KOAXIALE POLARE RÄUME

KOAKSIJALNI POLARNI PROSTORI

Vilko Niče, Zagreb

Sonderabdruck aus
GLASNIK MATEMATIČKI 1 (21) (1966), 223—243

Štamparski zavod „Ognjen Prica" Zagreb, Savska Cesta 31, 1966

GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 1 (21) — No. 2 — 1966.

KOAXIALE POLARE RÄUME

Vilko Niče, Zagreb

Einführung. Durch zwei koaxiale Flächen 2. Grades φ_1, φ_2 sind zwei koaxiale polare Räume (Π_1) (Π_2) bestimmt, wenn diese zwei Flächen als Inzidenzflächen dieser zwei polaren Räume angenommen werden. Durch derartige zwei Flächen ist ein Büschel koaxialer Flächen 2. Grades bestimmt, und alle diese Flächen sind Inzidenzflächen koaxialer polarer Räume, die ein koaxiales Polarraumbüschel (Π_k) bilden. Das Büschel der koaxialen Inzidenzflächen φ_n sei mit Π_k bezeichnet. Das gemeinsame Polartetraeder der Flächen φ_1, φ_2, resp. der durch diese Inzidenzflächen bestimmten polaren Räume (Π_1), (Π_2), ist, wie bekannt, gemeinsam allen polaren Räumen des durch das koaxiale Inzidenzflächenbüschel Π_n bestimmten Polarraumbüschels (Π_k). Da das gemeinsame Polartetraeder der koaxialen Flächen φ_1, φ_2 durch deren drei Symmetrieebenen und durch die unendlich ferne Ebene gebildet wird, wird dieses uneigentliche Polartetraeder auch allen polaren Räumen des koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) gemeinsam sein.

Alle koaxialen Flächen φ_n 2. Grades des Büschels Π_k haben, wie wir sahen, die drei Symmetrieebenen gemeinsam, die mit der unendlich fernen Ebene das gemeinsame Polartetraeder aller dieser Flächen bilden. Die drei unendlich fernen Geraden dieser Symmetrieebenen bilden das gemeinsame Polardreieck aller Schnittkurven 2. Grades der unendlich fernen Ebene und der koaxialen Flächen des Flächenbüschels Π_k, die offenbar ein unendlich fernes Kurvenbüschel 2. Grades bilden.

Durch den gemeinsamen Mittelpunkt und eine unendlich ferne Kurve 2. Grades ist, wie bekannt, ein Büschel homothetischer koaxialer Flächen 2. Grades mit gemeinsamem asymptotischem Kegel bestimmt. Da durch ein Dreieck in einer Ebene eine stetige Menge (Netz) von ∞^2 Kurven 2. Grades bestimmt ist, für die dieses Dreieck das gemeinsame Polardreieck ist, und dies auch für die unendlich ferne Ebene gilt, ist durch drei aufeinander im Raum senkrecht stehende Ebenen eine stetige Menge von ∞^3 Flächen 2. Grades bestimmt, mit diesen drei Ebenen als gemeinsamen Symmetrieebenen. Diese ∞^3 Flächen 2. Grades können im Raum in ∞^2 Büschel homothetischer koaxialer Flächen 2. Grades verteilt werden. Es bestehen also Bündel von koaxialen Flächen 2. Grades,

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

resp. Bündel ihrer koaxialen polaren Räume, in denen keine zwei dieser Flächen, resp. ihre polaren Räume, homothetisch sein müssen. In einem Bündel koaxialer Flächen 2. Grades ist durch jede seiner Flächen ein homothetisches koaxiales Flächenbüschel 2. Grades bestimmt .

Durch einen polaren Raum ist auch der ihm zugeordnete quadratische Achsenkomplex bestimmt, den die durch jeden Punkt des Raumes auf die diesem Punkt in diesem polaren Raum zugeordnete Polarebene gefällten Lote bilden. Der Achsenkomplex eines polaren Raumes ist auch als ein spezieller quadratischer tetraedraler Strahlenkomplex bekannt, dessen Haupttetraeder durch die unendlich ferne Ebene und die Symmetrieebenen dieses polaren Raumes gebildet wird. Durch ein Büschel polarer Raume ist also ein Büschel der diesen polaren Räumen zugeordneten Achsenkomplexe bestimmt. In dieser Arbeit haben wir die Absicht, unter anderem, uns auch mit einem derartigen koaxialen Büschel quadratischer Achsenkomplexe zu befassen.

