

**KONZENTRISCHE POLARE RÄUME
KONCENTRIČNI POLARNI PROSTORI**

Vilko Niče, Zagreb

Sonderabdruck aus
GLASNIK MATEMATIČKI 2 (22) (1967), 99—117

Štamparski zavod „Ognjen Prica“ Zagreb, Savska Cesta 31, 1967

KONZENTRISCHE POLARE RÄUME

Vilko Niče, Zagreb

Einleitung

Werden zwei konzentrische Flächen 2. Grades, die nicht koaxial sind, als Inzidenzflächen zweier polarer Räume angenommen, dann ist durch diese zwei Flächen ein Flächenbüschel 2. Grades gegeben, durch das weiterhin ein Büschel konzentrischer nichtkoaxialer polarer Räume bestimmt ist. Dem gemeinsamen Mittelpunkt M als Pol ist die unendlich ferne Ebene als Polarebene in allen diesen polaren Räumen zugeordnet. Der gemeinsame Mittelpunkt M und die unendlich ferne Ebene gehören also dem gemeinsamen Polartetraeder dieses konzentrischen Polarraumbüschels, als einer seiner Scheitel und die ihm gegenüber liegende Seitenebene, an. Man bezeichne dieses konzentrische Polarraumbüschel mit (Π_n) , sein Inzidenzflächenbüschel mit Π_n und die Flächen dieses Inzidenzflächenbüschels seien mit \mathfrak{S}_n bezeichnet. Das Flächenbüschel Π_n wird durch die unendlich ferne Ebene in einem Kurvenbüschel 2. Grades geschnitten, das ein gemeinsames Polardreieck hat. Dieses unendlich ferne Dreieck bildet mit dem gemeinsamen Mittelpunkt M das gemeinsame Polartetraeder des konzentrischen Polarraumbüschels (Π_n) , das also aus der unendlich fernen Ebene und den drei endlichen den Mittelpunkt M enthaltenden Ebenen als Seitenebenen zusammengesetzt ist. Man bezeichne diese Ebenen mit α, β, γ . Zwischen den Flächen \mathfrak{S}_n des Flächenbüschels Π_n befinden sich also drei Zylinder und ein Kegel mit dem Scheitel M . Die Grundkurve k^4 des Inzidenzflächenbüschels Π_n ist offenbar schief symmetrisch bezüglich der Ebenen α, β, γ in den Richtungen der Schnittgeraden $m_1 = \beta \times \gamma$, $m_2 = \alpha \times \gamma$ und $m_3 = \alpha \times \beta$.

Innerhalb der Ausführungen in dieser Arbeit werden der quadratische tetraedrale Strahlkomplex des konzentrischen Polarraumbüschels, sein Majcenscher kubischer Komplex, sein Normalenkomplex der Inzidenzflächen, und der Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen den Inzidenzflächen dieses konzentrischen Polarraumbüschels betrachtet. Die Grundkurve k^4 des Inzidenzflächenbüschels Π_n eines derartigen Polarraumbüschels ist offensichtlich auch zentrisch symmetrisch bezüglich des Mittel-

punktes M . In weiterem Fortgang dieser Arbeit werden auch die Achsenkomplexe der polaren Räume eines derartigen konzentrischen Polarraumbüschels betrachtet, und am Ende wird auch ein durch drei konzentrische Inzidenzflächen, die sich nicht in einem Büschel befinden, bestimmtes Polarraumbündel kurz betrachtet.

1. Einige Eigenschaften eines konzentrischen Flächenbüschels 2. Grades

Die Achsen der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades bilden, wie bekannt, eine Regelfläche 9. Grades, zu der die kubische Raumkurve der Mittelpunkte dieser Flächen als dreifache Kurve gehört [7]. Die Schnittkurve dieser Regelfläche mit der unendlich fernen Ebene zerfällt in drei Paare unendlich ferner »Achsen« der drei dem erwähnten Flächenbüschel angehörenden Paraboloiden, und in eine Kurve 3. Ordnung. In unserem Fall eines konzentrischen Flächenbüschels Π_n zerfällt, wie wir sahen, die Raumkurve der Mittelpunkte der Flächen \mathfrak{S}_n , in die drei Geraden m_1, m_2, m_3 , welche die Achsen der drei den Flächenbüschel Π_n enthaltenden Zylinder sind. Da jeden Punkt je einer dieser drei Achsen noch weitere zwei Achsen des betreffenden Zylinders in seinen zwei Symmetrieebenen enthalten, können diese Geraden als dreifache Gerade der zerfallenen Regelfläche 9. Grades betrachtet werden. Also die dreifache Mittelpunktkurve 3. Ordnung der erwähnten Regelfläche 9. Grades zerfiel in unserem konzentrischen Fall in die drei dreifachen Geraden m_1, m_2, m_3 des Mittelpunktes M . Die unendlich ferne Kurve 3. Ordnung der erwähnten Regelfläche 9. Grades bleibt in unserem konzentrischen Fall unverändert. Diese Kurve ist durch die unendlich fernen Punkte der Achsen der Flächen \mathfrak{S}_n des Büschels Π_n gebildet, die die Scheitel der gemeinsamen unendlichfernen Polardreiecke des absoluten Kegelschnittes und der unendlich fernen Kurven der Flächen \mathfrak{S}_n des konzentrischen Inzidenzflächenbüschels Π_n sind. Die Achsen der konzentrischen Inzidenzflächen \mathfrak{S}_n des Büschels Π_n bilden also einen Kegel 3. Grades, der selbstverständlich die Geraden m_1, m_2, m_3 enthält, aber keine Doppelerzeugende haben kann. Wenn in einem derartigen Fall dieser Kegel eine Doppelerzeugende hätte, müssten sich in einer Ebene des Mittelpunktes M vier Erzeugende des erwähnten Kegels 3. Grades befinden, oder es müssten zwei Flächen \mathfrak{S}_n des Büschels Π_n koaxial sein, was aber unmöglich ist. Die Achsenregelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades, die wie bekannt vom 9. Grade ist, zerfällt in unserem Fall in drei Ebenenpaare und in einen Kegel 3. Grades. Die unendlich fernen Punkte des Achsentripels je einer Fläche \mathfrak{S}_n des konzentrischen Büschels Π_n bilden auf der durch diese Punkte gebildeten unendlich fernen Kurve 3. Ordnung Punkttripel, deren Punkte untereinander involutorisch zugeordnet sind.

2. Der dem konzentrischen Polarraumbüschel zugeordnete quadratische tetraedrale Strahlkomplex

Die einem Raumpunkt als Pol in einem Polarraumbüschel zugeordneten Polarebenen bilden, wie bekannt, ein Ebenenbüschel, und die Achsen der derartig allen Raumpunkten zugeordneten Ebenenbüschel bilden den bekannten, diesem Polarraumbüschel zugeordneten und durch ihn bestimmten quadratischen tetraedralen Strahlkomplex. Das Haupttetraeder dieses tetraedralen Strahlkomplexes ist, wie bekannt, das gemeinsame Polartetraeder der polaren Räume des Polarraumbüschels, mit welchem eine ganze Reihe der Eigenschaften dieses tetraedralen Strahlkomplexes verbunden sind.

In unserem Fall des konzentrischen Polarraumbüschels besteht das Haupttetraeder aus den drei endlichen den Mittelpunkt M enthaltenden Ebenen α , β , γ , und aus der unendlich fernen Ebene. Man bezeichne den diesem konzentrischen Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Komplex mit (STK). Die Schnittgeraden $m_1 = (\beta\gamma)$, $m_2 = (\alpha\gamma)$, $m_3 = (\alpha\beta)$ der Ebenen α , β , γ bilden also einen gemeinsamen konjugierten Durchmessertripel aller Flächen \mathfrak{S}_n des Büschels Π_n . Alle den Mittelpunkt M enthaltenden Geraden, und alle mit den Geraden m_1 , m_2 , m_3 im Raum parallelen Geraden sind also Strahlen des diesem konzentrischen Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Komplexes mit (STK) ([10], S. 2—3). Die Schnittgeraden m_1 , m_2 , m_3 sind die Achsen der drei im Inzidenzflächenbüschel Π_n sich befindenden Zylinder 2. Grades, was aus der Symmetrieeigenschaft der Grundkurve k^4 hervorgeht.

