JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VILIM NIČE

DIE GEMEINSAMEN KONGRUENZEN DER VIER STRAHLKOMPLEXE EINES POLARRAUMBÜSCHELS

ZAJEDNIČKE KONGRUENCIJE ČETIRIJU KOMPLEKSA PRAMENA POLARNIH PROSTORA

ZAGREB

1968

VILIM NIČE

DIE GEMEINSAMEN KONGRUENZEN DER VIER STRAHLKOMPLEXE EINES POLARRAUMBÜSCHELS

EINFÜHRUNG: Durch ein Polarraumbüschel sind, wie bekannt, vier Strahlkomplexe bestimmt und ihm zugeordnet. Das sind: 1) Der quadratische tetraedrale Basiskomplex, dessen Haupttetraeder das Autopolartetraeder dieses Polarraumbüschels ist, 2) der kubische Majcensche Strahlkomplex, 3) der Normalenkomplex der Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels, der achten Grades ist, und 4) der kubische Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen diesen Inzidenzflächen (der Tangentialkurzwegekomplex).

Es seien das Polarraumbüschel mit (Π_n), das Büschel seiner Inzidenzflächen φ_n mit Π_n, und seine vier Strahlkomplexe mit (TK), (MK), (NK) und (RK) bezeichnet. Die Grundkurve 4. Ordnung I. Art des Inzidenzflächenbüschels Π_n sei mit c^4 bezeichnet. Jeder dieser vier Komplexe wurde in bisherigen Arbeiten einzeln, mit seinen wichtigsten Eigenschaften, bearbeitet. Nur in der Arbeit »Über neue Eigenschaften der Büschel und der Bündel polarer Raüme« wurde der gemeinsame Strahlort (Kongruenz) des quadratischen tetraedralen und des kubischen Majcenschen Komplexes betrachtet, und die Ordnung der Fläche der stetigen quadratischen Punktmenge, der den Strahlen dieses gemeinsamen Strahlortes zugeordneten Raumpunkte, bestimmt. In dieser Arbeit haben wir die Absicht weitere fünf durch je zwei der erwähnten Strahlkomplexe bestimmten Strahlkongruenzen zu betrachten. Selbstverständlich werden auch die geometrischen Örter der den Strahlen dieser Kongruenzen zugeordneten Punkte bezüglich beider seiner Komplexe erforscht und betrachtet.

Es ist offensichtlich, dass die betrachteten Kongruenzen auch imaginäre Teile haben können, da zwei Komplexstrahlkegel in jedem Raumpunkt sich auch in Paaren konjugiert imaginärer Erzeugenden durchdringen können. Diese imaginären Teile werden wir in dieser Arbeit nicht speziell betrachten, da dies allen Aussichten nach mit synthetischen Mitteln nicht leicht ausführbar wäre. Über einige spezielle reelle Teile der vier erwähnten Komplexe und ihrer gemeinsamen Kongruenzen wird etwas später gesprochen.

Die durch die Strahlkomplexe $I = (TK)$, $II = (MK)$, $III = (NK)$ und $IV = (RK)$ bestimmten Kongruenzen bezeichne man mit $I - II = (TM)$, $I - III = (TN)$, $I - IV = (TR)$, $II - III = (MN)$, $II - IV = (MR)$ und $III - IV = (NR)$. Die Kongruenz (TM) wurde schon in der vorher erwähnten Arbeit betrachtet, braucht also hier nicht in Betracht gezogen zu werden. Als nächste wäre also die (TN) Kongruenz des tetraedralen Komplexes und des Normalenkomplexes der Inzidenzflächen an der Reihe.

Bevor wir aber die aufgezählten geometrischen Erzeugnisse näher zu betrachten beginnen, müssen wir uns zuerst mit einigen Eigenschaften der vier erwähnten, einem Polarraumbüschel zugeordneten Strahlkomplexen beschäftigen, besonders mit denjenigen Eigenschaften, die mit der unendlich fernen Ebene verbunden sind.

Die unendlich fernen Strahlen des (TK) Komplexes hüllen eine Kurve 2. Grades ein, und die ihnen durch diesen Komplex zugeordneten Punkte bilden die bekannte kubische Mittelpunktkurve k^3 der Inzidenzflächen φ_n.

Jede Gerade des Raumes berührt, wie bekannt, zwei Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, und das gilt offenbar auch für die unendlich ferne Geraden. Jede Gerade der unendlich fernen Ebene berührt also zwei Inzidenzflächen φ_n des Büschels Π_n. Auf Grund der bekannten Definition des Majcenschen kubischen (MK) Komplexes gehören daher alle Geraden der unendlich fernen Ebene dem (MK) Komplex als Strahlen an. Da diese Strahlen unendlich fern zwei Inzidenzflächen φ berühren, müssen sie als zweideutige singuläre Strahlen des (MK) Komplexes betrachtet werden.

Drei Flächen des Inzidenzflächenbüschels Π_n berühren die unendlich ferne Ebene. Da sich in dieser Ebene der absolute Kegelschnitt befindet, sind die unendlich fernen Berührungsgeraden dieser drei Flächen auch deren »Normalen«. Also, die Strahlen der drei erwähnten Tangentenbüschel 1. Ordnung in der unendlich fernen Ebene sind Strahlen des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (NK) Komplexes.

Die Bestimmung des Grades des (NK) Komplexes wurde in der Arbeit »Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades« mittels der Klasse 8 der Einhühllungskurve der in einer Ebene liegenden Strahlen des (NK) Komplexes durchgeführt. Jeder unendlich ferne Punkt in dieser Ebene enthielt fünf dieser Strahlen, daher war die unendlich ferne Gerade eine dreifache Berührungsgerade dieser Kurve 8. Klasse. Jede unendlich ferne Gerade ist also ein dreideutiger Strahl des (NK) Komplexes. Diese Tatsache kann auch auf folgende Weise bewiesen werden: Die Normale einer Fläche in einem ihrer Punkte P enthält den unendlich fernen Pol der unendlich fernen Geraden der Berührungsebene dieser Fläche in diesem Punkt, bezüglich des absoluten Kegelschnittes. Selbstverständlich kann sich der Punkt P auch unendlich fern befinden.

Es sei p^n eine unendlich ferne Gerade, und ihr unendlich ferner Pol bezüglich des absoluten Kegelschnittes sei mit P^n bezeichnet. Jedem Punkt R_n der Geraden p^n ist eine Polare r_n bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnet, die den Pol P^n enthält. Jede dieser Polaren r_n berührt zwei Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n in Punkten, die mit B^1_n, B^2_n bezeichnet sein. Offenbar ist die Gerade r_n die gemeinsame unendlich ferne Gerade der Berührungsebenen dieser zwei Inzidenzflächen φ_n in ihren Punkten B^1_n, B^2_n, also sind die unendlich fernen Verbindungsgeraden $P^n B^1_n$, $P^n B^2_n$ die Normalen dieser zwei Flächen φ_n in ihren Punkten B^1_n, B^2_n. Wie bekannt bilden die Punktepaare B^1_n, B^2_n auf allen den Pol enthaltenden Polaren r_n eine Kurve 3. Ordnung [1], die die Gerade p^n in drei Punkten schneidet. Es gibt also auf der Geraden p^n drei Punkte R_n, für die einer der Punkte des ihnen zugeordneten Punktepaares B^1_n, B^2_n auf dieser Geraden liegt. Die Gerade p^n ist also eine Normale dreier Inzidenzflächen φ_n in ihren auf dieser Geraden liegenden Punkten. Jede unendlich ferne Gerade ist also ein dreideutiger Strahl des (NK) Komplexes in jedem Polarraumbüschel (Π_n).

Es sei weiterhin p der im (TK) Komplex einem Raumpunkt P zugeordnete Strahl. Findet man auf der unendlich fernen Geraden der Ebene (Pp) den dem unendlich fernem Punkt P^n der Geraden p_n bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugierten Punkt $\bar{P}^n$, so ist die Verbindungsgerade der Punkte $P, \bar{P}^n$ der dem Punkt P im (RK) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) zugeordnete Strahl [2]. Befindet sich der Punkt P unendlich fern, dann liegt unendlich fern auch der diesem Punkt im (RK) Komplex zugeordnete Strahl.

Die den Punkten einer unendlich fernen Geraden zugeordnete Strahlen im (TK) Komplex bilden ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades, die durch diese unendlich ferne Gerade in zwei Punkten geschnitten wird. Auf Grund des vorher Erwähnten ist also diese unendlich ferne Gerade ein doppeldeutiger Strahl des (RK) Komplexes. Da die unendlich ferne Gerade ganz beliebig angenommen werden kann, gilt, dass alle Geraden der unendlich fernen Ebene Strahlen des (RK) Komplexes in jedem Polarraumbüschel (Π_n) des Raumes sind.

I. Die (TN) Kongruenz des tetraedralen und des Normalenkomplexes des Polarraumbüschels und einige ihrer Eigenschaften. Der tetraedrale Strahlkomplex eines Polarraumbüschels ist, wie bekannt, vom Grad zwei, während sein Normalenkomplex vom Grad acht ist. Die gemeinsame (TN) Kongruenz müsste also den Grad sechzehn haben. Da aber alle Geraden der Hauptpunkte eines Polarraumbüschels Strahlen seines tetraedralen Basiskomplexes und seines Normalenkomplexes sind, gehören also auch die vier Strahlenbündel der Hauptpunkte dieser Kongruenz an. Wegen dieser Ausartung in vier Strahlbündel, die nicht in Betracht gezogen werden, hat also die (TN) Kongruenz die Ordnung 12 und die Klasse 16.