Die einem Raumpunkt als Pol zugeordneten Polarebenen in einem Büschel polarer Räume bilden, wie bekannt, ein Ebenenbüschel. Die den Raumpunkten in einem Büschel polarer Räume auf die beschriebene Weise zugeordneten Achsen dieser Polarebenenbüschel bilden den bekannten, diesem Polarraumbüschel zugeordneten, quadratischen tetraedralen Komplex, der mit (TK) bezeichnet sei. Das Haupttetraeder dieses tetraedralen Strahlenkomplexes ist das allen polaren Räumen dieses Polarraumbüschels gemeinsame Polartetraeder.

In unserem koaxialen Falle polarer Räume wird dieses Haupttetraeder, wie wir vorher sahen, durch die drei Symmetrieebenen und durch die unendlich ferne Ebene gebildet. Der dem Büschel koaxialer polarer Räume (Π_k) auf die eben beschriebene Weise zugeordnete quadratische tetraedrale Strahlenkomplex ist also mit dem Polarraumbüschel (Π_k) koaxial, und hat mit ihm seine drei Symmetrieebenen gemeinsam. Es handelt sich also hier um einen Achsenkomplex, der mit diesem speziellen tetraedralen Komplex identisch ist. Es wird in dieser Arbeit auch die Lage dieses Achsenkomplexes in dem erwähnten Achsenkomplexbüschel des koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) bestimmt, und der Zusammenhang mit anderen Achsenkomplexen in diesem Achsenkomplexbüschel betrachtet.

Durch jedes Büschel polarer Räume ist, wie bekannt, auch der diesem Büschel zugeordnete kubische Majcensche Strahlenkomplex bestimmt ([3]). Einem Polarraumbüschel ist weiterhin auch der Komplex der Normalen seiner Inzidenzflächen zugeordnet, der 8. Grades ist ([4]). Diesem Polarraumbüschel ist auch zugeordnet, und durch dasselbe bestimmt, der kubische Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen den Inzidenzflächen 2. Grades dieses Polarraumbüschels ([6]).

In dieser Arbeit werden einige Eigenschaften dieser vier Strahlenkomplexe im Fall eines koaxialen Polarraumbüschels betrachtet, wie auch der Zusammenhang einiger von ihnen mit dem diesem Polarraumbüschel zugeordneten Achsenkomplexbüschel, den die Achsenkomplexe der polaren Räume des koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) bilden. Im Rahmen unserer Ausführungen werden in dieser Arbeit auch die Büschel homothetischer koaxialer polarer Räume, resp. Flächen 2. Grades, in Betracht gezogen. Unsere Betrachtungen werden teilweise auch auf einige spezielle koaxiale Flächenbüschel 2. Grades, resp. ihre polare Räume, erweitert.

Die konfokalen Flächen 2. Grades, resp. ihre polaren Räume, sind zwar koaxial, aber hier werden sie doch nicht betrachtet, da derartige konzentrische und koaxiale Flächen 2. Grades kein reguläres, durch eine Grundkurve 4. Ordnung I. Art bestimmtes Büschel bilden.

1. *Über das Büschel koaxialer polarer Räume.* Man nehme an, dass durch zwei koaxiale Flächen φ_1, φ_2 2. Grades das Inzidenzflächenbüschel Π_k 2. Grades eines koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) bestimmt ist. Wie schon erwähnt, sind die drei gemeinsamen Symmetrieebenen der Flächen φ_1, φ_2 auch die Symmetrieebenen des gesamten, durch die Flächen φ_1 und φ_2 bestimmten Inzidenzflächenbüschels Π_k des Polarraumbüschels (Π_k).

Die in einem polaren Raum in jedem Raumpunkt P auf die Polarebenen π dieser Punkte senkrecht stehenden Geraden bilden, wie bekannt, den quadratischen Achsenkomplex dieses polaren Raumes. Jeder Strahl s dieses Achsenkomplexes hat also einen ihm zugeordneten Pol P, und dann sind ihm weiterhin die diesem Pol angehörende Polarebene π und der Fusspunkt N dieses Strahles s in der Polarebene π, zugeordnet. Es gilt aber nicht die Umkehrung, dass durch jeden Achsenkomplex nur ein polarer Raum bestimmt ist.