Wie bekannt schneiden im Fall eines allgemeinen Polarraumbüschels die Strahlen seines tetraedralen Komplexes die Seitenebenen seines Haupttetraeders in Punktquadrupeln, deren gleichnamige Doppelverhältnisse den gleichen Wert haben. Dieser Wert ist als eine charakteristische Konstante dieses Komplexes bekannt. Da aber in unserem Fall des konzentrischen Polarraumbüschels eine Seitenebene des Haupttetraeders, und dadurch auch ein Punkt des erwähnten Schnittpunktquadrupels, sich immer unendlich fern befindet, wird der Wert der charakteristischen Konstante nicht mehr einem Doppelverhältnis, sondern dem Werte eines Verhältnisses gleich sein, wie es z. B. bei dem Achsenkomplex eines polaren Raumes der Fall ist. In solch einem Fall befinden sich die Ebenen α , β , γ untereinander nicht in senkrechter Lage, wie es der Fall bei einem Achsenkomplex ist, und wie es der Fall bei einem coaxialen Polarraumbüschel war [8]. Auf Grund einer bekannten Eigenschaft des tetraedralen, einem Polarraumbüschel zugeordneten Komplexes folgt, dass der Wert der charakteristischen Konstante dem Werte eines Doppelverhältnisses der vier einen Komplexstrahl enthaltenden Ebenen gleich ist, die die Scheitel des Haupttetraeders dieses tetraedralen Komplexes enthalten. Da die Berührungsgersten der Grundkurve des Inzidenzflächenbüschels auch Strahlen dieses

tetraedralen Komplexes sind, gilt selbstverständlich das Erwähnte auch für diese Strahlen. Eine charakteristische Konstante unseres singulären tetraedralen Komplexes (STK) des konzentrischen Polarraumbüschels (Π_n), also ein Wert des erwähnten Verhältnisses, ist einem Doppelverhältnis derjenigen vier eine Berührungsgerade t der Grundkurve k^4 enthaltenden Ebenen gleich, von denen drei mit den Schnittgeraden m_1, m_2, m_3 parallel liegen und die vierte den Mittelpunkt M enthält. Man bezeichne diese Ebenen mit $(t m_1), (t m_2), (t m_3)$ und $(t M)$. Diese Berührungsgerade t darf keine der drei Geraden m_1, m_2, m_3 schneiden, da in einem derartigen Fall zwei der vier erwähnten Ebenen zusammenfallen müssten. Wenn z. B. die Berührungsgerade t die Gerade m_1 schneiden sollte, dann wäre $(t m_1) \equiv (t M)$ und $(t m_2) \equiv (t m_3)$, weil die Geraden m_1, m_2, m_3 bezüglich aller Inzidenzflächen \mathfrak{S}_n konjugiert zugeordnet sind. Jede der drei Geraden m_1, m_2, m_3 schneidet nämlich die Grundkurve k^4 in zwei Punkten, die Scheitelpunkte dieser Raumkurve sind.

Da alle Flächen \mathfrak{S}_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n den gemeinsamen Mittelpunkt M haben, zerfällt die bekannte kubische Raumkurve der Mittelpunkte, wie schon erwähnt, in unserem Fall in die drei den Punkt M enthaltenden Geraden m_1, m_2, m_3 , da jeder Punkt dieser Geraden als Mittelpunkt desjenigen Zylinders der Grundkurve k^4 betrachtet werden kann, dem diese Gerade die Achse ist. Die Bisekantenkongruenz der erwähnten kubischen Raumkurve zerfällt also in unserem Fall in das Geradenbündel des Mittelpunktes M und in die drei Geradenfelder der Ebenen α, β, γ .

Auf Grund der bekannten Eigenschaften eines tetraedralen quadratischen Strahlkomplexes und eines Flächenbüschels 2. Grades folgen ferner für unseren singulären tetraedralen Komplex des konzentrischen Polarraumbüschels diese Sätze:

a) Die den Punkten jeder unendlich fernen Geraden zugeordneten Strahlen des (STK) Komplexes bilden einen Strahlenkegel 2. Grades mit dem Scheitel M , der die Geraden m_1, m_2, m_3 enthält.

b) Die den Punkten einer in der Ebene $\alpha (= m_2 \times m_3)$ liegenden Geraden zugeordneten Strahlen in dem (STK) Komplex bilden einen die Gerade m_1 enthaltenden hyperbolischen Zylinder, dessen Asymptotenebenen mit den Geraden m_2, m_3 parallel sind.

c) Die jeder endlichen Ebene in unserem speziellen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Pole bilden eine Raumkurve 3. Ordnung, und alle derartigen ∞^3 Raumkurven des Raumes enthalten den Mittelpunkt M .

Auf Grund der Sätze a) und c) folgt auch folgender Satz:

d) Die den ∞^1 Ebenen eines parallelen Ebenenbüschels zugeordneten ∞^1 Raumkurven 3. Ordnung liegen auf einem Kegel 2. Grades mit dem Scheitel M .

e) Die denjenigen Parallelebenenbüscheln auf die beschriebene Weise zugeordneten Kegel 2. Grades mit dem Scheitel M , die mit einer Geraden p im Raum parallel sind, bilden ein Kegelbüschel 2. Grades mit dem gemeinsamen Scheitel M , dem die Geraden m_1, m_2, m_3 , und der dem unendlich fernen Punkt der Geraden p im (STK) Komplex zugeordnete Strahl als Grunderzeugende gehören.

Die Grundkurve k^4 unseres konzentrischen Inzidenzflächenbüschels Π_n ist im allgemeinen zentrisch symmetrisch, aber ohne senkrecht liegenden Symmetrieebenen. Jede derartige Raumkurve 4. Ordnung I Art kann als Grundkurve eines konzentrischen Flächenbüschels 2. Grades betrachtet werden, also gilt für jede derartige Raumkurve folgender Satz:

Für jede zentral symmetrische Raumkurve 4. Ordnung I Art, die keine senkrecht liegenden Symmetrieebenen besitzt, bestehen drei ihren Mittelpunkt enthaltende Ebenen α, β, γ , die bezüglich aller diese Raumkurve enthaltenden Flächen 2. Grades konjugiert sind, und die durch jede Berührungsgerade dieser Raumkurve in derartigen Punkttripeln geschnitten werden bei denen gleichnamige Verhältnisse den gleichen Wert haben.

Diese drei Ebenen bilden mit der unendlich fernen Ebene das Haupttetraeder eines speziellen tetraedralen Komplexes, das auf bekannte Weise dem durch eine derartige zentral symmetrische Grundraumkurve bestimmten Flächenbüschel 2. Grades, resp. seinem Polarraumbüschel, zugeordnet ist.

Es ist offensichtlich, dass dieser spezieller Komplex durch eine affine Raumtransformation in einen Achsenkomplex transformiert werden kann, und dabei das erwähnte Flächenbüschel in ein koaxiales übergeht.