Jedem Strahl dieser (TN) Kongruenz ist ein Punkt durch den tetraedralen Basiskomplex, und ein weiterer durch den Normalenkomplex zugeordnet. Jede dieser zwei stetigen quadratischen Raumpunktmengen bildet eine Fläche, die wir jetzt näher untersuchen werden.

Die den Punkten einer Ebene zugeordneten Strahlen im tetraedralen Basiskomplex (TK) eines Polarraumbüschels (Π_n) bilden, wie bekannt, eine Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse, die von den Bisekanten der durch die Pole dieser Ebene bezüglich aller Inzidenzflächen bestimmten Raumkurve 3. Ordnung gebildet wird.

Die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des Normalenkomplexes eines Polarraumbüschels bilden eine Kurve 3. Ordnung,[1] und die Fusspunkte der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Normalenkomplexes, die einen Kegel 8. Grades bilden, liegen auf einer Raumkurve 9. Ordnung [3]. Auf Grund dieser zwei Eigenschaften folgt, dass diejenigen Strahlen des Normalenkomplexes eines Polarraumbüschels, deren Fusspunkte in einer Ebene τ liegen, eine Strahlkongruenz 9. Ordnung 3. Klasse bilden.[2] Also, jeder Punkt des Raumes,

[1] Siehe [1] S. 49.
[2] Siehe [3] S. 265.

ausser den Punkten der Ebene τ, enthält neue Strahlen des (NK) Komplexes, deren zugeordnete Fusspunkte in der Ebene τ liegen, und in jeder Ebene des Raumes, ausser der Ebene τ, liegen drei Strahlen des (NK) Komplexes, deren zugeordnete Fusspunkte in der Ebene τ sind. Die in der Ebene τ liegenden Strahlen des (NK) Komplexes hüllen eine Kurve 8. Klasse ein, und die diesen Strahlen zugeordneten Fusspunkte bilden, wie eben erwähnt, eine Kurve 3. Ordnung.

Es sei durch die Punkte einer Ebene τ eine derartige Strahlkongruenz 9. Ordnung 3. Klasse in unserem Polarraumbüschel (Π_n) gegeben. Der tetraedrale Basiskomplex dieses Polarraumbüschels ist, wie bekannt, vom Grade 2. Dieser tetraedrale Strahlkomplex und die beschriebene Strahlkongruenz 9. Ordnung 3. Klasse haben also eine Regelfläche vom Grad $2\,(9+3) = 24$ gemeinsam, deren Erzeugende Strahlen unserer (TN) Kongruenz sind. Die Ebene τ schneidet offenbar diese Regelfläche in einer Kurve 24. Ordnung. Da aber die (TN) Kongruenz von 16. Klasse ist, also in der Ebene τ sich 16 Strahlen dieser Kongruenz befinden, deren durch den (NK) Komplex zugeordnete Punkte auch in dieser Ebene liegen, sind auch diese Strahlen die Erzeugenden der erwähnten Regelfläche 24. Grades. Die Schnittkurve der Ebene τ und dieser Regelfläche 24. Grades zerfällt also in diese 16 Strahlen und in eine Kurve 8. Ordnung. Die durch den (NK) Komplex den Erzeugenden der erwähnten Regelfläche zugeordneten Punkte bilden also in der Ebene τ eine Kurve 8. Ordnung. Da die Ebene τ im Raum ganz beliebig angenommen war, gilt offensichtlich dasselbe für jede Ebene des Raumes. Den zweidimensionalen stetigen geometrischen Ort der durch den Normalenkomplex (NK) den Strahlen der (TN) Kongruenz zugeordneten Fusspunkte, schneidet also jede Ebene des Raumes in einer Kurve 8. Ordnung. Es gilt also folgende Satz:

Die den Strahlen der (TN) Kongruenz durch den betreffenden Normalenkomplex zugeordneten Fusspunkte bilden eine Fläche 8. Ordnung.

Man bezeichne diese Fläche mit F^{N}_{TN}. Der eben erwähnte Satz kann auch auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Im (TK) Basiskomplex eines Polarraumbüschels befindet sich immer eine Strahlkongruenz 12. Ordnung 16. Klasse, deren jeder Strahl eine Normale einer Inzidenzfläche dieses Polarraumbüschels ist. Die Fusspunkte dieser Normalen bilden eine Fläche 8. Ordnung.

Da die Normalen einer Fläche 2. Grades eine Kongruenz 6. Ordnung 2. Klasse bilden, bilden diejenigen Normalen jeder Inzidenzfläche φ

des Büschels Π_n, die auch Strahlen des (TK) Komplexes sind, eine Regelfläche $2(6+2) = 16$. Grades. Die Fusspunkte dieser Erzeugenden bilden offenbar eine Raumkurve 16. Ordnung, die die Durchdringungskurve der betreffenden Inzidenzfläche φ und der erwähnten Fläche 8. Ordnung ist. Diese Raumkurve 16. Ordnung ist auch eine Hälfte der Durchdringungskurve dieser Inzidenzfläche φ und der Erwähnten Regelfläche 16. Grades, die offenbar 32. Ordnung ist und in zwei Teile 16. Ordnung zerfällt.

Die beschriebene Fläche 8, Ordnung enthält die Grundkurve c^4 des Inzidenzflächenbüschels Π_n nicht, da die den Punkten dieser Grundkurve im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen die Tangenten dieser Raumkurve c^4 sind, während im (NK) Komplex diesen Punkten die Normalen dieser Raumkurve in diesen Punkten zugeordnet sind.

Die den Punkten der im Raum beliebig angenommenen Ebene τ zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex unseres Polarraumbüschels (Π_n) bilden, wie bekannt, eine Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse. Jeder Punkt, ausser den Punkten der Ebene τ, enthält also einen Strahl des (TK) Komplexes dessen zugeordneter Punkt in der Ebene τ liegt, und in jeder Ebene des Raumes, ausser der Ebene τ, befinden sich drei Strahlen des (TK) Basiskomplexes deren zugeordnete Punkte in der Ebene τ liegen.

Die gemeinsamen Strahlen des Normalenkomplexes und dieser Kongruenz bilden in diesem Polarraumbüschel eine Regelfläche vom $8(1+3) = 32$-ten Grade, und alle Erzeugenden dieser Fläche sind also Strahlen unserer (TN) Kongruenz.

Man nehme in einer Seitenebene des Haupttetraeders unseres Polarraumbüschels (Π_n) eine Gerade g, und betrachte die den Punkten dieser Geraden zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex dieses Polarraumbüschels. Die diesen Punkten im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, einen Kegel 2. Grades, dessen Spitze sich in dem dieser Seitenebene gegenüberliegendem Scheitel dieses Haupttetraeders befindet. Man weiss aber weiterhin, dass die Geraden der Scheitelpunkte des Haupttetraeders auch als Strahlen des (NK) Komplexes betrachtet werden können. Da die beliebig angenommene Ebene τ die vier Seitenebenen des Haupttetraeders in vier Geraden schneidet, zerfällt also die eben erwähnte Regelfläche 32. Grades in vier Kegel 2. Grades und in eine Regelfläche 24. Grades. Die Erzeugenden dieser Regelfläche sind diejenigen Strahlen der (TN) Kongruenz, deren durch den (TK) Komplex zugeordnete Punkte in der Ebene τ liegen und eine stetige Punktreihe, also eine Kurve bilden. Diese Kurve wird die Schnittkurve der

Ebene τ und des geometrischen Ortes (der Fläche) der den Strahlen der (TN) Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte sein, und die Ordnung dieser Kurve wird offenbar der Ordnung des erwähnten geometrischen Ortes gleich sein.

Wie erwähnt, bilden die den Punkten der Ebene τ zugeordneten Strahlen des (TK) Basiskomplexes eine Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse, die durch die Bisekanten der Polraumkurve 3. Ordnung der Ebene τ bezüglich der Inzidenzflächen φ_n des Büschels Π_n gebildet ist. Die erwähnte Regelfläche 24. Grades enthält also diese Raumkurve 3. Ordnung. Da ferner die (TN) Kongruenz 12. Ordnung ist, muss die eben erwähnte Raumkurve 3. Ordnung eine 12-fache Kurve unserer Regelfläche 24. Grades sein. Man betrachte in der Ebene τ eine beliebige Gerade p. Die den Punkten dieser Geraden p im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, eine Regelfläche 2. Grades, die die eben erwähnte Raumkurve 3. Ordnung enthält, weil die Gerade p in der Ebene τ liegt. Die Durchdringungskurve dieser Regelfläche 2. Grades und unserer beschriebenen Regelfläche 24. Grades ist offenbar eine Raumkurve 48. Ordnung. Da die 12-fache Raumkurve 3. Ordnung schon ein Teil 36. Ordnung dieser Durchdringungskurve 48. Ordnung ist, muss also noch ein Teil von 12. Ordnung dieser Durchdringungskurve bestehen und gefunden werden.