Wie bekannt, ist ein polarer Raum auch durch eines seiner Polartetraeder und durch einen Pol mit der demselben zugeordneten Polarebene bestimmt. Ein quadratischer tetraedraler Strahlenkomplex ist, unter anderem, auch durch sein Haupttetraeder und einen seiner Strahlen bestimmt ([8] S. 5). Auf Grund des Erwähnten ist also auch ein Achsenkomplex durch seine drei Symmetrieebenen und einen Strahl s bestimmt. Durch diese drei Symmetrieebenen und durch irgendeinen Punkt dieses Strahles s, und durch irgendeine auf diesen Strahl normale Ebene, ist also auch ein polarer Raum dieser drei Symmetrieebenen bestimmt. Da sich auf der Geraden s ∞^1 Punkte befinden, und auf diese Gerade s ∞^1 normale Ebenen gelegt werden können, folgt, dass ein quadratischer Achsenkomplex zu ∞^2 koaxialen polaren Räumen zugeordnet ist. Nämlich, zu jedem Punkt P der Geraden s als Pol kann jede auf dieser Geraden s normale Ebene als Polarebene π angenommen werden. Auf Grund dessen folgt also die bekannte Tatsache, dass der quadratische Achsenkomplex eines polaren Raumes einer Menge von ∞^2 mit diesem polaren Raum koaxial liegender polarer Räume zugeordnet ist, und auch durch diese Räume bestimmt ist ([7] S. 222). Die durch die Komplexstrahlen gebildete ∞^3 Komplexkegel 2. Grades aller Raumpunkte enthalten immer den gemeinsamen Mittelpunkt und die unendlich fernen Punkte der gemeinsamen Achsen aller Inzidenzflächen einer derartigen stetigen Menge von ∞^2 koaxialen polaren Räume. Auf jedem dieser ∞^3 Komplexkegel 2. Grades befinden sich auch die drei Achsen der durch die Berührungsebenen der Inzidenzflächen, die den Scheitel dieser Komplexkegel enthalten, eingehüllten Berührungskegel 2. Grades.

Es sei ein Büschel derartiger koaxialer Inzidenzflächen 2. Grades gegeben, durch die ein Büschel polarer Räume bestimmt ist, die keinen gemeinsamen Achsenkomplex haben. Dies geschieht dann, a) wenn diese koaxialen Inzidenzflächen ihren unendlich fernen Kegelschnitt nicht gemeinsam haben, also nicht homothetisch sind, b) wenn die einem Raumpunkt in irgendwelchen zwei polaren Räumen dieses koaxialen Büschels zugeordneten Polarebenen nicht parallel sind. Wenn nämlich die diesem Punkt zugeordneten Polarebenen in zwei polaren Räumen dieses Büschels parallel wären, dann wären auch die mit diesen zwei Polarebenen dieses Punktes diesem Punkt zugeordneten Polarebenen in allen anderen polaren Räumen dieses Büschels parallel, da die einem Raumpunkt in einem Büschel polarer Räume zugeordneten Polarebenen ein Ebenenbüschel bilden, dessen Achse ein Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten (TK)-Komplexes ist. In unserem Fall wäre das also ein Büschel paralleler Ebenen mit einer gemeinsamen diesen Punkt enthaltenden Normale, durch die, als den Achsenkomplexstrahl, nur ein Achsenkomplex in allen polaren Räumen dieses Büschels bestimmt wäre.

Die Achsenkomplexe eines derartig gegebenen koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) bilden also eine stetige Menge von ∞^1 koaxialen Achsenkomplexen, die den ganzen 4-dimensionalen Strahlraum enthalten. Die unserem derartig gegebenen Polarraumbüschel (Π_k) zugeordneten Achsenkomplexe bilden also ein Achsenkomplexbüschel mit gemeinsamem Mittelpunkt und mit gemeinsamen. Symmetrieebenen. Da jeder Achsenkomplex auch als besonderer Fall eines quadratischen tetraedralen Strahlenkomplexes betrachtet werden kann, dessen Symmetrieebenen und die unendlich ferne Ebene das Haupttetraeder bilden, sehen wir, dass es sich hier um einen besonderen Fall des tetraedralen Strahlkomplexbüschels mit gemeinsamem Haupttetraeder handelt. Ein allgemeines tetraedrales Strahlkomplexbüschel ist schon in einer früheren Arbeit betrachtet worden ([1]), wo gezeigt wurde, dass die einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Komplexbüschels ein Strahlkegelbüschel 2. Grades bilden, wo alle derartigen allen Raumpunkten zugeordneten Strahlkegelbüschel untereinander projektiv zugeordnet sind, und zwar so, dass in diesem ∞^3 Strahlkegelbüscheln 2. Grades die Komplexkegel einiger tetraedralen Komplexe dieses Büschels eineindeutig zugeordnet sind.

In unserem speziellem Fall, in dem das gemeinsame Haupttetraeder die gemeinsamen Symmetrieebenen und die unendlich ferne Ebene bilden, müssen offenbar dieselben, oder diesen ähnliche vereinfachte Eigenschaften bestehen, die denjenigen im allgemeinen Fall analog sind.