3. Der dem konzentrischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordnete Majcensche kubische Komplex

Es sei ein derartiger Komplex mit (SMK) bezeichnet. Die Strahlen des einem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen kubischen Komplexes berühren, wie bekannt, unendlich fern die Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels, und der zweite endliche Berührungspunkt eines jeden dieser Strahlen mit einer anderen Fläche des Inzidenzflächenbüschels ist der diesem Strahl zugeordnete Zentralpunkt. Jedem Raumpunkt ist auf diese Weise ein Strahl des Majcenschen Komplexes zugeordnet, und jedem Strahl dieses Komplexes ein derartiger Zentralpunkt. Der dem Zentralpunkt eines Strahles des Majcenschen Komplexes zugeordnete Strahl in dem tetraedralen Komplex des erwähnten Polarraumbüschels liegt, wie bekannt, mit diesem Strahl des Majcenschen Komplexes im Raum parallel. Die Ebene dieser zwei Strahlen ist die Berührungsebene einer Inzidenzfläche mit diesem Zentralpunkt als Berührungspunkt.

In unserem konzentrischen Polarraumbüschel (Π_n) sind alle Inzidenzflächen \mathcal{S}_n dieses Büschels konzentrisch bezüglich des gemeinsamen Mittelpunktes M . Die asymptotischen Kegel aller dieser Inzidenzflächen haben also den gemeinsamen Scheitel M , und bilden ein Kegelmüschel 2. Grades, dessen Grunderzeugende die vier unendlich ferne Punkte der zentrisch symmetrischen Grundkurve k^4 des Inzidenzflächenbüschels Π_n enthalten. Diese vier Punkte sind die Grundpunkte des Schnittkegelschnittbüschels der unendlich fernen Ebene und des konzentrischen Inzidenzflächenbüschels Π_n . Jede Gerade der unendlich fernen Ebene berührt also zwei Kegelschnitte dieses unendlich fernen Kegelschnittbüschels, und dadurch berührt also auch jede Ebene des Mittelpunktes M zwei Flächen \mathcal{S}_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n unendlich fern. In jeder Ebene des Mittelpunktes M befinden sich daher zwei Büschel paralleler Strahlen, die zwei Flächen \mathcal{S}_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n unendlich fern berühren, also Strahlen des diesem konzentrischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Majcenschen Komplexes sind.

Jeder Punkt P_n der unendlich fernen Ebene enthält einen Kegelschnitt des vorher erwähnten unendlich fernen Kegelschnittbüschels. Die Berührungsebene dieses Kegelschnittes in diesem Punkt P_n und der Mittelpunkt M bilden die Berührungsebene der diesen unendlich fernen Kegelschnitt enthaltenden Fläche \mathcal{S} des Büschels Π_n in diesem unendlich fernen Berührungspunkt P_n . Die Verbindungsgerade MP_n berührt also im unendlich fernen Punkt P_n die erwähnte Inzidenzfläche \mathcal{S} , ist also ein Strahl des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Majcenschen Komplexes. Da der Punkt P_n jeder Punkt der unendlich fernen Ebene sein kann, folgt, dass jede Gerade des Mittelpunktes M auch ein Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen Komplexes ist. Alle diese Strahlen des Mittelpunktes M haben in diesem Mittelpunkt ihren gemeinsamen Zentralpunkt, da sie den einzigen Kegel 2. Grades innerhalb des Inzidenzflächenbüschels Π_n in zwei unendlich nahen Punkten schneiden, also »berühren«.

In der Abt. 2. haben wir gesehen, dass alle Geraden des Mittelpunktes M auch Strahlen des dem konzentrischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (STK) Komplexes sind, und jeder dieser Strahlen als Strahl des (STK) Komplexes ist einem Punkt der unendlich fernen Ebene zugeordnet. Da jede Gerade der unendlich fernen Ebene zwei Flächen des Inzidenzflächenbüschels Π_n berührt, gehören auch diese Geraden als Strahlen dem Majcenschen Komplex des konzentrischen Polarraumbüschels (Π_n) an.

Wie bekannt, ist der Majcensche Komplex eines Polarraumbüschels 3. Grades, also die in einer gewöhnlichen Ebene liegenden Strahlen dieses Komplexes hüllen eine Kurve 3. Klasse ein. Auf Grund unserer Betrachtungen folgt offensichtlich, dass in den Ebenen des Mittelpunktes M diese Kurve 3. Klasse in drei Strahl-

büschel zerfällt, von denen einer den Scheitel M hat, und die zwei anderen durch parallele Geraden gebildet sind.

Die einen Raumpunkt P enthaltenden Strahlen des einem gewöhnlichen Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen Komplexes bilden einen Kegel 3. Grades, und die Zentralpunkte der Erzeugenden dieses Kegels bilden, wie bekannt, eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art, die auch den Punkt P enthält ([3], S. 108). Da in unserem konzentrischen Fall des Polarraumbüschels (Π_n) der Mittelpunkt M der Zentralpunkt aller seiner Geraden ist, die als Strahlen des zugeordneten Majcenschen Komplexes betrachtet werden können, folgt offensichtlich, dass die derartig allen Raumpunkten in unserem konzentrischen Polarraumbüschel Π_n zugeordneten Raumkurven 4. Ordnung den Mittelpunkt M enthalten.

Es ist bekannt, dass die den Punkten P_n einer unendlich fernen Geraden p_n zugeordneten Strahlen a_n des (STK) Komplexes unseres konzentrischen Polarraumbüschels (Π_n) einen Kegel 2. Grades bilden, der den Mittelpunkt M als Scheitel enthält. Jeder Punkt P_n bildet mit der ihm zugeordneten Geraden a_n die Berührungsebene der den Punkt P_n enthaltenden Inzidenzfläche \mathfrak{S}_n , die durch diese Ebene im Punkt P_n berührt wird. Jede Gerade des Punktes P_n , die die Gerade a_n schneidet, berührt also diese Inzidenzfläche \mathfrak{S}_n im Punkt P_n . In ihrem Schnittpunkt mit der Geraden a_n berührt sie eine andere Fläche \mathfrak{S}_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n . Alle derartigen Geraden des Punktes P_n sind Strahlen des dem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (SMK) Komplexes, deren Zentralpunkt sich auf der diesem Punkt P_n , auf die beschriebene Weise zugeordneten Geraden a_n befindet. Betrachtet man derartig alle Punkte P_n einer unendlich fernen Geraden p_n , dann bekommt man den folgenden Satz:

Die Zentralpunkte aller eine unendlich ferne Gerade schneidenden Strahlen des (SMK) Komplexes eines konzentrischen nicht koaxialen Polarraumbüschels liegen auf einem Kegel 2. Grades, dessen Scheitel der Mittelpunkt dieses Polarraumbüschels ist.

Die Zentralpunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des (SMK) Komplexes bilden einen Kegelschnitt, der in den Ebenen des Mittelpunktes M in zwei Gerade zerfällt, und die in den Ebenen eines Parallelebenenbüschels liegenden Zentralpunktkegelschnitte bilden einen Kegel 2. Grades des Mittelpunktes M .

Die Zentralpunkte der eine endliche Gerade p schneidenden Strahlen des (SMK) Komplexes bilden eine Fläche, die jede Ebene der Geraden p in einem Kegelschnitt schneidet, der in der Ebene des Mittelpunktes M in zwei Geraden zerfällt. Da aber jeder der Punkte der Geraden p der Zentralpunkt je eines Strahles des (SMK) Komplexes ist, muss diese Fläche von 3. Ordnung sein, wie es auch bei einem gewöhnlichen Polarraumbüschel der Fall ist.

In unserem konzentrischen Fall des Polarraumbüschels (Π_n) enthält diese Fläche zwei den Mittelpunkt M enthaltende Geraden

in der Ebene (pM) , und eine ausserhalb dieser Ebene diesen Mittelpunkt enthaltende Gerade, die der dem unendlich fernen Punkt der Geraden p zugeordnete Strahl im (STK) Komplex des Büschels (II_n) ist. Der Mittelpunkt M ist also ein Doppelpunkt aller ∞^4 derartigen Flächen 3. Ordnung.