Auf Grund unserer Betrachtungen sahen wir, dass die Erzeugenden der erwähnten Regelfläche 2. Grades und unserer Regelfläche 24. Grades Bisekanten der beschriebenen Polraumkurve 3. Ordnung der Ebene τ sind. Es kann also keine Erzeugende der Regelfläche 2. Grades, ausser in den Punkten der 12-fachen Raumkurve 3. Ordnung, die Regelfläche 24. Grades schneiden. Der gesuchte Durchdringungsteil 12. Ordnung muss also als zerfallene Raumkurve aus 12 Geraden bestehen, die offenbar die erwähnten Bisekanten sind. Es folgt also, dass es auf der Geraden p in der Ebene τ 12 Punkte gibt, deren zugeordnete 12 Strahlen im (TK) Komplex auch Erzeugende der Regelfläche 24. Grades sind, also auch als Strahlen zu der (TN) Kongruenz unseres Polarraumbüschels (Π_n) gehören. Die den Erzeugenden der Regelfläche 24. Grades durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte bilden also in der Ebene τ eine Kurve, die mit der beliebig angenommenen Geraden p zwölf Punkte gemeinsam hat, also von 12. Ordnung ist. Da im allgemeinen Fall die drei sich mit den ihnen zugeordneten Punkten in der Ebene befindenden Strahlen des (TK) Komplexes nicht auch Strahlen des (NK) Komplexes sein können, gilt folgender Satz:

Die den Strahlen der (TN) Kongruenz eines Polarraumbüschels durch den (TK) Komplex dieses Büschels zugeordneten Punkte bilden eine Fläche 12. Ordnung.

Es sei diese Fläche mit F^T_{TN} bezeichnet. Die den Geraden der Hauptpunkte des Polarraumbüschels (Π_n), als den gemeinsamen Strahlen des (TK) und des (NK) Komplexes, durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte liegen in den Seitenebenen des Haupttetraeders.

Die Fläche F^N_{TN} der Punkte die den Strahlen der (TN) Kongruenz durch den (HK) Komplex zugeordnet sind, ist 8. Ordnung, während die Fläche F^T_{TN} der durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte, wie wir eben sahen, von 12. Ordnung ist. Diese zwei Flächen durchdringen sich also in einer Raumkurve 96. Ordnung, die mit 1^{96} bezeichnet sei. Die je einem Punkt dieser Raumkurve in den (TK) und (NK) Komplexen zugeordnete Strahlen sind offenbar Strahlen der (TN) Kongruenz, also beide Strahlen gleichzeitig Strahlen dieser beiden Komplexe. Man nehme auf der Kurve 1^{96} einen Punkt, der auf der Fläche F^T_{TN} mit T, und auf der Fläche F^N_{TN} mit N bezeichnet sei. Die in der Kongruenz (TN) durch die Komplexe (TK) und (NK) dem Punkt $T \equiv N$ zugeordneten Strahlen seien mit t und n bezeichnet. (Die Gerade n enthält den Punkt $T \equiv N$, und die Gerade t nicht.) In jeder dieser Geraden befindet sich noch eine dem anderen Komplex zugeordnete Gerade n_1 und t_1. Also ist $n \equiv t_1$ und $t \equiv n_1$. Die den Punkt $T \equiv N$ enthaltende und auf der Geraden $n \equiv t_1$ senkrecht stehende Ebene bezeichne man mit α. Das ist die Berührungsebene in diesem Punkt der diesen Punkt enthaltenden Inzidenzfläche φ des Büschels Π_n. Die dem Punkt T im (TK) Komplex zugeordnete Gerade t liegt, wie bekannt, in der Ebene α, und auf dieser Geraden liegt offenbar auch der dem Strahl t_1 durch den (TK) Komplex zugeordnete Punkt T_1. Da aber der Strahl t auch Strahl n_1 des (NK) Komplexes ist, muss der Fusspunkt N_1 dieses Strahles sein Schnittpunkt mit der Ebene $(t_1 T_1)$ sein, da diese Ebene die Berührungsebene einer neuen Inzidenzfläche φ des Büschels im Punkt T_1 ist. Da ferner diese Ebene normal auf dem Strahl n_1 steht, muss $T_1 \equiv N_1$ und $t = n_1 \perp T_1 N \equiv TN_1 \perp t_1 \equiv n$ sein. Es folgt also, dass sich der Punkt $T_1 \equiv N_1$ auch auf der Raumkurve 1^{96} befinden muss, und dass die Punkte $T_1 \equiv N_1$ und $T \equiv N$ eineindeutig involutorisch zugeordnet sind. Jedem Polarraumbüschel ist eine derartige Raumkurve 96. Ordnung zugeordnet, die durch dasselbe auch bestimmt ist.

II. Die gemeinsame (TR) Kongruenz des einem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Basiskomplexes und des Komplexes der kürzesten Tangentialwege seiner Inzidenzflächen.

Wie vorher erwähnt werden wir diese Strahlkongruenz mit (TR) bezeichnen. Da der tetraedrale Basiskomplex quadratisch, und der Tangentialkurzwegekomplex kubisch ist, müsste die (TR) Kongruenz 6. Grades sein, wenn sie keine zerfallenen Teile enthielte, die man ausser Betracht lassen wollte. Der einem Raumpunkt zugeordnete Strahl in dem (RK) Tangentialkurzwegekomplex ist, wie bekannt, die kürzeste Transversale der diesem Punkt zugeordneten Strahlen im tetraedralen Basiskomplex und im Normalenkomplex desselben Polarraumbüschels. Da die Geraden der Hauptpunkte des Polarraumbüschels Strahlen des tetraedralen Basiskomplexes und des Normalenkomplexes sind, folgt auf Grund der eben erwähnten Eigenschaft eines Polarraumbüschels, dass die Geraden der Hauptpunkte auch Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Tangentialkurzwegekomplexes sind. Die (TR) Kongruenz zerfällt also in die vier Strahlenbündel der Hauptpunkte und in eine Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse.

Die Bisekanten der Grundkurve c^4 des Inzidenzflächenbüschels Π_n bilden eine Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse. Da aber diese Bisekanten keine Strahlen des (TK) Komplexes sein können, handelt es sich offenbar hier nicht um dieselbe Kongruenz. Die den Strahlen dieser Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte bilden eine Fläche, und die ihnen durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte bilden eine andere Fläche. Auf Grund der bekannten Eigenschaften des (TK) und des (RK) Komplexes ist leicht zu beweisen, dass diese zwei Flächen zwei verschiedene Flächen sind, die nicht zusammenfallen können. In unseren weiteren Betrachtungen werden nur die Strahlen des nicht zerfallenen Teiles der Kongruenz (TR) 2. Ordnung 6. Klasse umfasst.

Einem Raumpunkt P sei im (TK) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) der Strahl p zugeordnet. Die Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n schneidet, wie bekannt, der Strahl p in Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe, und auf Grund einer weiteren Eigenschaft folgt, dass die zwei Verbindungsgeraden des Punktes P mit je einem Punktepaar dieser involutorischen Punktreihe in Punkten dieses Paares eine Inzidenzfläche φ_n des Büschels Π_n berühren. In den Doppelpunkten P_1, P_2 dieser involutorischen Punktreihe auf der Geraden p, also in ihren zwei Berührungspunkten mit je einer Inzidenzfläche φ_n des Büschels Π_n, fallen diese zwei Verbindungsgeraden in der Ebene (Pp) zusammen. Diese Ebene (Pp), die wie bekannt im Punkt P eine Fläche φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n berührt, berührt also in den Punkten P_1, P_2 noch zwei weitere Inzidenzflächen des Büschels Π_n. Auf Grund dieser Betrachtungen folgt offensichtlich, dass dem Punkt P_1 die Verbindungsgerade PP_2, und dem Punkt P_2 die Verbindungsgerade PP_1 im (TK) Komplex zugeordnet sind. Die in der Ebene (Pp) aus dem Punkt P auf die Gerade p senkrecht gelegte Gerade r ist, wie bekannt, ein Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Tangentialkurzwegekomplexes (RK)[3]. Die Gerade r berührt offenbar die Inzidenzfläche φ_n im Punkt P, und in ihrem Schnittpunkt P_3 mit der Geraden p noch eine andere. Die zwei diese Gerade $\cancel{p}$ r enthaltenden Berührungsebenen zweier Inzidenzflächen des Büschels Π_n sind offenbar zwei verschiedene Ebenen, die im allgemeinen Fall nicht zusammenfallen können. Ist aber die Gerade p nicht nur ein Strahl des (TK) Komplexes, sondern auch ein Strahl $\bar{r}$ des Tangentialkurzwegekomplexes (RK) desselben Polarraumbüschels (Π_n), also $p \equiv \bar{r}$, müssen die Berührungspunkte $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ des Strahles $\bar{r}$ mit den Berührungspunkten P_1, P_2 des Strahles p zusammenfallen, da eine Gerade, die auf keiner der Flächen φ_n liegt, im Raum nur zwei Flächen des Büschels Π_n berühren kann. Da aber die Gerade $p \equiv \bar{r}$ auch Strahl des (TK) Komplexes bleibt, müssen die zwei die Gerade $\bar{r}$ enthaltenden Berührungsebenen in die gemeinsame Berührungsebene (Pp) der Berührungspunkte P_1, P_2 zusammenfallen. Man sieht also, dass der Ausgangspunkt $\bar{P}$ und der Endpunkt $\bar{P}_3$ dieses kürzesten Tangentialkurzweges $\bar{r}$ zwischen zwei Flächen des Inzidenzflächenbüschels in einer gemeinsamen Berührungsebene dieser zwei Flächen liegen. Es gilt also folgender Satz:

In dem (RK) Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades besteht eine Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse derartiger Tangentialkurzwege, deren beide Endpunkte in derselben gemeinsamen Berührungsebene der zwei betreffenden Flächen liegen.

Der der Geraden $p \equiv \bar{r}$ durch den (TK) Komplex zugeordnete Punkt P bleibt offenbar ausserhalb der Geraden $p \equiv \bar{r}$.