Wie bekannt, enthalten die gleichseitigen Komplexkegel 2. Grades aller Raumpunkte in dem Achsenkomplex eines Polarraumes dessen Mittelpunkt und die unendlich fernen Punkte der Achsen seiner Inzidenzfläche. Da alle Achsenkomplexe unseres betrachteten Achsenkomplexbüschels derartige vier Punkte gemeinsam haben (es sind die Scheitel des gemeinsamen Haupttetraeders), so folgt, dass auch die Komplexkegel aller in unserem Büschel sich befindenden Achsenkomplexe diese vier Punkte gemeinsam haben. Die einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen aller dieser Achsenkomplexe unseres Büschels bilden also ∞^1 Komplexkegel 2. Grades, die vier gemeinsame Erzeugende haben. Alle diese einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen der quadratischen Achsenkomplexe aller polaren Räume in unserem gegebenen koaxialen Polarraumbüschel (Π_k) bilden also ein Kegelbüschel 2. Grades, das durch die drei mit den Achsen parallelen Geraden und die den Mittelpunkt enthaltende Gerade dieses Punktes bestimmt ist, da diese vier Geraden die Grunderzeugenden dieser Kegelbüschel sind. Da im allgemeinen Fall eines tetraedralen Strahlkomplexbüschels derartige vier Grunderzeugende die endlichen Scheitel des gemeinsamen Haupttetraeders enthalten, sehen wir, dass es sich in unserem Fall wirklich um einen speziellen Fall eines tetraedralen Strahlkomplexbüschels handelt. Die Tatsache, dass die ∞^3 im allgemeinen Fall den Raumpunkten auf die vorher beschriebene Weise zugeordneten und als Scheitel sie enthaltenden Komplexkegelbüschel 2. Grades alle untereinander projektiv zugeordnet sind, ([1] S. 253), kann auch in unserem koaxialen Fall folgenderweise ausgeführt und bewiesen werden: Es sei durch ein koaxiales Flächebüschel Π_k 2. Grades ein koaxiales Polarraumbüschel (Π_k) des Inzidenzflächenbüschels Π_k bestimmt, dessen polaren Räume keinen gemeinsamen Achsenkomplex haben. Die einem Raumpunkt P zugeordneten Polarebenen in diesem Polarraumbüschel (Π_k) bilden, wie bekannt, ein Ebenenbüschel, dessen Achse mit p bezeichnet sei. Alle derartigen den Raumpunkten P zugeordneten Achsen bilden den bekannten, diesem Polarraumbüschel (Π_k) zugeordneten, quadratischen tetraedralen Komplex (TK). Man betrachte zuerst eine beliebige Gerade g des Punktes P. Die dieser Geraden g in den polaren Räumen des koaxialen Büschels (Π_k) konjugiert zugeordneten Geraden $\bar{g}$ bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem E_1 einer Regelfläche 2. Grades. Die Erzeugenden des zweiten Systems E_2 dieser Regelfläche sind die den Punkten

P_n der Geraden g zugeordneten Geraden p_n in dem (TK)-Komplex dieses Polarraumbüschels (Π_k) ([8] S. 28).

Man wähle in diesem Büschel (Π_k) vier beliebige polare Räume (Π_1), (Π_2), (Π_3) und (Π_4). Der Geraden g sind in diesen vier polaren Räumen vier Gerade $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, $\bar{g}_4$, konjugiert zugeordnet. Diese vier Geraden schneiden, als Erzeugende des Systems E_1, alle Erzeugende p_n des Systems E_2 in Punktquadrupeln, deren gleichnamige Doppelverhältnisse den gleichen Wert haben (eine Eigenschaft der Regelflächen 2. Grades). Auf Grund einer anderen bekannten Eigenschaft der Regelflächen 2. Grades wird der Wert des Doppelverhältnisses der vier eine Erzeugende p_n des Systems E_2 enthaltenden Ebenen, in denen die Erzeugenden $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, $\bar{g}_4$, des Systems E_1 liegen, dem Werte des gleichnamigen Doppelverhältnisses in den Quadrupeln der Schnittpunkte der Erzeugenden p_n mit dem Erzeugendenquadrupel $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, $\bar{g}_4$ gleich. Die Schnittpunkte der Erzeugenden p_n des Systems E_2 mit den Erzeugenden g_1, g_2, g_3, g_4 sind, wie bekannt, die Berührungspunkte der erwähnten vier Ebenen der Geraden p_n auf der eben beschriebenen Regelfläche 2. Grades mit den Erzeugendensystemen E_1 und E_2. Also, die den Punktquadrupeln der Geraden g in den vier polaren Räumen (Π_1), (Π_2), (Π_3), (Π_4) des Polarraumbüschels (Π_k) zugeordneten Polarebenen bilden Ebenenquadrupel mit gleichnamigen gleichwertigen Doppelverhältnissen. Da jeder Punkt des Raumes auf einer Geraden g des Punktes P liegt, folgt offensichtlich, dass für die allen Raumpunkten durch die polaren Räume (Π_1), (Π_2), (Π_3), (Π_4) zugeordneten Polarebenenquadrupel die gleichnamigen Doppelverhältnisse denselben Wert haben, der dem Werte des Doppelverhältnisses der in den polaren Räumen (Π_1), (Π_2), (Π_3), (Π_4) dem Pol P zugeordneten Polarebenen gleich ist.