4. Der Normalenkomplex der Inzidenzflächen \mathfrak{S}_n eines konzentrischen Polarraumbüschels (II_n)

Da alle Inzidenzflächen \mathfrak{S}_n des Polarraumbüschels (II_n) konzentrisch sind, wird der Normalenkomplex des Flächenbüschels II_n ebenso zentralsymmetrisch, wie es der Majcensche (SMK) , und der tetraedrale (STK) Komplex eines derartigen Polarraumbüschels sind. Man bezeichne diesen Normalenkomplex mit (SNK) . Die Fusspunkte der mit einer Ebene α parallelen Strahlen eines allgemeinen Normalenkomplexes bilden, wie bekannt ([4], S. 256), eine Fläche 3. Ordnung, die die vier Scheitel des Polartetraeders des Inzidenzflächenbüschels II_n enthält, und jeder dieser vier Scheitel enthält je zwei Gerade dieser Fläche. In unserem konzentrischen Fall enthält also die einer Ebene des Raumes derartig zugeordnete Fläche unseres konzentrischen Inzidenzflächenbüschels II_n , ausser dem Mittelpunkt M , auch die unendlich fernen Punkte der Geraden m_1, m_2, m_3 , und ist zentralsymmetrisch bezüglich des Mittelpunktes M . Die mit der Ebene α parallele und den Mittelpunkt M enthaltende Ebene schneidet diese Fläche 3. Ordnung in einer bezüglich des Mittelpunktes M zentral symmetrischen Kurve 3. Ordnung.

Wie bekannt, bilden die Berührungspunkte der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades mit den Ebenen eines Parallelebenenbüschels eine Raumkurve 5. Ordnung, die die Scheitel des Polartetraeders dieses Flächenbüschels enthält ([1], S. 66). Diese Kurve enthält auch zwei Punkte auf der gemeinsamen unendlich fernen Geraden des Parallelebenenbüschels. Offenbar ist diese Raumkurve 5. Ordnung der geometrische Ort der Fusspunkte der auf diese Ebenen senkrecht liegenden Strahlen des Normalenkomplexes dieses Flächenbüschels 2. Grades. In unserem Fall des konzentrischen nichtkoaxialen Inzidenzflächenbüschels ist eine derartige Raumkurve zentralsymmetrisch mit fünf unendlich fernen Punkten, von welchen nur zwei konjugiert imaginär sein können, da die drei anderen die reellen unendlichfernen Punkte der Geraden m_1, m_2, m_3 sind. Die vorher erwähnte Fläche 3. Ordnung der Fusspunkte aller mit der Ebene α parallelen Strahlen des (SNK) Komplexes ist also der geometrische Ort der Berührungspunkte der Inzidenzflächen \mathfrak{S}_n des Büschels II_n mit den mit einer Geraden $p \perp \alpha$ parallelen Ebenen. Auf dieser Fläche befinden sich ∞^1 der erwähnten Raumkurven 5. Ordnung, die den Büscheln der mit der Geraden p parallelen Ebenen zugeordnet sind. Die unendlich fernen Achsen aller dieser Parallelebenenbüschel enthalten den unendlich fernen

Punkt P_n der Geraden p , bilden also ein unendlich fernes Strahlenbüschel (P_n). Es ist klar dass der Punkt P_n der Pol der unendlich fernen Geraden a_n der Ebene a bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist. Auf jedem Strahl des Büschels (P_n) befinden sich zwei Punkte der diesem Strahl zugeordneten erwähnten Raumkurve 5. Ordnung und in dem Punkt P_n berührt auch ein Strahl des Büschels (P_n) eine Inzidenzfläche. Alle derartigen Punkte auf den Strahlen dieses Büschels bilden also die unendlich ferne Kurve 3. Ordnung der auf die beschriebene Weise der Geraden p zugeordneten Fläche 3. Ordnung.

Da durch jeden Punkt der Grundkurve k^4 des konzentrischen Inzidenzflächenbüschels Π_n eine mit einer Geraden im Raum parallele Berührungsebene dieser Grundkurve gelegt werden kann, folgt dass diese Grundkurve auf jeder der vorher erwähnten Flächen 3. Ordnung liegt. Jede ihrer beschriebenen Raumkurven 5. Ordnung schneiden, wie bekannt, diese Grundkurve k^4 in acht assoziierten Punkten, die auch im Raum zentralsymmetrisch bezüglich des Mittelpunktes M liegen, also die Kantenecken eines Parallelepipedes bilden. Alle diese Betrachtungen können also in folgendem Satz zusammengefasst werden:

Die Fusspunkte der mit einer Geraden parallelen Strahlen des (SNK) Komplexes eines konzentrischen nicht koaxialen Polarraumbüschels bilden eine zentrisch symmetrische Raumkurve 5. Ordnung, während die Fusspunkte der mit einer Ebene parallelen Strahlen dieses Komplexes eine zentrisch symmetrische Fläche 3. Ordnung bilden, auf der sich die Grundkurve k^4 des Inzidenzflächenbüschels dieses konzentrischen nicht koaxialen Polarraumbüschels befindet.

Die Erzeugenden des schon erwähnten Kegels 3. Ordnung der Achsen der Inzidenzflächen Π_n unseres konzentrischen Polarraumbüschels (Π_n) sind offenbar auch Strahlen des (SNK) Komplexes, und auf jeder Erzeugenden dieses Kegels liegen Fusspunkte die Scheitelpunkte einer der Flächen des Inzidenzflächenbüschels Π_n .

5. Der Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen den Inzidenzflächen des konzentrischen nicht koaxialen Polarraumbüschels

Man bezeichne diesen Komplex mit (SRK). Wegen der konzentrischen Lage aller Inzidenzflächen \mathfrak{S}_n ist offenbar auch dieser, diesem konzentrischen nicht koaxialen Polarraumbüschel zugeordnete Komplex zentral symmetrisch. Es ist bekannt dass in allgemeinem Fall ein derartiger Komplex vom 3. Grade ist. Jedem Raumpunkt ist ein Strahl dieses Komplexes zugeordnet, aber jedem seiner Strahlen zwei Punkte. Das ist der Ausgangspunkt und der Endpunkt des durch diesen Strahl bestimmten Tangentialkurzweges. Durch dieses involutorisch zugeordnete Punktepaar auf jedem Strahl eines derartigen Komplexes ist eine Raumtransformation 5. Ordnung

bestimmt. Die den Punkten einer Geraden p in dieser Raumtransformation zugeordneten Punkte bilden eine Raumkurve 5. Ordnung, die auf einer Regelfläche 6. Grades liegt, welche durch die diesen Punkten der Geraden p zugeordneten Strahlen gebildet wird ([6], S. 158). Die den Punkten einer Ebene zugeordneten Punkte bilden, offenbar, eine Fläche 5. Ordnung.

In unserem Fall eines konzentrischen nicht koaxialen Polarraumbüschels gilt offenbar dasselbe, aber wegen der Zentralsymmetrie dieses Polarraumbüschels bestehen auch einige zentralsymmetrische Fälle der eben aufgezählten Eigenschaften, die wir jetzt näher betrachten werden.

Auf Grund der zentralsymmetrischen Gestaltung des (SRK) Komplexes und aus der Tatsache, dass jede Gerade bezüglich eines jeden ihrer Punkte als Zentralpunkt genommen als zentralsymmetrisch betrachtet werden kann, folgt, dass die den Punkten einer den Mittelpunkt M enthaltenden Geraden zugeordnete Raumkurve 5. Ordnung auch zentralsymmetrisch bezüglich des Mittelpunktes M ist. Da die Ordnung dieser Raumkurve fünf ist, hat sie immer wenigstens einen unendlich fernen reellen Punkt. Die anderen vier können in Paaren auch konjugiert imaginär sein. Wegen der erwähnten Zentralsymmetrie kann jede Ebene des Mittelpunktes M diese Raumkurve 5. Ordnung nur in vier Punkten schneiden, da diese in zentralsymmetrischen Paaren auf dieser Kurve liegen. Es folgt also, dass diese Raumkurve auch den Mittelpunkt M enthalten muss. Aus dieser Zentralsymmetrie folgt aber weiterhin auch, dass diese Raumkurve im Mittelpunkt M keinen Doppelpunkt haben kann.