Die den Punkten einer Ebene β in dem (RK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt,[4] eine Kongruenz 7. Ordnung 5. Klasse.

[3] Siehe [2] S. 148.
[4] Siehe [2] S. 159.

Also jeder Punkt des Raumes, ausser den Punkten der Ebene β, enthält 7 Strahlen des (RK) Komplexes, für welche einer der zwei ihnen zugeordneten Punkte in der Ebene β liegt, und in jeder Ebene des Raumes, ausser der Ebene β, liegen 5 Strahlen des (RK) Komplexes, für die einer der zwei diesen Strahlen zugeordneten Punkte in der Ebene β liegt. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des (TK) Komplexes bilden offenbar eine Regelfläche $2\,(7+5) = 24$. Grades, die sich in der (TR) Kongruenz befindet. In der Ebene β befinden sich aber 6 Strahlen der (TR) Kongruenz, deren durch den (RK) Komplex zugeordnete Punkte auch in dieser Ebene liegen, so dass also diese sechs Strahlen auch Erzeugende der erwähnten Regelfläche 24. Grades sind. Die Ebene β schneidet daher diese Regelfläche in einer Kurve 18. Ordnung und in den 6 erwähnten Strahlen der (TR) Kongruenz. Da für jede Ebene des Raumes dasselbe gilt, folgt offenbar, dass jede Ebene des Raumes die durch die den Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte gebildete Fläche in einer Kurve 18. Ordnung schneidet, also diese Fläche 18. Ordnung ist.

Im Zusammenhang mit der vorher ausgesprochenen Definition der (TR) Kongruenz kann auf Grund der letzten Betrachtungen das Ausführte auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Diejenigen kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, die in den beiden Endpunkten dieselbe Tangentialebene der betreffenden zwei Flächen haben, und die wie erwähnt die betrachtete (TR) Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse bilden, haben ihre Endpunkte auf einer Fläche 18. Ordnung.

Man bezeichne diese Fläche mit F^{R}_{TR}. Nimmt man die Ausgangspunkte dieser Strahlen in einer Ebene, die, wie wir sahen, eine Kurve 18. Ordnung bilden, dann liegen die Endpunkte dieser Tangentialwege auf einer Raumkurve 90. Ordnung. Man bekommt diese Zahl 90 auf Grund der Tatsache, dass durch die zugeordneten Punktepaare auf jedem Strahl des (RK) Komplexes eine Raumtransformation 5. Ordnung bestimmt ist.[5]

Diese Raumtransformation ist, wie bekannt, durch die bekannte involutorische eineindeutige Zuordnung der Punktepaare auf jedem Strahl des (RK) Komplexes bestimmt, und eine derartige involutorische Zu-

[5] Siehe [2] S. 161.

ordnung besteht offenbar auch zwischen den Punktepaaren auf der Fläche F^{R}_{TR}, die durch die Strahlen der (TR) Kongruenz verbunden sind. In jeder Ebene des Raumes befinden sich offenbar 6 derartig zugeordnete Punktpaare.

Die Geraden der vier Hauptpunkte des Polarraumbüschels (Π_n) sind Strahlen der diesem Büschel zugeordneten (TK) und (RK) Komplexe. Da aber die durch den (RK) Komplex diesen Strahlen zugeordneten Punkte sich in diesen Hauptpunkten befinden, also nicht in der Ebene β liegen, kann keine Erzeugende der erwähnten Regelfläche 24. Grades einen dieser vier Hauptpunkte enthalten.

Die den Punkten einer Ebene β zugeordneten Strahlen in dem (TK) Komplex unseres Polarraumbüschels (Π_n) bilden, wie schon erwähnt, die bekannte Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse, die durch die Bisekanten der kubischen Polraumkurve dieser Ebene gebildet ist. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des Tangentialkurzwegekomplexes (RK) dieses Polarraumbüschels (Π_n), der kubisch ist, bilden eine Regelfläche vom $3(3+1) = 12$. Grade. Alle Erzeugenden dieser Regelfläche sind, offenbar, Strahlen der betrachteten (TR) Kongruenz. Es ist aber hier notwendig hervorzuheben, dass die sechs in der Ebene β liegenden Strahlen der (TR) Kongruenz nicht Erzeugende dieser Regelfläche sind, weil die ihnen durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte nicht in der Ebene β liegen.

Die den Punkten einer Seitenebene des Haupttetraeders zugeordneten Strahlen im (TK) Basiskomplex enthalten den dieser Seitenebene gegenüber liegenden Eckpunkt dieses Haupttetraeders. Die den Punkten der Schnittgeraden der Ebene β mit einer der Seitenebenen des Haupttetraeders zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex bilden, wie schon erwähnt, einen Kegel 2. Grades, mit dem Scheitel in dem dieser Seitenebene gegenüber liegenden Eckpunkt dieses Haupttetraeders. Also, die Erzeugenden derartiger vier Kegel sind Strahlen auch des dem Büschel (Π_n) zugeordneten (TK) Komplexes, da die Ebene β die vier Seitenebenen in je einer Geraden schneidet. Innerhalb der erwähnten Regelfläche 12. Grades befinden sich also auch derartige vier Kegel 2. Grades. Da wir die die Hauptpunkte enthaltenden Strahlen der (TR) Kongruenz ausserhalb unserer Betrachtungen lassen wollen, bleibt im Rahmen unserer Betrachtungen nur eine auf die beschriebene Weise der Ebene β zugeordnete Regelfläche 4. Grades. Die den Erzeugenden dieser Regelfläche, als Strahlen der (TR) Kongruenz, durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte, bilden in der Ebene β die Schnittkurve dieser

Ebene mit derjenigen Fläche, die durch die den Strahlen der (TR) Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte gebildet ist.

Man nehme in der Ebene β eine beliebige Gerade p. Die den Punkten dieser Geraden im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades. Die vorher erwähnte Regelfläche 4. Grades enthält die Polraumkurve der Ebene β als zweifache Kurve, da sich die Komplexstrahlkegel des (TK) und des (RK) Komplexes in jedem Punkt dieser Raumkurve in sechs Erzeugenden durchdringen, von welchen vier je einen Hauptpunkt des Polarraumbüschels (Π_n) enthalten, also nur die letzten zwei die Erzeugenden dieser Regelfläche 4. Grades sein können. Die eben erwähnte der Geraden p zugeordnete Regelfläche 2. Grades enthält, offenbar, auch die kubische Polraumkurve, da die Erzeugenden eines ihrer Erzeugendensystems Bisekanten dieser Raumkurve sind. Diese zwei Regelflächen der kubischen Polraumkurve durchdringen sich in einer Raumkurve 8. Ordnung. Da ein Teil dieser Durchdringungskurve die kubische Doppelpolraumkurve ist, besteht irgendwo noch ein quadratischer Teil. Da aber die Erzeugenden der beiden dieser Regelflächen Bisekanten der kubischen Polraumkurve sind, also keine der Erzeugenden einer dieser Flächen keine der Erzeugenden der anderen Fläche, ausser in der kubischen Polraumkurve, schneiden kann, folgt, dass der erwähnte quadratische Restteil der Durchdringungskurve 8. Ordnung in zwei Bisekanten dieser kubischen Polraumkurve, also in zwei Geraden, zerfallen muss. Die diesen zwei Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte liegen auf der Geraden p, also schneidet die Gerade p die Schnittkurve der Ebene β mit der gesuchten Fläche in zwei Punkten. Also, jede Gerade des Raumes schneidet die gesuchte Fläche in zwei Punkten, und deswegen gilt auch folgender Satz:

Die den Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte bilden eine Fläche 2. Ordnung.

Es sei diese Fläche mit F^{T}_{TR} bezeichnet. Die unendlich fernen Strahlen des (TK) Basiskomplexes hüllen, wie bekannt, eine Kurve 2. Klasse ein, sind aber auch Strahlen des (RK) Komplexes, da alle Geraden der unendlich fernen Ebene als zweideutige Strahlen jedes (RK) Komplexes betrachtet werden können. Da die diesen unendlich fernen Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte die Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n sind, folgt weiterhin, dass die eben erwähnte Fläche 2. Grades die kubische Raumkurve t^3 der Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n enthalten muss, also eine Regelfläche 2. Grades sein muss.

Die den Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte bilden, wie wir sahen, eine Fläche 18. Ordnung. Diese und die eben erwähnte Fläche 2. Grades haben also eine Raumkurve 36. Ordnung gemeinsam, deren Punkten je ein Strahl der (TR) Kongruenz durch den (TK) Komplex, und ein anderer durch den (RK) Komplex zugeordnet sind. Diese beiden Strahlen gehören aber dem einen und dem anderen dieser Komplexe als Strahlen an.

III. Die gemeinsame Kongruenz (MN) des einem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen Komplexes und des Normalenkomplexes der Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels. Da der Majcensche Komplex den Grad drei hat, und der Normalenkomplex vom Grad acht ist, hat die gemeinsame Kongruenz dieser Komplexe, offenbar, den Grad 24.

Wie wir in der Einführung dieser Arbeit gesehen haben, ist jede unendlich ferne Gerade ein zweideutiger Strahl des kubischen Majcenschen (MK) Komplexes, und ein dreideutiger Strahl des Normalenkomplexes (NK) in jedem Polarraumbüschel unseres Raumes. Jede unendlich ferne Gerade des Raumes ist also ein sechsdeutiger Strahl der betrachteten (MN) Kongruenz. Lässt man diese unendlich fernen Strahlen der (MN) Kongruenz ausserhalb unserer Betrachtungen, so befinden sich in jeder Ebene des Raumes nur 18 Strahlen dieser Kongruenz, die also die Ordnung 24 und die Klasse 18 haben muss.