Auf Grund der Tatsache, dass der einem Raumpunkt P im Achsenkomplex eines polaren Raumes zugeordnete Strahl die diesen Punkt enthaltende Normale der diesem Punkt zugeordneten Polarebene ist, folgt, dass die einem Raumpunkt in den Achsenkomplexen eines Polarraumbüschels zugeordneten Strahlen ein Strahlbüschel mit dem Scheitel P bilden, dessen Ebene auf dem dem Punkt P zugeordneten Strahl p im (TK)-Komplex dieses Polarraumbüschels senkrecht steht ([5]). Die Ebenen des Strahles p sind, wie bekannt, Polarebenen des Pols P in den polaren Räumen des erwähnten Polarraumbüschels. Dieses Strahlbüschel (P) des Punktes P und das diesem Punkt zugeordnete Polarebenenbüschel mit der Achse p sind, wegen der senkrechten Lage der zugeordneten Elementepaare, offensichtlich projektiv zugeordnet. Auf Grund unserer oben hergeleiteten Eigenschaft eines koaxialen Polarraumbüschels folgt weiterhin, dass alle derartigen allen ∞^3 Raumpunkten P_n zugeordneten Strahlbüschel (P_n), die durch die diesen Punkten zugeordneten Strahlen in den Achsenkomplexen dieses Polarraumbüschels gebildet werden, untereinander projektiv zugeordnet sind, wenn wir in diesen Büscheln die Strahlen desselben Achsenkomplexes einander eineindeutig zuordnen.

Die einen Raumpunkt P als Scheitel enthaltenden gleichseitigen Komplexstrahlkegel 2. Grades der Achsenkomplexe unseres koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) bilden, wie wir vorher sahen, ein Kegelbüschel 2. Grades mit vier Grunderzeugenden, von denen eine den Mittelpunkt dieses Polarraumbüschels enthält, und die drei anderen mit den Achsen dieses Polarraumbüschels im Raum parallel liegen. Jeder dieser Kegelbüschel 2. Grades schneidet, wie bekannt, die seinen Scheitel P_n zugeordnete eben erwähnte Ebene $\pi \perp p$ des diesem Punkt zugeordneten Achsenkomplexbüschels (P_n) in einem involutorischen Strahlbüschel, also in zwei kollokalen involutorisch zugeordneten projektiven Strahlbüscheln, von denen eines aus denjenigen Strahlen des durch das Polarraumbüschel (Π_k) bestimmten Achsenkomplexbüschels besteht, die dem Punkt P_n in diesem Achsenkomplexbüschel zugeordnet sind. Auf Grund der vorher ausgeführten Tatsache, dass alle den Raumpunkten P_n zugeordneten Achsenkomplexbüschel (Pn) untereinander auf die beschriebene Weise projektiv zugeordnet sind, folgt also ferner, dass auch die allen Raumpunkten P_n zugeordneten Achsenkomplexbüschel 2. Grades untereinander projektiv zugeordnet sind. Bilden also die Achsenkomplexe der vier vorher erwähnten polaren Räume (Π_1), (Π_2), (Π_3), (Π_4) in einem Raumpunkt vier Komplexkegel 2. Grades, die einen harmonischen Kegelwurf bilden, so bilden einen derartigen harmonischen Kegelwurf auch die allen anderen Raumpunkten zugeordneten Achsenkomplexkegel der durch diese vier polaren Räume (Π_1), (Π_2), (Π_3), (Π_4) bestimmten Achsenkomplexe.

Jeder tetraedrale Strahlenkomplex ist, wie bekannt, durch das Haupttetraeder und einen Strahl, oder durch dieses Haupttetraeder und seine charakteristische Konstante bestimmt. Dasselbe gilt offenbar auch für den Achsenkomplex jedes polaren Raumes, da dieser, wie schon erwähnt, als ein Spezialfall des gewähnlichen quadratischen tetraedralen Strahlenkomplexes betrachtet werden kann.