Bevor wir aber über die weiteren Eigenschaften der eben erwähnten Fläche schliessen können, muss auf das Folgende Rücksicht genommen werden. Den einem Raumpunkt T zugeordneten Strahl t_r des (SRK) Komplexes bekommt man auf folgende Weise: Der dem Punkt T im (STK) Komplex unseres Polarraumbüschels zugeordnete Strahl sei mit t_t bezeichnet. Die dem unendlich fernen Punkt dieses Strahles als Pol zugeordnete Polare bezüglich des absoluten Kegelschnittes sei durch die Ebene (Tt_t) im Punkt H geschnitten. Die Verbindungsgeraden dieses unendlich fernen Schnittpunktes H mit dem Punkt T ist der diesem Punkt im (SRK) Komplex zugeordnete Strahl t_r , und sein Schnittpunkt mit dem Strahl t_t ist der zweite dem Punkt T auf diesem Strahl zugeordnete Punkt.

Es sei der Punkt T unendlich fern und mit T_∞ bezeichnet. Der ihm im (STK) Komplex zugeordnete Strahl t_t enthält den Mittelpunkt M des konzentrischen Büschels Π_n . Da die Verbindungsgerade des unendlich fernen Punktes des Strahles t und des Punktes T_∞ die Polare des unendlich fernen Punktes des Strahles t_t bezüglich des absoluten Kegelschnittes schneidet, also die Verbindungsgerade des Punktes T_∞ und des Schnittpunktes dieser Polare und der Ebene $(T_\infty t_t)$ ist, ist diese Verbindungsgerade ein

Strahl des (SRK) Komplexes. Also der jedem unendlich fernen Punkt in der vorher erwähnten, durch einen konzentrischen nicht coaxialen Polarraumbüschel bestimmten Raumtransformation 5. Ordnung zugeordnete Punkt befindet sich auch unendlich fern.

In Abt. 3. sahen wir, dass die den Punkten einer unendlich fernen Geraden p_∞ zugeordnete Strahlen im (STK) Komplex einen Kegel zweiten Grades bilden, dessen Scheitel der Mittelpunkt M ist. Den unendlich fernen Kegelschnitt k^∞ dieses Kegels schneidet die Gerade p_∞ in zwei Punkten, die auch zwei Punkten dieser Geraden zugeordnet sind. Da die Verbindungsgeraden der Punkte der Geraden p_∞ mit den ihnen zugeordneten Punkten auf dem Kegelschnitt k^∞ Strahlen des (SRK) Komplexes sind, folgt, dass die Gerade p_∞ auch ein unendlich ferner Strahl des (SRK) Komplexes sein muss. Da ferner die Gerade p_∞ ganz beliebig angenommen war, folgt, dass alle Geraden der unendlich fernen Ebene Strahlen des unserem zentrisch symmetrischen nicht coaxialen Polarraumbüschel (II_n) zugeordneten (SRK) Komplexes sind. Da weiterhin eine unendlich ferne Gerade auch nur zwei Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades berühren kann, folgt, dass die zwei Paare zugeordneter Punkte auf der Geraden p_∞ zusammenfallen müssen, und sich mit den zwei erwähnten Schnittpunkten der Geraden p_∞ und des unendlich fernen Kegelschnittes k^∞ decken.

Aus der Tatsache dass die einer gewöhnlichen Geraden in der erwähnten Raumtransformation 5. Ordnung zugeordnete Kurve 5. Ordnung eine stetige singularitätenfreie Kurve ist, und eine unpaare Zahl unendlich ferner Punkte hat, folgt, dass auch hier eine derartige einem Strahl des Mittelpunktes M zugeordnete Kurve 5. Ordnung, die zentralsymmetrisch ist, auch den Mittelpunkt enthalten muss. Aus dieser Zentralsymmetrie folgt weiter, dass die Berührungsgerade dieser Raumkurve im Mittelpunkt M drei unendlich nahe Punkte dieser Raumkurve enthält, also eine Rauminflexionstangente dieser Raumkurve ist.

Betrachtet man nun eine den Mittelpunkt M enthaltende Ebene \mathfrak{L} , dann sind ihren den Punkt M enthaltenden Geraden in der beschriebenen Raumtransformation 5. Ordnung Raumkurven 5. Ordnung zugeordnet, die im Mittelpunkt M die ihnen zugeordnete Gerade berühren. Alle diese ∞^1 Raumkurven 5. Ordnung bilden die dieser Ebene \mathfrak{L} in dieser Raumtransformation zugeordnete Fläche 5. Ordnung, die im Mittelpunkt M durch die Ebene \mathfrak{L} berührt wird, und offenbar auch zentralsymmetrisch bezüglich dieses Mittelpunktes sein muss.

Die durch die Transformation der Ebene \mathfrak{L} entstandene Fläche 5. Ordnung schneidet die unendlich ferne Ebene in dem Kegelschnitt k^∞ , der durch die den Punkten der unendlich fernen Geraden der Ebene \mathfrak{L} zugeordneten Punkte gebildet ist, und in drei Geraden, die man folgenderweise finden kann: Die Ebene \mathfrak{L} schneide die drei Durchmesserbenen α, β, γ des gemeinsamen konjugierten Tripels in Geraden a, b, c . Diesen drei, den Mittelpunkt enthalten-

den und in den Ebenen α, β, γ liegenden Geraden sind drei Gerade a^n, b^n, c^n der unendlich fernen Ebene, als der Seitenebene des gemeinsamen Polartetraeders, konjugiert zugeordnet bezüglich aller Flächen \mathcal{C}_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n . Jede dieser drei Geraden a^n, b^n, c^n ist also ein Strahl des (STK) Komplexes, der allen Punkten einer der drei Geraden a, b, c zugeordnet ist. Offenbar gilt auch das Umgekehrte. Auf diesen drei den Geraden a, b, c , konjugiert zugeordneten Geraden a^n, b^n, c^n befinden sich also die durch die erwähnte Raumtransformation den Punkten der Geraden a, b, c zugeordneten Punkte, also die unendlich ferne Ebene schneidet unsere betrachtete Fläche 5. Ordnung in einer Kurve 5. Ordnung, die in den Kegelschnitt k^∞ und in diese drei Geraden a^n, b^n, c^n zerfällt.

Analoge Betrachtungen und Schlüsse könnte man offenbar auch für die Fläche 6. Ordnung der zugeordneten Punktepaare auf den Strahlen des (SRK) Komplexes durchführen, die eine Gerade des Mittelpunktes M schneiden.

6. Die Achsenkomplexe der in einem konzentrischen nichtkoaxialen Büschel sich befindenden polaren Räume

Alle diejenigen Geraden in einem polaren Raum, die die Pole enthaltend auf deren Polarebenen senkrecht stehen, sind, wie bekannt, Strahlen des diesem polaren Raum zugeordneten quadratischen Achsenkomplexes. In der Arbeit »Die Achsenkomplexe der in einem Büschel sich befindenden Polarräume« wurden die Achsenkomplexe eines gewöhnlichen Polarraumbüschels betrachtet, und hier möchten wir gewisse Ausartungen dieser Achsenkomplexe in den polaren Räumen unseres konzentrischen nichtkoaxialen Büschels betrachten.