Wie bekannt, berühren die Strahlen des Majcenschen Komplexes je eine Inzidenzfläche des Polarraumbüschels unendlich fern. Es gilt also das Folgende:

Diejenigen eigentlichen Normalen der Inzidenzflächen eines Polarraumbüschels, die je eine dieser Inzidenzflächen unendlich fern berührt, bilden eine Strahlkongruenz 24. Ordnung und 18. Klasse.

Es ist bekannt, dass diejenigen Normalen der Inzidenzflächen eines Polarraumbüschels, deren Fusspunkte in einer Ebene γ liegen, eine Strahlkongruenz 9. Ordnung 3. Klasse bilden. Diejenigen Strahlen dieser Kongruenz, die je eine der erwähnten Inzidenzflächen φ_n unendlich fern berühren, also Strahlen des (MK) Komplexes sind, bilden eine Regelfläche $3\,(9 + 3) = 36$. Grades. Die Erzeugenden dieser Regelfläche sind also auch Strahlen der (MN) Kongruenz, deren durch den (NK) Komplex zugeordnete Punkte in der Ebene γ liegen. Da die (MN) Kongruenz 18. Klasse ist, befinden sich in der Ebene γ 18 ihrer

Strahlen, die auch Erzeugende der erwähnten Regelfläche 36. Grades sind, da die ihnen durch den (NK) Komplex zugeordneten Punkte auf diesen Strahlen, also in der Ebene γ liegen. Die Ebene γ schneidet also diese Regelfläche in 18 Erzeugenden und in einer Kurve 18. Ordnung. Da für jede Ebene des Raumes offenbar dasselbe gilt, hat jedes Polarraumbüschel auch folgende Eigenschaft:

Die den Strahlen der (MN) Kongruenz durch den (NK) Komplex zugeordneten Fusspunkte bilden eine Fläche 18. Ordnung.

Wie bekannt, bilden die den Punkten einer Ebene als Mittelpunkten zugeordneten Strahlen des (MK) Komplexes eine Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse. Es sei durch die Punkte der Ebene eine derartige dieser Ebene zugeordnete Kongruenz gegeben. Diejenigen Strahlen dieser Kongruenz, die auch Strahlen des (NK) Komplexes desselben Polarraumbüschels sind, bilden eine Regelfläche $8\,(4+2)=48$. Grades, da der (NK) Komplex 8. Grades ist. Auch die Erzeugenden dieser Regelfläche sind, offenbar, Strahlen der diesem Polarraumbüschel zugeordneten (MN) Kongruenz. Aber auch diese Regelfläche 48. Grades hat in der Ebene γ 18 Erzeugende, da die Kongruenz (MN) 18. Klasse ist, und die ihren Strahlen durch den (MK) und durch den (NK) Komplex zugeordneten Punkte sich auf diesen Strahlen befinden. Die Ebene γ schneidet also diese Regelfläche in diesen Erzeugenden und in einer Kurve 30. Ordnung. Da dies für jede Ebene des Raumes gilt, gilt offenbar auch folgender Satz:

Die den Strahlen der (MN) Kongruenz durch den (MK) Komplex zugeordneten Mittelpunkte bilden eine Fläche 30. Ordnung.

Dieser Satz kann auch auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Diejenigen Geraden des Raumes, die Strahlen des Majcenschen Komplexes und des Normalenkomplexes eines Polarraumbüschels sind, berühren die Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels in einer stetigen quadratischen Raumpunktmenge, die eine Fläche 30. Ordnung bildet.

Man bezeichne diese Fläche mit F^{M}_{NM}. Auf Grund der Tatsache, dass jede Gerade des Raumes zwei Inzidenzflächen φ_n berührt (ausser den Tangenten der Grundraumkurve c^4), und dass jeder Punkt des Raumes nur eine Fläche φ_n enthält, folgt, dass die Flächen F^{M}_{NM} und F^{N}_{NM} keine reelle Durchdringungskurve haben können.

IV. Die Kongruenz (MR) der gemeinsamen Strahlen des Majcenschen (MK) Komplexes und des (RK) Tangentialkurzwegekomplexes eines Polarraumbüschels. Da der (RK) Komplex den Grad drei hat, und desgleichen auch der Majcensche (MK) Komplex, müsste offenbar die Kongruenz (MR) den Grad 9 haben. Am Anfang dieser Arbeit sahen wir aber, dass jede unendlich ferne Gerade ein zweideutiger Strahl des einem Polarraumbüschel zugeordneten (MK) Komplexes und des diesem Büschel zugeordneten (RK) Komplexes ist. Die (MR) Kongruenz 9. Grades zerfällt also in dieses vierdeutige unendlich ferne Strahlfeld und in eine Strahlkongruenz 5. Klasse und 9. Ordnung.

Es muss aber bei diesen Betrachtungen auch das Folgende berücksichtigt werden: Jede Gerade des Raumes berührt nur zwei Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Auf den Strahlen des Majcenschen Komplexes befindet sich einer dieser zwei Berührungspunkte immer unendlich fern, während auf einem gewöhnlichen Strahl des (RK) Komplexes diese zwei Berührungspunkte sich im Endlichen befinden. Fällt also ein Strahl des dem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (MK) Komplexes mit einem Strahl des diesem Büschel (Π_n) zugeordneten (RK) Komplexes zusammen, muss auch der kürzeste Tangentialweg auf einem derartigen Strahle unendlich lang sein, resp. der diesem Weg zugeordnete Endpunkt befindet sich unendlich fern. Hieraus folgt offenbar, dass alle Tangentialwege eines derartigen endlichen Raumpunktes unendlich lang, und dadurch gleich lang sind. Ein derartiger Strahl der (MR) Kongruenz kann also nur in demjenigen Fall bestehen, wenn der einem endlichen Punkt P der im (TK) Komplex zugeordnete Strahl unendlich fern liegt, oder wenn der einem Strahl des (TK) Komplexes zugeordnete Punkt sich unendlich fern befindet. In der (MR) Kongruenz kommen also nur derartige Strahlen in Betracht. Man sieht weiterhin auch, dass sich in der (MR) Kongruenz kein »richtiger« Strahl des (RK) Komplexes befindet, aber alle ihre Strahlen als »richtige« Strahlen des (MK) Komplexes betrachtet werden können. Der erste der erwähnten Fälle tritt dann auf, wen sich der Raumpunkt P im Mittelpunkt einer Inzidenzfläche φ_n des Büschels Π_n befindet, da dann die Polarebene dieses Pols P bezüglich dieser Inzidenzfläche φ_n die unendlich ferne Ebene ist, also auch der dem Punkt P im (TK) Komplex zugeordnete Strahl unendlich fern liegt. Die dem Pol P in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) zugeordneten Polarebenen sind also parallel. In diesem Parallelebenenbüschel enthält eine dieser Ebenen, etwa ε, den Punkt P, in dem sie die diesen Punkt P enthaltende Inzidenzfläche des Büschels Π_n berührt. Die diesen Punkt P in dieser Ebene ε enthaltenden Geraden können also als »unrichtige« Strahlen des dem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (RK) Komplexes betrachtet werden, da alle Tangentialwege des Punktes P »gleich lang« sind, also auch den kürzesten enthalten. Ausserdem »schneiden« alle diese Tangentialwege des Punktes P die unendlich ferne Gerade der Ebene ε »senkrecht«, als den dem Punkt P im (TK) Komplex zugeordneten Strahl. Da aber alle diese Geraden des Punktes P als »parallel« mit dem diesem Punkt im (TK) Komplex zugeordneten unendlich fernen Strahl genommen werden können, und dabei unendlich fern je eine Fläche φ_n berühren, sind sie, auf Grund der bekannten Definition des Majcenschen Komplexes, richtige Strahlen des dem Büschel (Π_n) zugeordneten kubischen Majcenschen Komplexes. Es können also alle derartige Geraden der Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n als Strahlen der gemeinsamen Kongruenz (MR) angenommen werden. Offenbar sind die Mittelpunkte der Inzidenzflächen (die bekannte kubische Raumkurve) singuläre Punkte des Majcenschen Komplexes, da die diese Mittelpunkte enthaltenden Strahlen nicht die bekannte Eigenschaft dieses Komplexes haben, nach welcher jedem Raumpunkt nur ein Strahl dieses Komplexes zugeordnet ist.

Die allen Mittelpunkten P_n der Inzidenzflächen φ_n auf die eben beschriebene Weise zugeordneten Ebenen ε_n bilden ein Ebenengewinde 5. Ordnung, da dieses als Erzeugnis einer eineindeutig zugeordneten Punktreihe 3. Ordnung und eines unendlich fernen Strahlenbüschels 2. Klasse betrachtet werden kann. Jede Ebene β des Raumes schneidet die kubische Mittelpunktskurve der Inzidenzflächen φ_n in drei Punkten. Jeder dieser drei Schnittpunkte enthält einen in dieser Ebene ihm zugeordneten Strahl der (MR) Kongruenz. Da jeder Raumpunkt fünf Ebenen ε_n des erwähnten Ebenengewindes enthält, enthält diesen Punkt auch je ein Strahl der (MR) Kongruenz in jeder dieser fünf Ebenen. Alle derartigen in den Ebenen ε_n des erwähnten Ebenengewindes liegenden Strahlen der (MR) Kongruenz, abgesehen von den vierdeutigen unendlich fernen Strahlen, bilden also eine Kongruenz 5. Ordnung und 3. Klasse. Es ist ersichtlich dass diese Kongruenz eine singuläre Kongruenz des (MK) Komplexes ist, die durch die »unrichtigen« Strahlen des (RK) Komplexes gebildet wird.