Die charakteristische Konstante eines Achsenkomplexes ist gleich dem Werte eines Doppelverhältnisses derjenigen vier einen Strahl dieses Komplexes enthaltenden Ebenen, von denen drei mit den Achsen des polaren Raumes dieses Achsenkomplexes parallel liegen, und die vierte den Mittelpunkt dieses polaren Raumes enthält. Wird diese charakteristische Konstante als Parameter angenommen, dann wird durch jeden Wert dieses Parameters ein Achsenkomplex in dem Achsenkomplexbüschel unseres koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) bestimmt. Betrachtet man jetzt noch ein zweites koaxiales Polarraumbüschel (Π_k^1), resp. Achsenkomplexbüschel, dann wird durch denselben Parameterwert auch in diesem Polarraumbüschel (Π_k^1) ein polarer Raum, resp. sein Achsenkomplex, bestimmt. Werden in einem Büschel tetraedraler Komplexe vier beliebige tetraedrale Strahlkomplexe angenommen, dann ist der Wert eines jeden durch die vier charakteristischen Konstanten dieser Komplexe zusammengesetzten Doppelverhältnisses dem Werte des gleichnamigen Doppelverhältnisses der vier in diesen Komplexen jedem Raumpunkt zugeordneten Komplexstrahlkegel gleich ([1] S. 236). Offenbar gilt dies auch in unserem koaxialen Polarraumbüschel, resp. in seinem Achsenkomplexbüschel. Werden also in den Achsenkomplexbüscheln zweier koaxialer Polarraumbüschel (Π_k) und (Π_k^1) je drei Achsenkomplexe beliebig gewählt und in diesen zwei Büschel einander eineindeutig zugeordnet, dann kann jedem vierten Achsenkomplex des ersten Achsenkomplexbüschels ein vierter Achsenkomplex in dem zweiten Achsenkomplexbüschel so eineindeutig zugeordnet werden, dass das Doppelverhältnis der vier Achsenkomplexe im ersten Achsenkomplexbüschel dem gliechnamigen Doppelverhältnis der vier Achsenkomplexe im zweiten Achsenkomplexbüschel gleich ist. Zwei auf diese Weise eineindeutig zugeordnete Achsenkomplexbüschel werden wir als zwei projektiv zugeordnete Achsenkomplexbüschel betrachten, ebenso wie es bei einer derartigen Zuordnung zweiter allgemeiner tetraedraler Strahlkomplexbüschel der Fall ist. Es ist klar, dass jede zwei koaxiale Polarraumbüschel, mit nicht gemeinsamen Achsenkomplexen, auf diese Weise projektiv zugeordnet werden können.

Zwei Strahlkomplexe n-ten Grades haben immer eine Strahlkongruenz $2n$-ten Grades gemeinsam. Zwei Achsenkomplexe 2. Grades in jedem unserer Achsenkomplexbüschel eines koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) haben diejenige Strahlkongruenz 4. Grades gemeinsam, die durch die vier Grunderzeugenden des Komplexstrahlkegelbüschels 2. Grades in jedem Raumpunkt zusammengesetzt ist. Da sich diese Strahlkongruenz 4. Grades in allen Achsenkomplexen des Achsenkomplexbüschels befindet, kann diese Strahlkongruenz als Grundkongruenz dieses Achsenkomplexbüschels betrachtet werden, die, wie wir in unserem koaxialen Fall sahen, in vier Strahlbündel mit einem endlichen, und drei mit unendlich fernen Scheiteln, zerfällt.

Da das Erzeugnis zweier projektiv zugeordneter Strahlkegelbüschel mit gemeinsamem Scheitel ein Strahlkegel 4. Grades ist, folgt, dass das Erzeugnis zweier projektiv zugeordneter Achsenkomplexbüschel ein Strahlkomplex 4. Grades ist.