Die Pole der einen Punkt P des Raumes enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes eines polaren Raumes, bilden eine kubische Hyperbel h^3 , die diesen Punkt P , dann den Mittelpunkt des polaren Raumes und die unendlich fernen Punkte der Achsen dieses polaren Raumes enthält [9]. Haben wir es aber mit einem Polarraumbüschel zu tun, gehört zu jedem polaren Raum dieses Büschels eine derartige diesem Punkt P zugeordnete kubische Raumhyperbel h^3 , und alle diese dem Punkt P zugeordneten kubischen Raumhyperbeln bilden eine Fläche 3. Ordnung ([5], S. 251). Im Fall des konzentrischen Polarraumbüschels enthalten alle diese Raumhyperbeln den Mittelpunkt M , also dieser Mittelpunkt befindet sich auf dieser dem Punkt P zugeordneten Fläche 3. Ordnung. In jedem Polarraum eines Polarraumbüschels enthält eine derartige einem Raumpunkt P zugeordnete kubische Raumhyperbel diesen Punkt P und den Mittelpunkt dieses Polarraumes. Die Verbindungsgerade dieser zwei Punkte ist also eine Bisekante dieser kubischen Raumhyperbel h^3 . Da dies für jeden Polarraum eines Polarraumbüschels gilt, folgt offenbar, dass in unserem konzentrischen Fall eines

Polarraumbüschels, wo alle derartige dem Punkt P zugeordneten Raumhyperbeln h^3 3. Ordnung die beschriebene Fläche 3. Ordnung bilden, die Verbindungsgerade PM eine Bisekante jeder dieser kubischen Raumhyperbel ist. Also der Mittelpunkt M müsste ein Doppelpunkt der dem Punkt P zugeordneten Fläche 3. Ordnung sein, wenn die Gerade PM diese Fläche im Mittelpunkt M nicht berührt, da auf der Verbindungsgeraden PM sich kein anderer Punkt dieser Fläche 3. Ordnung befinden kann.

Die den Punkt P enthaltenden Bisekanten einer diesem Punkt zugeordneten Raumhyperbel h^3 bilden den bekannten gleichseitigen Kegel 2. Grades der den Punkt P enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes. Die den Mittelpunkt M enthaltenden Bisekanten einer derartigen Raumhyperbel bilden auch einen Kegel 2. Grades, der die Achsen der Inzidenzfläche des Polarraumes dieses Achsenkomplexes enthält. Die Tangente der Raumhyperbel h^3 im Punkt P ist der diesem Punkt als Pol zugeordnete Strahl des Achsenkomplexes, während im Mittelpunkt M diese Raumkurve h^3 diejenige Erzeugende des Kegels Mh^3 berührt, die sich in der Berührungsebene des Kegels Ph^3 längs der gemeinsamen Erzeugenden PM befindet, aber nicht mit der Geraden PM zusammenfällt. In solch einem Fall hätten nämlich die Kegel Ph^3 und Mh^3 längs der gemeinsamen Erzeugenden PM eine gemeinsame Berührungsebene, und die Durchdringungskurve h^3 dieser Kegel könnte nicht dritter, sondern zweiter Ordnung sein. Wenn die vorher erwähnte Fläche 3. Ordnung aller in unserem konzentrischen Polarraumbüschel dem Punkt P zugeordneten Raumhyperbeln h^3 im Mittelpunkt M nur eine Berührungsebene hätte, müssten die Tangenten im Punkt M aller Raumkurven h^3 in dieser Ebene liegen, die die gemeinsame Berührungsebene aller ∞^1 Kegel Ph^3 längs der Erzeugenden PM sein müsste, also auch die Erzeugende PM enthielte. Eine der ∞^1 Raumhyperbeln h^3 müsste also im Punkt M die Gerade PM berühren, und dadurch hätten die dieser Raumhyperbel zugeordneten Kegel Ph^3 und Mh^3 eine gemeinsame Berührungsebene längs der gemeinsamen Erzeugenden PM . Deswegen könnte aber die Raumkurve h^3 keine Raumkurve 3. Ordnung sein, sondern nur ein Kegelschnitt. Jetzt müsste sich aber auch die ganze Gerade PM auf der betrachteten dem Punkt P zugeordneten Fläche 3. Ordnung befinden. Dies ist jedoch nicht möglich, da dann jeder Punkt dieser Geraden auf einer der dem Punkt zugeordneten Raumhyperbel h^3 liegen müsste, also diese Raumhyperbel eine Trisekante hätte. Die in unserem konzentrischen nichtkoaxialen Polarraumbüschel dem Punkt P zugeordnete beschriebene Fläche 3. Ordnung kann dadurch durch die Gerade PM im Punkt M nicht berührt werden, und ausserdem kann diese Fläche in diesem Punkt nicht nur eine Berührungsebene haben. Der Punkt M ist also ein Doppelpunkt dieser Fläche 3. Ordnung.

Jede einem Raumpunkt P in dem Achsenkomplex eines polaren Raumes zugeordnete, vorher beschriebene kubische Hyperbel ent-

hält, wie bekannt, die unendlich fernen Punkte der Achsen dieses Polarraumes. Da das unendlich ferne Dreieck dieser drei Punkte das gemeinsame Polardreieck des unendlich fernen Kegelschnittes der Inzidenzfläche dieses Polarraumes und des absoluten Kegelschnittes ist, bilden, wie bekannt, in einem Polarraumbüschel alle derartigen unendlich fernen Polardreiecke eine unendlich ferne Kurve c 3. Ordnung. Diese Kurve enthält, wie bekannt, auch die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks des unendlich fernen Kegelschnittbüschels des Büschels Π_n der Inzidenzflächen \mathcal{C}_n . Diese drei Punkte sind, wie bekannt, die unendlich fernen Punkte der Geraden m_1, m_2, m_3 . In dieser unendlich fernen Kurve c^n 3. Ordnung wird also die jedem Raumpunkt P die eben beschriebene Fläche 3. Ordnung geschnitten, resp. diese Kurve liegt auf allen ∞^3 derartigen Flächen eines Polarraumbüschels.

Wie bekannt, kann diese unendlich ferne Kurve c^n keinen Doppelpunkt haben, muss also vom Geschlecht 1 sein. Wenn sie nämlich einen Doppelpunkt hätte, müsste sie wenigstens von der Ordnung vier sein. Auf Grund dieser Betrachtungen und Schlüsse gilt also folgender Satz:

Durch ein konzentrisches nicht koaxiales Polarraumbüschel sind ∞^1 zentrisch symmetrische Achsenkomplexe dieser Polarraume bestimmt. Die Pole der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieser Achsenkomplexe, jeweils in zwei seiner polaren Räume, bilden eine Fläche 3. Ordnung, die im Mittelpunkt dieses Polarraumbüschels einen Doppelpunkt hat. Alle ∞^3 derartigen den Raumpunkten zugeordneten Flächen haben die unendlich ferne Kurve 3. Ordnung und den Doppelpunkt gemeinsam.

Betrachtet man zwei Punkte P_1, P_2 im Raum, und zwar so dass sie sich zentral symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes M befinden, gehört in unserem konzentrischen Polarraumbüschel zu jedem dieser zwei Punkte eine der beschriebenen Flächen 3. Ordnung. Auch diese zwei Flächen sind offenbar im Raum zentralsymmetrisch bezüglich des Mittelpunktes M . Diese zwei Flächen durchdringen sich in der unendlich fernen Kurve c^n 3. Ordnung, und in einer Raumkurve 6. Ordnung, die im Mittelpunkt einen vierfachen Punkt hat, und, selbstverständlich, bezüglich dieses vierfachen Punktes auch zentral symmetrisch ist. Die Verbindungsgeraden eines Punktes S_1 dieser Raumkurve mit den Punkten P_1, P_2 sind Strahlen zweier Achsenkomplexe des gemeinsamen Pols S_1 . Bezüglich des zum Punkt S_1 zentral symmetrisch liegenden Punktes S_2 , der auch auf dieser Raumkurve 6. Ordnung liegt, gilt dasselbe. Da die Verbindungsgeraden $S_1 P_2$ und $S_2 P_1$ im Raum parallel sind, gehören sie offenbar zu demselben Achsenkomplex, da sie die Ebenen α, β, γ in Punktetripeln schneiden, deren gleichnamige Verhältnisse den gleichen Wert haben: Es gilt also das Folgende:

In einem konzentrischen Polarraumbüschel enthält jeder Raumpunkt $P^n \infty^1$ derartige Geraden, die einen Kegel 6. Grades mit einer vierfachen Erzeugenden bilden, die nicht nur als Strahlen des betref-

fenden Achsenkomplexes angenommen werden können, wo die diesen Strahlen in ihren Achsenkomplexen zugeordneten Punkte (Pole) eine Raumkurve 6. Ordnung bilden, die im Mittelpunkt M einen vierfachen Punkt hat, sondern jeder Punkt S^n dieser Raumkurve ist der Pol noch eines Strahles eines anderen Achsenkomplexes dieses Polarraumbüschels, der den zum Punkt P_1 bezüglich des Mittelpunktes M zentrisch symmetrisch Punkt P_2 auf dieser Kurve enthält. Für den zum Punkt S_1 zentrisch symmetrischen Punkt S_2 auf dieser Raumkurve 6. Ordnung gilt dasselbe in denselben zwei Achsenkomplexen.