Der Rest der gesamten (MR) Kongruenz, die 9. Ordnung und 5. Klasse ist, kann also höchstens nur noch eine Kongruenz 4. Ordnung und 2. Klasse sein.

Der jedem unendlich fernen Punkt P zugeordnete Strahl t im (TK) Komplex ist, wie bekannt, eine Bisekante der kubischen Mittelpunktkurve k^3 des Inzidenzflächenbüschels Π_n. Alle diesen unendlich fernen Punkt P enthaltenden und den endlichen ihm zugeordneten Strahl t im (TK) Komplex schneidenden Geraden sind, wie bekannt, Strahlen des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Majcenschen (MK) Komplexes. Alle diese Strahlen des (MK) Komplexes sind parallel, bilden also mit dem Strahl t denselben Winkel, der mit γ bezeichnet sei. Diejenigen derartigen, einem unendlich fernen Raumpunkt zugeordneten Strahlen des (MK) Komplexes, die auf diese Weise den ihnen zugeordneten Strahl t des (TK) Komplexes rechtwinklig schneiden, können als »unrichtige« Strahlen des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (RK) Komplexes betrachtet werden, weil sie der bekannten Definition des (RK) Komplexes entsprechen, in der die einem Raumpunkt zugeordneten Strahlen des (TK) Komplexes und des (RK) Komplexes sich rechtwinklig schneiden.

Die den unendlich fernen Punkten P_n zugeordneten Strahlen t^n in der Bisekantenkongruenz der kubischen Raummittelpunktkurve k^3 schneiden die unendlich ferne Ebene in einer quadratischen Punktmenge P^n, die mit der ersten Punktmenge (P_n) in dieser unendlich fernen Ebene eine quadratische Transformation bilden.[6] Diejenigen zugeordneten Punktpaare in diesen zwei kollokalen Punktfeldern, die auch bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugiert zugeordnet sind, sind solche zugeordnete Punktpaare, bei denen die ihnen zugeordneten beschriebenen Strahlen des (MK) Komplexes den ihnen zugeordneten Strahl t im (TK) Komplex senkrecht schneiden. Diese Strahlen können also als »richtige« Strahlen des (MK) Komplexes und als »unrichtige« Strahlen des (RK) Komplexes, resp. als Strahlen der (MR) Kongruenz, betrachtet werden.

Wie bekannt, liegen alle Strahlen des (MK) Komplexes in ∞^2 singulären β Ebenen, und bilden in jeder dieser Ebene ein Büschel paralleler Strahlen. Die diesen Strahlen durch den (MK) Komplex zugeordneten Mittelpunkte liegen in jeder dieser Ebene auf einem Strahl des (TK) Komplexes, der eine Bisekante t^n der kubischen Mittelpunktkurve k^3 ist [4]. Diese Bisekante t^n ist als Strahl des (TK) Komplexes dem unendlich fernen Scheitel T^n des erwähnten Büschels paralleler Strahlen des (MK) Komplexes zugeordnet.

Da wir auf diese Weise alle Strahlen der (MR) Kongruenz in unseren Betrachtungen umfasst haben, folgt auf Grund aller dieser Betrachtungen und Schlüsse auch folgender Satz:

[6] Siehe [1] S. 20.

Diejenigen Strahlen des (MK) Komplexes, die in den singulären Ebenen dieses Komplexes so parallel liegen, dass sie die Gerade t der Mittelpunkte dieser Strahlen rechtwinklig schneiden, so dass man sie auch als Strahlen des (RK) Komplexes betrachten darf, können höchstens eine Strahlkongruenz 4. Ordnung 2. Klasse bilden.

Da die Strahlen des (*MK*) Komplexes und des (*RK*) Komplexes die Inzidenzflächen φ_n zweimal berühren, so wie auch alle andere Geraden des Raumes, müssen, wenn zwei derartige Strahlen zusammenfallen, auch die beiden dieser Berührungspunkte auf derartigen zusammenfallenden Strahlen dieselben sein. Oder mit anderen Worten: Die den Strahlen der (*MR*) Kongruenz durch den (*MK*) und durch den (*RK*) Komplex zugeordneten Punkte sind dieselben zwei Punkte. Die zwei durch derartige Punkte auf den Strahlen der (*MR*) Kongruenz gebildete Flächen sind identisch. Also, die Fläche F^{M}_{MR} und die Fläche F^{R}_{MR} sind eine und dieselbe Fläche.

In unseren Ausführungen sahen wir, dass die Kongruenz (*MR*) 9. Ordnung und 5. Klasse ist, und dass sie in eine Kongruenz $(MR)^1$ 5. Ordnung 3. Klasse und in eine Kongruenz $(MR)^2$ 4. Ordnung 2. Klasse zerfällt. Die den Strahlen des $(MR)^1$ Kongruenzteiles durch den (*MK*) Komplex zugeordneten Mittelpunkte, bilden, wie wir sahen, die kubische Mittelpunktkurve k^3.

Man nehme auch hier beliebig im Raum eine Ebene τ an. Die den Punkten dieser Ebene im (*MK*) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, höchstens eine Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des kubischen (*RK*) Komplexes bilden also eine Regelfläche $3\,(4 + 2) = 18$. Grades, deren Erzeugende die Strahlen der (*MR*) Kongruenz sind. Einige Erzeugende dieser Regelfläche gehören als Strahlen zum Kongruenzteil $(MR)^1$ und die anderen dem Kongruenzteil $(MR)^2$. Die allen Strahlen des $(MR)^1$ Teiles durch den (*MK*) Komplex zugeordneten Punkte sind nur die Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n, also, wie schon erwähnt, die Punkte der bekannten kubischen Mittelpunktkurve k^3. Die jedem Punkt dieser kubischen Raumkurve zugeordnete Strahlen des (*MK*) Komplexes bilden, wie gezeigt, ein ebenes Strahlbüschel.

Die Ebene τ schneide die kubische Raumkurve k^3 in den Punkten P^1, P^2, P^3. Das Strahlenbüschel der (*MK*) Komplexstrahlen, in jedem dieser Punkte schneidet die Ebene τ in einem Strahl, der ein Strahl des $(MR)^1$ Kongruenzteiles ist. Da die Ebene τ nur drei Punkte der Raumkurve k^3 enthält, befinden sich also in dieser Ebene nur drei Strahlen des $(MR)^1$ Kongruenzteiles, die Erzeugende der erwähnten Regelfläche 18. Grades sind. Die jedem der drei Schnittpunkte P^1, P^2, P^3 zugeordneten Strahlen der (MR) Kongruenz bilden, wie gezeigt, ein Strahlenbüschel 1. Ordnung, also die Strahlen dieser drei Büschel sind auch Erzeugenden der Regelfläche 18. Grades. Diese Regelfläche zerfällt also in diese drei Strahlbüschel und in eine Regelfläche 15. Grades. Innerhalb des $(MR)^2$ Kongruenzteiles befinden sich also in der Ebene τ noch zwei seiner Strahlen, die den ihnen durch den (MK) Komplex zugeordneten Punkt in dieser Ebene haben, also auch Erzeugende dieser Regelfläche 15. Grades sind. Alle Erzeugenden dieser Regelfläche, die nicht in der Ebene τ liegen, gehören also als Strahlen dem $(MR)^2$ Kongruenzteil an. Da diese Regelfläche 15. Grades in der Ebene τ fünf ihrer Erzeugenden hat, schneidet sie diese Ebene in diesen Erzeugenden und in einer Kurve 10. Ordnung. Die den Punkten dieser Kurve zugeordneten Strahlen (die »richtigen« im (MK) und die »unrichtigen« im (RK) Komplex), sind diejenigen Strahlen des $(MR)^2$ Kongruenzteiles, die die erwähnte Regelfläche bilden. Da dies für jede Ebene τ des Raumes gilt, sehen wir, dass die den Strahlen der (MR) Kongruenz durch den (MK) Komplex zugeordneten Punkte eine Fläche $F^M_{MR} = F^R_{MR}$ 10. Ordnung bilden.

Wir sahen vorhin, dass die einen unendlich fernen Punkt enthaltenden Strahlen der $(MR)^1$, resp. der $(MR)^2$ Kongruenz, als parallele Strahlenbüschel in ∞^1 Ebenen liegen, deren durch den (MK) Komplex zugeordnete Punkte auf den Bisekanten t_n der kubischen Mittelpunktkurve k^3 liegen, und dass die parallelen Strahlen jedes dieser Büschel seine Bisekante rechtwinklig schneiden. Es folgt also, dass die Fläche $F^M_{MR} \equiv F^R_{MR}$ eine Regelfläche ist, die auch die kubische Mittelpunktraumkurve k^3 enthält.

Alle diese die Erzeugenden t^n dieser Regelfläche 10. Grades enthaltenden β Singulärebenen des (MK) Komplexes bilden ein Ebenengewinde höherer Ordnung, mit der wir uns aber hier nicht befassen wollen, da sonst der Umfang dieser Arbeit zu sehr anwachsen würde.