Auf Grund aller dieser Betrachtungen werden folgende stereometrischen Sätze gelten:

a) *Man nehme im Raum zwei beliebige Punkte* O, O_1 *an, von denen jeder drei aufeinander senkrecht stehende Geraden* x, y, z, *resp.* x_1, y_1, z_1, *mit den uneigentlichen Punkten* X, Y, Z, *resp.* X_1, Y_1, Z_1, *enthält. Alle Geraden* p *des Raumes, für deren Ebenenquadrupel* (pX, pY, pZ, pO), *resp.* (pX_1, pY_1, pZ_1, pO_1) *die Gleichheit der Doppelverhältnisse* $(pX, pY, pZ, pO) = (pX_1, pY_1, pZ_1, pO_1)$ *gilt, bilden einen Strahlkomplex 4. Grades.*

Schneiden die Strahlen dieses Strahlkomplexes die Ebenen (xy), (xz), (yz) *des Punktes* O, *resp. die Ebenen* $(x_1\, y_1)$, $(x_1\, z_1)$, $(y_1\, z_1)$ *des Punktes* O_1, *in Punkttripeln* A, B, C, *resp.* A_1, B_1, C_1, *dann ist für diese zwei Punkttripel auf jedem Strahl dieses Strahlkomplexes die Verhältnisgleichung* $AB : BC = A_1\, B_1 : B_1\, C_1$ *gültig.*

b) *Durch drei im Raum senkrecht stehende Ebenen können alle* ∞^4 *Geraden des Raumes in* ∞^1 *Strahlkomplexe zerlegt werden, die 2. Grades sind, so dass die Strahlen jedes dieser Komplexe diese drei Ebenen in Punkttripeln mit gleichnamigen Verhältnissen desselben Wertes schneiden (ein Achsenkomplexbüschel).*

Auf analoge Weise können diese stereometrischen Sätze auch für diejenigen Fälle bewiesen werden, wo die Geraden x, y, z und x_1, y_1, z_1, resp. die drei senkrecht stehenden Ebenen, ganz beliebig angenommen sind. Diese Sätze werden bei den Betrachtungen der konzentrisceh polaren Räume in Erscheinung treten.

Wie bekannt, bilden die einem Raumpunkt P in einem Polarraumbüschel zugeordneten Polarebenen ein Ebenenbüschel $[p]$, dessen Achse wir schon vorher mit p bezeichnet haben. Die derartig allen Raumpunkten P_n zugeordneten Achsen p_n bilden den bekannten quadratischen tetraedralen Komplex, für welchen das gemeinsame Polartetraeder des Polarraumbüschels das Haupttetraeder ist. Im Falle unseres koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) wird, wie wir sahen, dieses Haupttetraeder durch die drei Symmetrieebenen und durch die unendlich ferne Ebene gebildet. Diesen speziellen quadratischen tetraedralen Komplex des koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) haben wir schon mit (TK) bezeichnet. Das dem koaxialen Polarraumbüschel zugeordnete Achsenkomplexbüschel sei mit (O_n) bezeichnet. Das durch die drei Symmetrieebenen und durch die unendlich ferne Ebene gebildetes Tetraeder soll als Axialtetraeder des koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) bezeichnet werden.

Jedem polaren Raum des Büschels (Π_k) ist ein Achsenkomplex des Büschels (O_n) zugeordnet, und in den Achsenkomplexen des Büschels (O_n) sind alle ∞^4 Geraden des Raumes umfasst.

Wie vorher erwähnt, gehört allen Achsenkomplexen des Büschels (O_n) das Axialtetraeder des Polarraumbüschels (Π_k) als gemeinsames Haupttetraeder an. Nimmt man die charakteristische Konstante dieser Achsenkomplexe als Parameter, dann ist, wie wir vorher sahen, durch jeden Wert dieses Parameters ein Achsenkomplex des Büschels (O_n) bestimmt. Da aber das Axialtetraeder des Polarraumbüschels (Π_k) das gemeinsame Polartetraeder aller polaren Räume des Büschels (Π_k) ist, also auch das Haupttetraeder des dem Büschel (Π_k) zugeordneten quadratischen tetraedralen Komplexes (TK) ist, gehört dieser (TK)-Strahlkomplex auch dem Achsenkomplexbüschel (O_n), als einem seiner Komplexe, an. Diesen (TK)-Achsenkomplex des Achsenkomplexbüschels (O_n) werden wir jetzt als besonderen Strahlkomplex des dem koaxialen Polarraumbüschel (Π_k) zugeordneten Büschels (O_n) betrachten. In jedem koaxialen Polarraumbüschel (Π_k), in dessen polaren Räumen keine zwei einen gemeinsamen Achsenkomplex haben, besteht immer ein polarer Raum, dessen Achsenkomplex mit dem diesem Polarraumbüschel (Π_k) zugeordneten (TK)-Komplex identisch ist. Diese Eigenschaft eines koaxialen Polarraumbüschels kann durch folgenden Satz ausgesprochen werden:

In jedem Büschel koaxialer polarer Räume, die keinen gemeinsamen Achsenkomplex haben, befindet sich immer ein derartiger besonderer Polarraum, dessen zugeordneter Achsenkomplex durch diejenigen Geraden des Raumes gebildet wird, die die Achsen der den Raumpunkten in den polaren Räumen dieses koaxialen Polarraumbüschels zugeordneten Polarebenenbüschel sind.