Ähnliche Vereinfachungen der Eigenschaften auch an den anderen in der Arbeit »Die Achsenkomplexe der in einem Büschel sich befindenden Polarräume« ausgeführten geometrischen Örtern, könnte man jetzt in unserem konzentrischen Polarraumbüschel weiter entwickeln. Da wir aber dabei keine besonderen neuen und von den schon bekannten Resultaten verschiedenen Resultate bekommen könnten, werden wir diese Ausführungen diesmal ausser Betracht lassen.

7. Das konzentrische nichtkoaxiale Flächenbündel 2. Grades

Es sei durch drei konzentrische nichtkoaxiale Flächen 2. Grades $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$, von denen sich keine im Büschel der anderen zwei befindet, ein Flächenbündel 2. Grades gegeben. Die acht assoziierten Grundpunkte dieses Flächenbündels sind offenbar im Raum in Paaren auch zentrisch symmetrisch angeordnet, sie brauchen aber nicht die Eckpunkte eines Parallelepipedes sein. Die unendlich ferne Ebene schneide die Flächen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ in unendlich fernen Kegelschnitten k^1, k^2, k^3 . Durch die Kegelschnitte k^1, k^2 ist ein unendlich fernes Kegelschnittbüschel ($k^1 k^2$) bestimmt. Der Kegelschnitt k^3 bildet mit jedem Kegelschnitt des Büschels ($k^1 k^2$) ein neues Kegelschnittbüschel, und die Ecken aller gemeinsamen Polardreiecke dieser Büscheln bilden, wie bekannt, eine unendlich ferne Kurve 3. Ordnung, die mit s^n bezeichnet sei. Durch die Flächen des gegebenen Flächenbündels 2. Grades, als durch die Inzidenzflächen polarer Räume, ist ein spezielles konzentrisches Polarraumbündel bestimmt, in dem die Polartetraeder der erwähnten ∞^1 Flächenbüschel 2. Grades den Mittelpunkt M dieses Flächenbündels als einen gemeinsamen Scheitel haben, während die diesem Scheitel gegenüberliegende Seitendreiecke in der unendlich fernen Ebene liegen. Die unendlich fernen Scheitel dieser ∞^1 Polartetraeder bilden, wie wir sahen, die erwähnte Kurve s^n . Da die Scheitel des Polartetraeders eines Flächenbüschels 2. Grades die Scheitel der dieses Büschel enthaltenden Kegel sind, folgt, dass die bekannte Raumkurve 6. Ordnung der Kegelspitzen eines Flächenbündels 2. Grades im Fall unseres konzentrischen Polarraumbündels in die

unendlich ferne Kurve s^n und drei Geraden des Mittelpunktes M dieses Bündels zerfällt. Die ∞^1 Kegel, die sich in unserem konzentrischen Flächenbündel 2. Grades befinden, sind im Raum auf ∞^1 Zylinder mit den unendlich fernen Scheiteln auf der Kurve s^n , und auf ∞^1 Kegel verteilt, die ein Kegelbüschel 2. Grades mit gemeinsamem Scheitel bilden, für welches die vier Verbindungsgeraden der zentrisch symmetrischen assoziierten Punktepaare Grunderzeugende sind.

Über die vier bekannten Strahlkomplexe eines jeden in einem derartigen konzentrischen Polarraumbündel sich befindenden Polarraumbüschels haben wir das Wichtigste schon vorher gehört, und über die Systeme derartiger Komplexe in einem derartigen gewöhnlichen Polarraumbündel hätten wir kaum etwas Besonderes zu sagen.

Sind aber die drei Flächen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ so gegeben, dass sie ausser der konzentrischen Lage auch drei gemeinsame konjugierte Diametralebenen haben, die keine orthogonale Symmetrieebenen sind, resp. einen gemeinsamen konjugierten Durchmessertripel m_1, m_2, m_3 haben, und wieder keine von ihnen sich im Büschel der anderen zwei befindet, haben alle polare Räume dieses Polarraumbündels ein gemeinsames Polartetraeder. Der Mittelpunkt M ist einer seiner Scheitel, und die unendlich fern liegende Ebene ist seine gegenüberliegende Seitenebene. Die Geraden m_1, m_2, m_3 des gemeinsamen konjugierten Durchmessertripels sind die Kanten dieses gemeinsamen Polartetraeders.

Teilen wir ein derartiges spezielles konzentrisches Polarraumbündel in ∞^1 konzentrische Polarraumbüschel, dann gehört zu jedem diesem Büschel der ihm zugeordnete (STK) Komplex. Da die Verbindungsgeraden jeden Raumpunktes mit dem Mittelpunkt M und mit den unendlich fernen Punkten der Kantengeraden m_1, m_2, m_3 , die Strahlen eines jeden dieser ∞^1 (STK) Komplexe sind, bilden die Komplexstrahlenkegel 2. Grades jeden Raumpunktes aller dieser (STK) Komplexe ein Kegelbüschel 2. Grades, dessen Grunderzeugende die erwähnten vier Verbindungsgeraden sind. Wir haben also hier einen speziellen Fall des Flächenbündels 2. Grades, resp. Polarraumbündels, mit gemeinsamem Polartetraeder [2]. In der Arbeit »Koaxiale polare Räume« wurde ein derartiges spezielles Polarraumbündel betrachtet, in dem alle Inzidenzflächen gemeinsame Achsen hatten, also den gemeinsamen konjugierten Durchmessertripel m_1, m_2, m_3 drei untereinander senkrechte Gerade bildeten. Da das konzentrische Polarraumbündel mit nicht untereinander senkrechten Durchmessergeraden m_1, m_2, m_3 immer in ein derartiges Polarraumbündel mit gemeinsamen Achsen durch eine affine Raumtransformation übergeführt werden kann, gelten alle in der erwähnten Arbeit ausgeführten Eigenschaften des koaxialen Polarraumbündels auch in unserem nur konzentrischen Fall, ausser

derjenigen Eigenschaften die mit der senkrechten Lage im Raum in Beziehung stehen. Selbstverständlich handelt es sich hier nur um die (STK) und (SMK) Komplexe, da die zwei anderen mit der senkrechten Lage im Raum streng verbunden sind. Wie bekannt, geht eine senkrechte Lage durch eine affine Raumtransformation nicht in eine senkrechte Lage über, ausser in speziellen Fällen.