V. Die gemeinsame Kongruenz (NR) des (NK) Komplexes und des (RK) Komplexes eines Polarraumbüschels. Da der (NK) Komplex vom 8. Grade ist, und der (RK) Komplex den Grad 3 hat, müsste offenbar die gemeinsame Kongruenz (NR) dieser zwei Komplexe im allgemeinen den Grad 24 haben. Innerhalb dieser Kongruenz befinden sich aber einige schon erwähnte Teile, in die diese Kongruenz zerfällt, und die ausser Betracht gelassen werden können. Z. B. alle Strahlen der Hauptpunkte eines Polarraumbüschels, resp. seines tetraedralen Basiskomplexes, sind Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Normalenkomplexes (*NK*), und des ihm zugeordneten (*RK*) Komplexes, gehören also als Strahlen auch zur gemeinsamen (*NR*) Kongruenz. Die Ordnung der (*NR*) Kongruenz muss also auf 20 vermindert werden.

Jede Normale der Grundkurve c^4 des Inzidenzflächenbüschels ist, wie bekannt, eine Normale einer Inzidenzfläche, der ihr Punkt auf dieser Grundkurve als Fusspunkt zugeordnet ist. Der diesem Fusspunkt zugeordnete Strahl im (*TK*) und im (*MK*) Komplex dieses Polarraumbüschels ist die Berührungsgerade der Grundkurve c^4 in diesem Fusspunkt. Da der einem Raumpunkt zugeordnete Strahl des (*RK*) Komplexes den diesem Punkt zugeordneten Strahl im (*MK*) Komplex, und den diesem Punkt zugeordneten Strahl im (*NK*) Komplex rechtwinklig schneidet, ist dieser einem Punkt der Grundkurve c^4 im (*RK*) Komplex zugeordnete Strahl auch eine Normale dieser Grundkurve. Also die Kongruenz der Normalen der Grundkurve c^4 ist auch ein Teil der gemeinsamen Kongruenz (*NR*). Auch diesen Teil der (*NR*) Kongruenz werden wir ausserhalb unserer Betrachtungen lassen. Da die Kongruenz der Normalen einer Raumkurve 4. Ordnung I Art von der Ordnung 12 und von der Klasse 4 ist, vermindert sich weiterhin die Ordnung der (*NR*) Kongruenz auf 8, während die Klasse auf 20 fällt.

In der Einleitung dieser Arbeit sahen wir, das jede unendlich ferne Gerade ein zweideutiger Strahl eines jeden (*RK*) Komplexes, und ein dreideutiger Strahl eines jeden (*NK*) Komplexes ist. Also jede unendlich ferne Gerade gehört der gemeinsamen Kongruenz (*NR*) als sechsdeutiger Strahl an. In jeder Ebene des Raumes befinden sich also ausser diesem sechsdeutigen uneigentlichen Strahl und ausser den vier erwähnten Normalen der Grundkurve c^4, nur noch 14 weitere Strahlen der (*NR*) Kongruenz, die keine Normalen der Raumkurve c^4 sind, oder unendlich fern liegen. Es gilt also auch folgender Satz:

Die gemeinsame Kongruenz (NR) des Komplexes (NK) und des Komplexes (RK) eines Polarraumbüschels ist 8. Ordnung und 14. Klasse.

Es kann dieser Satz auch folgenderweise ausgedrückt werden:

Alle kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, die eine Fläche dieses Büschels senkrecht durchsetzen, bilden eine Kongruenz 8. Ordnung 14. Klasse.

Man nehme auch hier eine Ebene τ beliebig im Raum an. Die den Punkten dieser Ebene in dem (NK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, eine Kongruenz 9. Ordnung 3. Klasse. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des (RK) Komplexes, der 3. Grades ist, bilden also eine Regelfläche $3(9+3) = 36$. Grades, die die Ebene τ in einer Kurve 36. Ordnung schneidet. Auch hier sind die Erzeugenden dieser Regelfläche, selbstverständlich, Strahlen der (NR) Kongruenz, die 14. Klasse ist. Da die den 14 in der Ebene τ liegenden Strahlen der (NR) Kongruenz durch den (NK) Komplex zugeordneten Punkte in dieser Ebene τ liegen, also auch Erzeugende der erwähnten Regelfläche 36. Grades sind, zerfällt die Schnittkurve der Ebene τ und dieser Regelfläche 36. Ordnung in diese 14 Erzeugenden, und in eine Kurve 22. Ordnung. In allen bisherigen Ausführungen sind die unendlich fernen Punkte der Ebene τ und die diesen Punkten zugeordneten Strahlen im (NK) und im (RK) Komplex weggelassen, und werden deswegen auch hier nicht berücksichtigt. Die den Erzeugenden dieser Regelfläche, als den Strahlen der (NR) Kongruenz durch den (NK) Komplex zugeordneten Punkte, bilden also eine Kurve 22. Ordnung, und daher gilt auch folgender Satz:

Die den Strahlen der (NR) Kongruenz eines Polarraumbüschels durch den (NK) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Punkte (Fusspunkte) bilden eine Fläche 22. Ordnung.

Diese Fläche kann mit F^{N}_{NR} bezeichnet werden. Die den Punkten der Ebene τ im (RK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, eine Kongruenz 7. Ordnung und 5. Klasse. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des (NK) Komplexes bilden eine Regelfläche $8\ (7+5) = 96$. Grades, deren Erzeugende auch Strahlen der (NR) Kongruenz sind. Die 14 Strahlen der (NR) Kongruenz in der Ebene τ sind auch hier Erzeugende dieser Regelfläche, da die diesen Strahlen der (NR) Kongruenz durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte auch in der Ebene τ liegen. Die Schnittkurve der Ebene τ und dieser Regelfläche 96. Grades zerfällt also in 14 Gerade und eine Kurve 82. Ordnung. Jedem Punkt dieser Kurve ist durch den (RK) Komplex ein Strahl der (NR) Kongruenz zugeordnet, und das sind alle Punkte dieser Ebene (im Raum ganz beliebig angenommen), für welche die durch den (RK) Komplex zugeordneten Strahlen, Strahlen der (NR) Kongruenz sind. Es gilt also auch folgender Satz:

Die den Strahlen der (NR) Kongruenz eines Polarraumbüschels durch den (RK) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Punkte bilden eine Fläche 82. Ordnung.

Analog wie die vorher ausgeführten Flächen soll diese mit F^{R}_{NR} bezeichnet werden. Da ein Strahl des (NK) Komplexes in seinem Fusspunkt eine Inzidenzfläche senkrecht schneidet, kann dieser Strahl in diesem Punkt keine andere dieser Inzidenzflächen berühren. Also auch hier können die Flächen F^{N}_{NR}, F^{R}_{NR} keinen gemeinsamen reellen Punkt haben, ausser den Punkten der Grundkurve c^4.

Auf jedem Strahl des (RK) Komplexes befinden sich zwei diesem Strahl zugeordnete Punkte. Das sind die zwei Endpunkte des Tangentialkurzweges auf diesem Strahl, die, wie bekannt, involutorisch zugeordnet sind. Durch diese involutorische Zuordnung ist auch hier die bekannte Raumtransformation 5. Ordnung bestimmt. Es folgt also, dass auch die Punkte der F^{R}_{NR} Fläche in Paaren eineindeutig involutorisch zugeordnet sind, wobei die zugeordneten Punktpaare auf den Strahlen der (NR) Kongruenz liegen. In jeder Ebene des Raumes liegen 14 derartige Strahlen, also auf jeder ebenen Schnittkurve der Fläche F^{R}_{NR} befinden sich in dieser involutorischen Flächenpunktzuordnung der Fläche F^{N}_{RR} 14 zugeordnete Punktpaare.

Die den Punkten eines Ebenenschnittes der Fläche F^{R}_{NR} auf die erwähnte Weise involutorisch zugeordneten Punkte bilden, auf Grund der bekannten Raumtransformation 5. Ordnung, eine Raumkurve 410. Ordnung, die diese ebene Schnittkurve der Fläche F^{R}_{NR} in $2 \cdot 14 = 28$ Punkten schneidet u. s. w.

Alle diese Betrachtungen über die gemeinsamen Kongruenzen der vier betrachteten Komplexe eines Polarraumbüschels, könnten jetzt auch auf diese Komplexe und ihre gemeinsamen Kongruenzen bei speziellen Polarraumbüscheln, z. B. homothetischen, konzentrischen oder koaxialen, übertragen werden. Da aber dadurch der vorgesehene Umfang dieser Arbeit zu sehr vergrössert würde, werden hier die Kongruenzen derartiger Komplexe nicht betrachtet.

LITERATUR

[1] *Th. Reye:* Die Geometrie der Lage, Abt. III, (1910), S. 57.

[2] *V. Niče:* Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Rad Jug. akad., knj. 331 (1965), S. 147.

[3] *V. Niče:* Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Glasnik mat. fiz. i astr. T. 18, (1963), No. 4. S. 262.

[4] *V. Niče:* Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex. Rad Jug. akad., knj. 325 (1962), S. 117–118.

Institut für Mathematik der Universität in Zagreb

Angenommen zur Veröffentlichung am 23. XII. 1966. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

VILIM NIČE

ZAJEDNIČKE KONGRUENCIJE ČETIRIJU KOMPLEKSA PRAMENA POLARNIH PROSTORA

UVOD: Pramenu polarnih prostora pridružena su, kao što je poznato, četiri kompleksa, koji su tim pramenom i određeni. To su: 1. bazični kvadratni tetraedralni kompleks, 2. kubični Majcenov kompleks, 3. kompleks normala incidentnih ploha polarnih prostora u tom pramenu, koji je osmog stupnja i 4. kompleks najkraćih dirnih putova među plohama pramena incidentnih ploha 2. stupnja. Pramen polarnih prostora označimo s (Π_n), a njegove incidentne plohe čine pramen Π_n.

