den Berührungsgerechten der Kurve  $t^8$ , eineindeutig zugeordnet sind. Diejenigen Punkte der kubischen Kurve  $u^3$ , die auf den ihnen zugeordneten Berührungsgerechten der Kurve  $t^8$  liegen, sind die unendlich fernen Punkte der den Punkt  $K$  enthaltenden Normalen der Raumkurve  $g^4$ . Diese Normalen schneiden diese Raumkurve  $g^4$  in solchen ihre Punkte senkrecht, die denjenigen Berührungsgerechten der Kurve  $t^8$  zugeordnet sind, auf welchen sich die ihnen zugeordneten Punkte der kubischen Kurve  $u^3$  befinden. Da die Kurve  $u^3$  3. Ordnung ist, und die ihr eineindeutig zugeordnete Kurve  $t^8$  die 8. Klasse hat, bestehen, wie bekannt,  $8 + 3 = 11$  Berührungsgerechten der Kurve  $t^8$ , auf welchen die ihnen zugeordneten Punkte der Kurve  $u^3$  liegen ([1], S. 48). Der Punkt  $K$  der Raumkurve  $g^4$  enthält also 11 Normalen dieser Raumkurve, die selbstverständlich nicht alle reell sein müssen, und nicht Normalen dieser Grundkurve im Punkt  $K$  sind. Es gilt also auch folgender Satz:

*Die Grundkurve eines Flächenbüschels 2. Grades ist eine isolierte Doppelkurve und eine elffache Kurve, also eine dreizehnfache Kurve der Fläche  $F_n$  dieses Flächenbüschels 2. Grades.*

Offenbar kann die Raumkurve  $g^4$  als elffache Kurve der Fläche  $F_n$  auch teilweise oder ganz, zwei oder mehrfach isoliert sein.

Auf Grund der in diesem Satz ausgesprochenen Tatsache folgt, dass jede Fläche  $\varphi_n$  des Büschels  $(\varphi_n)$  dessen Fläche  $F_n$  in der dreizehnfachen Kurve  $g^4$  4. Ordnung, und in einer Raumkurve 12. Ordnung durchdringt. Die Durchdringungskurve der Fläche  $F_n$  des Büschels  $(\varphi_n)$  mit jeder seiner Fläche  $\varphi_n$  ist also eine zerfallene Raumkurve  $4 \cdot 13 + 12 = 64$ . Ordnung. Da jede Fläche  $\varphi_n$  2. Ordnung ist, muss die Fläche  $F_n$  des Flächenbüschels  $(\varphi_n)$  die Ordnung 32 haben. Man hat also den gesuchten Satz in folgender Form gefunden:

*Die Fläche  $F_n$  eines Flächenbüschels 2. Grades ist von der 32. Ordnung.*

Die Art, die Ausartung und die Symmetrieeen der Fläche  $F_n$  eines Flächenbüschels 2. Grades hängen offenbar von der Form, Art und Ausartung der Grundkurve  $g^4$  dieses Flächenbüschels 2. Grades ab. Es wäre interessant diese Fläche  $F_n$  innerhalb der 11 bekannten Arten der Flächenbüschel 2. Grades (nach von Staudt) zu betrachten, aber derartige Betrachtungen der Fläche  $F_n$  eines Flächenbüschels 2. Grades sind in dieser Arbeit nicht vorgesehen.

#### L I T E R A T U R :

- [1] E. Müller — J. Krames, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, III. Band, Leipzig, 1931,  
 [2] G. A. Peschka, Darstellende und projektive Geometrie, II. Band, Wien, 1884,  
 [3] Th. Reye, Die Geometrie der Lage, III. Band, Leipzig, 1910.

(Eingegangen am 16. XII 1967.)

*Mathematisches Institut  
der Universität Zagreb*

#### JEDNO SVOJSTVO PRAMENA PLOHA 2. STUPNJA

Vilko Niče, Zagreb

#### Sadržaj

Prostornom krivuljom 4. reda I vrste određen je, kao što znamo, pramen ploha 2. stupnja. Ovu krivulju označimo s  $g^4$ , a njen pramen ploha s  $(\varphi_n)$ . Postavimo li duž krivulje  $g^4$  normale na jednu plohu  $\varphi$  pramena  $(\varphi_n)$ , tada te normale čine pravčastu plohu 8. stupnja. Ova pravčasta ploha prodire plohu  $\varphi$  u krivulji  $g^4$  i još jednoj prostornoj krivulji 12. reda. Svakoj plohi  $\varphi_n$  pramena  $(\varphi_n)$  pridružena je na taj način jedna takva pravčasta ploha



8. stupnja i na svakoj od njih se nalazi jedna opisana prostorna krivulja 12. reda. Nprekinuti skup ovakvih prostornih krivulja 12. reda jednog pramena ploha 2. stupnja čini opću plohu  $F_n$  32. reda.

Temeljna prostorna krivulja  $g^4$  pramena  $(\varphi_n)$  je 13-struka krivulja te plohe  $F_n$ . Od toga je ta krivulja jedamput dvostruka izolirana, a u svakoj njenoj tački dira tu plohu  $F_n$  par izotropnih ravnina. Preostala višestrukost krivulje  $g^4$  može biti rastavljeno ili potpuno ili djelomice izolirana, ali na plohi  $F_n$  ne postoje druge višestruke tačke osim onih na krivulji  $g^4$ .