Teilt man also in unserem konzentrischen Polarraumbündel die ∞^2 polaren Räume in ∞^1 Polarraumbüschel auf dieselbe Weise auf wie es in der eben erwähnten Arbeit ausgeführt wurde, bilden auch hier die Grundkurven der Inzidenzflächenbüschel aller dieser Polarraumbüschel eine Fläche 4. Ordnung mit 12 Doppelpunkten, zu welchen die drei unendlich fernen Punkte der drei gemeinsamen Durchmessergeraden m_1, m_2, m_3 gehören. Jede der in der erwähnten Arbeit beschriebenen Arten der Verteilung in ∞^1 Polarraumbüschel ergibt offenbar auch hier eine neue derartige Fläche 4. Ordnung mit gemeinsamen zwölf Doppelpunkten und sechzehn Geraden. Alle diese Flächen 4. Ordnung bilden auch hier ein Büschel derartiger Flächen mit einer in sechzehn Gerade zerfallenen Grundkurve 16. Ordnung. Durch eine affine Raumtransformation kann dieses Flächenbüschel in das in der erwähnten Arbeit beschriebene koaxiale Flächenbüschel 4. Ordnung transformiert werden.

L I T E R A T U R :

- [1] V. Niče, Geometrijsko mjesto dirališta pramena ravnina s pramenom površina drugoga reda. Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjetn. **271** (1942), 65—68,
- [2] V. Niče, Ein Beitrag zum F^2 -Bündel mit Polartetraeder, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **15** (1960), 179—188,
- [3] V. Niče, Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlkomplex, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **325** (1962), 107—125,
- [4] V. Niče, Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **18** (1963), 255—268,
- [5] V. Niče, Die Achsenkomplexe der in einem Büschel sich befindenden Polarräume, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **19** (1964), 243—255,
- [6] V. Niče, Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjetn. **331** (1965), 145—163,
- [7] V. Niče, Die Achsenregelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik Matematički **1** (21) (1966), 215—221,
- [8] V. Niče, Koaxiale polare Räume, Glasnik Matematički **1** (21) (1966), 223—243,
- [9] T. Reye, Die Geometrie der Lage, Abt. II, Leipzig, 1910,
- [10] T. Reye, Die Geometrie der Lage, Abt. III, Leipzig, 1910.

(Eingegangen am 17. X 1966.)

Mathematisches Institut
der Universität Zagreb

KONCENTRIČNI POLARNI PROSTORI

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Uvod. Uzmemo li dvije koncentrične plohe 2. stupnja, koje nisu koaksialne, kao incidentne plohe dvaju polarnih prostora, tada je tim plohamo zadan pramen Π_n koncentričnih ploha 2. stupnja \mathcal{S}_n , koje su incidentne plohe koncentričnog pramena polarnih prostora (Π_n). Središte tog pramena neka je tačka M , a temeljna krivulja k^4 tog pramena je očito centrički simetrična s obzirom na središte M . Zajednički polarni tetraedar tog pramena polarnih prostora omeđuju tri ravnine α, β, γ središta M i neizmjereno daleka ravnina. Te se ravnine sijeku u pravcima $m_1 (\beta \times \gamma)$, $m_2 (\alpha \times \gamma)$, $m_3 (\alpha \times \beta)$, koji čine zajedničku trojku konjugiranih promjera svih incidentnih ploha pramena Π_n .

U ovoj se radnji promatraju najprije tetraedralni bazični kvadratni kompleks, kubični Majcenov kompleks, kompleks normala incidentnih ploha i kompleks najkraćih dirnih putova između incidentnih ploha pramena (Π_n). Nakon toga su razmatrani osni kompleksi takvih incidentnih ploha, odnosno polarnih prostora, a na kraju je ukratko obuhvaćen i specijalni slučaj svežnja koncentričnih polarnih prostora s njegovim incidentnim plohamo.

1. U ovoj se tački promatra degeneracija prostorne krivulje 3. reda središta incidentnih ploha \mathcal{S}_n (u tri pravca), kao i pravčasta ploha 9. stupnja osi svih ploha \mathcal{S}_n , koja se raspada u stožac 3. stupnja i tri para ravnina.

2. U ovom se odsječku promatra poznati bazični tetraedralni kvadratni kompleks ovakvog pramena polarnih prostora. Budući da glavni tetraedar ovakvog pramena ima jednu neizmjereno daleku pobočku, to je vrijednost karakteristične konstante takvog kompleksa jednaka vrijednosti omjera trojke tačaka, a ne vrijednosti dvoomjera kao kod običnog pramena polarnih prostora, jer se jedna tačka tog dvoomjera nalazi neizmjereno daleko.

U ovakvom specijalnom centrički simetričnom kvadratnom kompleksu promatrane su neke osobite kongruencije, a dobivena je i jedna zanimljiva osobina centrički simetrične prostorne krivulje 4. reda I vrste.

3. U okviru Majcenovog kubičnog kompleksa jednog koncentričnog pramena polarnih prostora pojavljuje se također cio niz zanimljivih novih osobina, koje proizlaze iz osobitog koncentričnog oblika takvog pramena polarnih prostora. Kao npr. ova:

Centralne tačke onih zraka Majcenovog kompleksa koncentričnog pramena polarnih prostora, koje sijeku neki neizmjereno daleki pravac, leže na stošcu 2. stupnja, kojemu je vrh u središtu tog pramena.

4. Kod kompleksa normala incidentnih ploha jednog koncentričnog pramena polarnih prostora pojavljuje se također niz novih osobina, od kojih je najzanimljivija ova:

Nožišta onih zraka kompleksa normala jednog koncentričnog pramena polarnih prostora, koje su međusobno usporedne, čine centrički simetričnu prostornu krivulju 5. reda, dok nožišta takvih zraka paralelnih s jednom ravninom leže na centrički simetričnoj plohi 3. reda, na kojoj se nalazi i temeljna prostorna krivulja pramena incidentnih ploha takvog pramena polarnih prostora. Središte te simetrije je očito središte tog pramena polarnih prostora.

5. U kompleksu najkraćih dirnih putova među incidentnim ploham koncentričnog pramena polarnih prostora, također se javljaju naročite osobine, napose one koje su povezane uz poznatu prostornu transformaciju 5. reda, određenu takvim kompleksom. Važnu ulogu u određivanju takvih osobina vrše osim centralne simetrije i elementi neizmjerne daleke ravnine. Tako npr.:

Tačkama nekog pravca pridružene tačke, na odgovarajućim zrakama tog kompleksa, čine prostornu krivulju 5. reda, koja je centrički simetrična, a središte simetrije joj je prostorna infleksiona tačka. Pravcima neke ravnine na taj način pridružene prostorne krivulje 5. reda čine centrički simetričnu opću plohu 5. reda.

6. U ovom su odsječku razmatrani osni kompleksi koncentričnih polarnih prostora jednog pramena takvih prostora. Jedna od osobina tih kompleksa je ova:

Osnih kompleksi polarnih prostora jednog koncentričnog pramena takvih prostora čine centrički simetričan pramen takvih kompleksa. Dva pola na svakoj zraci jedne tačke prostora, svaki u svom polarnom prostoru, čine za svaku tačku prostora plohu 3. reda, koja u središtu pramena polarnih prostora ima dvostruku tačku. Svih ∞^3 ovakvih ploha jednog koncentričnog pramena polarnih prostora imaju zajedničku dvostruku tačku i neizmjerne daleku krivulju 3. reda.

Osim ove osobine postoje još neke u ovakvom pramenu osnih kompleksa, koje su vezane uz njegov centralno simetrički oblik.

7. U ovom odsječku promatran je svežanj koncentričnih, ali ne koaksialnih, ploha 2. stupnja, koje su incidentne plohe jednog svežnja koncentričnih polarnih prostora. Razdiobom ovog svežnja u ∞^1 pramenova dobiva se ∞^1 temeljnih prostornih krivulja 4. reda I vrste ovih pramenova, koje sve zajedno čine jednu osobitu plohu 4. reda s 12 dvostrukih tačaka i 16 pravaca. Uz ∞^1 takvih razdioba u pramenove dobiva se pramen ovakvih osobitih ploha 4. reda sa zajedničkih 16 pravaca i zajedničkih 12 dvostrukih tačaka.