Svakoj tački prostora pridružena je po jedna zraka svakog tog kompleksa i svakoj zraci po jedna tačka osim četvrtog po redu, gdje su svakoj zraci pridružene po dvije tačke. Ove ćemo komplekse označiti s (TK), (MK), (NK) i (RK). U bazičnom tetraedralnom kompleksu tačke pridružene njegovim zrakama nalaze se izvan tih zraka, a u ostala tri kompleksa one leže na sebi pridruženim zrakama.

Po dva od tih četiriju kompleksa imaju zajedničku kongruenciju, dakle takvih šest, koje ćemo označiti s (TM), (TN), (TR), (MN), (MR) i (NR). Neprekinutom kvadratnom skupu zraka svake ove kongruencije pridružen je neprekinuti kvadratni skup tačaka preko svakog kompleksa takve kongruencije, dakle dvije plohe. U radnji »Neke nove osobine pramena i svežnja polarnih prostora« istražene su takve plohe u kongruenciji (TM), tj. u zajedničkoj kongruenciji bazičnog tetraedralnog kompleksa i Majcenova kompleksa, gdje te dvije plohe padaju skupa u jednu plohu 6. reda. Preostalih pet kongruencija i na opisani način njima pridružene plohe bit će istražene u ovoj radnji.

Prije razmatranja o takvim plohama treba razmotriti neizmjerno daleke zrake ovakvih četiriju kompleksa. Tu je konstatirano da neizmjerno daleke zrake (TK) kompleksa omataju krivulju 2. razreda, a njima pridružene tačke u tom kompleksu su središta incidentnih ploha φ_n, dakle leže na poznatoj prostornoj krivulji 3. reda. Također je tu zaključeno da su pravci neizmjerno daleke ravnine dvoznačne singularne zrake (MK) Majcenova kompleksa, troznačne zrake kompleksa (NK) normala incidentnih ploha i obične jednoznačne zrake kompleksa (RK) najkraćih dirnih putova.

I. Zbog stepena dva kompleksa (TK) i stepena osam kompleksa normala (NK), zajednička bi kongruencija (TN) tih dvaju kompleksa morala imati stepen šesnaest. Budući da su, međutim, pravci vrhova zajedničkog autopolarnog tetraedra svih polarnih prostora pramena (Π_n) zrake i bazičnog tetraedralnog kompleksa (TK), kao i kompleksa (NK) normala, to i ova četiri snopa pravaca pripadaju kongruenciji (TN). Ovaj raspadnuti dio mi međutim ne uzimamo u razmatranje, tako da je kongruenciji (TN) ostao red 12 i razred 16.

Zrake (NK) kompleksa pridružene tačkama neke ravnine τ čine kongruenciju 9. reda i 3. razreda. Ova kongruencija i (TK) kompleks, koji je kvadratni, imaju zajedničke zrake, koje čine pravčastu plohu $2(9 + 3) = 24$. stupnja, a kojoj su izvodnice zrake (TN) kongruencije. U ravnini τ nalazi se 16 zraka te kongruencije, kojima preko (NK) kompleksa pridružene tačke leže također u toj ravnini (svaka na svojoj zraci), dakle su i ovih 16 zraka izvodnice spomenute pravčaste plohe 24. stupnja. Ravnina τ siječe prema tome ovu plohu u tih 16 pravaca i jednoj krivulji 8. reda. Ovakve tačke pridružene zrakama (TN) kongruencije, koje smo promatrali u po volji odabranoj ravnini τ, čine prema tome krivulju 8. reda. Odavle dalje izlazi da tačke pridružene zrakama (TN) kongruencije preko (NK) kompleksa čine opću plohu 8. reda.

Uzmemo li sada kongruenciju zraka (TK) kompleksa koje su pridružene tačkama ravnine τ, te na isti način promotrimo zajedničku pravčastu plohu ove kongruencije i (NK) kompleksa, koja se u ovom slučaju raspada u neke plohe nižeg stupnja koje u našim razmatranjima ne dolaze u obzir, dolazimo do zaključka da zrakama kongruencije (TN) pridružene tačke preko (TK) kompleksa čine opću plohu 12. reda.

II. Zajednička kongruencija kompleksa (TK) i (RK), koju smo označili s (TR), morala bi zbog stupnja dva (TK) kompleksa i stupnja tri (RK) kompleksa biti 6. stupnja. Budući da su, međutim, pravci vrhova zajedničkog polarnog tetraedra pramena Π_n incidentnih ploha φ_n zrake ovih dvaju kompleksa, dobiva kongruencija (TR) red dva i razred šest. Analogno kao u tački I, zaključuje se i ovdje da po volji odabrana ravnina τ siječe plohu tačaka pridruženih zrakama (TR) kongruencije preko kompleksa (RK) u krivulji 18. reda, dakle je ta ploha 18. reda.

Istim postupkom zaključeno je da zrakama (TR) kongruencije pridružene tačke preko (TK) kompleksa čine pravčastu plohu 2. stupnja. U vezi s ovakvim razmatranjima dobiven je ovaj stavak:

Unutar kompleksa (RK) najkraćih dirnih putova među plohama jednog pramena ploha 2. stupnja postoji kongruencija 2. reda 6. razreda, na čijim zrakama početna i završna tačka takvog dirnog puta leže u istoj dirnoj ravnini dviju odgovarajućih ploha u tom pramenu. Početne i završne tačke ovakvih najkraćih dirnih putova čine opću plohu 18. reda.

III. Zajednička kongruencija (MN) Majcenova kubičnog kompleksa (MK) i kompleksa (NK) normala, koji je 8. stupnja, morala bi biti 24. stupnja. Budući da su, međutim, ovdje neizmjerno daleki pravci dvoznačne zrake Majcenova (MK) kompleksa i troznačne zrake (NK) kompleksa, dobiva kongruencija (MN) red 24. i razred 18. Zrake ove kongruencije 24. reda i 18. razreda su one normale incidentnih ploha φ_n koje neke od tih ploha diraju neizmjerno daleko.

Na jednak način kao prije dobiva se i ovdje činjenica da zrakama (MN) kongruencije pridružene tačke preko (NK) kompleksa čine opću plohu 18. reda. Tim istim zrakama pridružene tačke preko (MK) kompleksa čine opću plohu 30. reda.

IV. Kongruencija (MR) zajedničkih zraka Majcenova kubičnog kompleksa i kubičnog kompleksa najkraćih dirnih putova među incidentnim plohama φ_n morala bi imati stupanj devet. Ova se kongruencija, međutim, također raspada u neke dijelove koji ne ulaze u naša razmatranja, tako da njen ostatak dobiva red 9. i razred 5. Međutim, i ova se kongruencija 9. reda i 5. razreda, koju čitavu razmatramo, raspada u jednu kongruenciju 5. reda 3. razreda i jednu 4. reda i 2. razreda. Zrakama prvog dijela kongruencije (MR) pridružene tačke preko (MK) kompleksa nalaze se na kubnoj prostornoj krivulji središta incidentnih ploha φ_n, tako da takve zrake jedne tačke te krivulje čine pramen pravaca, a ravnine tih pramenova čine jednu osobitu omotaljku. Tačke pridružene preko istog kompleksa zrakama drugog dijela kongruencije (MR) čine opću plohu 10. reda. Ova je ploha identična s plohom tačaka pridruženih zrakama (MR) kongruencije preko (RK) kompleksa. I ova je ploha pravčasta.

V. Zajednička kongruencija (NR) kompleksa (NK) i kompleksa (RK) morala bi zbog njihovih stupanja 8 i 3, biti 24. stupnja. Međutim, pravci vrhova zajedničkog polarnog tetraedra incidentnih ploha φ_n su zrake i (NK) i (RK) kompleksa, dakle se red kongruencije (NR) već smanjuje za četiri. Međutim, i sve normale temeljne prostorne krivulje 4. reda I vrste pramena Π_n incidentnih ploha φ_n su zrake i (NK) i (RK) kompleksa. Kongruencija normala ovakve prostorne krivulje je 12. reda i 4. razreda, pa se za toliko i dalje smanjuje red i razred kongruencije (NK). Osim toga je u početku spomenuto da su neizmjerno daleki pravci dvoznačni pravci kompleksa (RK) i troznačni pravci kompleksa (NK). Prema tome su ti pravci šesteroznačni pravci naše kongruencije (NR), koje ćemo također ostaviti izvan naših razmatranja. Kongruencija (NR) ima, dakle, red 8 i razred 14. Ova se činjenica može izreći i ovako:

Svi oni najkraći dirni putovi između ploha jednog pramena ploha 2. stupnja, koji jednu plohu tog pramena probadaju okomito, čine kongruenciju 8. reda i 14. razreda.

Analogno kao i dosad mogu se dobiti ove osobine ove kongruencije:

a) Tačke pridružene zrakama kongruencije (NR) preko kompleksa (NK) čine opću plohu 22. reda.

b) Tačke pridružene zrakama kongruencije (NR) preko kompleksa (RK) čine opću plohu 82. reda.

Osim tačaka temeljne prostorne krivulje 4. reda I vrste pramena Π_n incidentnih ploha φ_n ne mogu te dvije plohe imati nijednu drugu realnu zajedničku tačku.

Institut za matematiku Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 23. prosinca 1966. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.