Der einem Raumpunkt in einem solchen besonderen Achsenkomplex augeordnete Strahl ist selbstverständlich nicht derselbe, der diesen Punkt in diesem Komplex als dem (TK)-Komplex zugeordnet ist.

Eine der bekanntesten Eigenschaften des quadratischen tetraedralen Strahlkomplexes lautet: Das gleichnamige Doppelverhältnis der Schnittpunkte der Strahlen eines tetraedralen Strahlkomplexes mit den Seitenebenen seines Haupttetraeders ist konstant und gleich dem Doppelverhältnis der diese Strahlen und die gegenüberliegenden Scheitelpunkte dieses Haupttetraeders enthaltenden Ebenen. Der konstante Wert dieser Doppelverhältnisse heisst, wie bekannt, die charakteristische Konstante dieses Strahlkomplexes.

Da in einem Büschel polarer Räume die Berührungsgeraden der Grundkurve 4. Ordnung I. Art des Inzidenzflächenbüschels 2. Grades dieses Polarraumbüschels auch Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Strahlkomplexes sind, folgt also in unserem koaxialen Fall, dass die charakteristische Konstante unseres besonderen Achsenkomplexes (TK) dem Werte eines Verhältnisses der drei Schnittpunkte der Berührungsgeraden der erwähnten Grundkurve mit den Symmetrieebenen seines koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) gleich ist. Auf Grund der bekannten Eigenschaft eines tetraedralen Strahlkomplexes folgt weiter, dass dieser Wert dem Werte des Doppelverhältnisses derjenigen vier, jeden Strahl dieses besonderen Achsenkomplexes enthaltenden Ebenen gleich ist, die die Scheitel des Axialtetraeders des Büschels (Π_k) enthalten. Die charakteristische Konstante des besonderen Achsenkomplexes eines koaxialen Polarraumbüschels (Π_k) ist also auch dem gemeinsamen Werte des Doppelverhältnisses derjenigen Ebenenquadrupel aller Berührungsgeraden der Grundkurve 4. Ordnung I. Art des Inzidenzflächenbüschels Π_k gleich, die den Mittelpunkt und die unendlich fernen Punkte der Achsen des Büschels (Π_k) enthalten. Auf Grund aller dieser Betrachtungen kann auch folgender Satz ausgesprochen werden:

Der innerhalb des Achsenkomplexbüschels (O_n) *eines koaxialen Polarraumbüschels* (Π_k) *sich befindende besondere Achsenkomplex ist in dem Büschel* (O_n) *durch diejenige charakteristische Konstante bestimmt, deren Wert dem Werte eines Doppelverhältnisses derjenigen vier je eine Berührungsgerade der Grundkurve des dem Büschel* (Π_k) *zugeordneten Inzidenzflächenbüschels* Π_k *gleich ist, von denen eine den Mittelpunkt und die drei anderen die unendlich fernen Punkte der Achsen des Büschels* (Π_k)*, resp.* Π_k*, enthalten.*

Zum Achsenkomplex eines polaren Raumes gehören als Komplexstrahlen, wie bekannt, auch die Normalen der Inzidenzflächen dieses polaren Raumes. Dies gilt offenbar auch für den Achsenkomplex des besonderen polaren Raumes innerhalb unseres koaxialen Polarraumbüschels (Π_k), zu dem auch die Berührungsgeraden der dreifach symmetrischen Grundkurve des Inzidenzflächenbüschels Π_k als Komplexstrahlen gehören. Es gilt also auch folgender Satz:

Innerhalb eines koaxialen Polarraumbüschels, resp. innerhalb seines Achsenkomplexbüschels, besteht immer ein polarer Raum mit einem Achsenkomplex, dem die Berührungsgeraden der dreifach symmetrischen Grundkurve 4. Ordnung I. Art des Inzidenzflächenbüschels 2. Grades dieses Polarraumbüschels als Komplexstrahlen angehören.

Im Zusammenhang mit diesem Satz muss noch folgendes erwähnt werden: Die einen Punkt P in einem polaren Raum enthaltenden Berührungsebenen der Inzidenzfläche dieses polaren Raumes hüllen einen Kegel 2. Grades ein, dessen drei Achsen Strahlen des diesem polaren Raum zugeordneten Achsenkomplexes sind ([7] S. 216). Wird der Punkt P auf der Oberfläche der Inzidenzfläche angenommen, artet dieser Kegel in die doppeldeutige Berührungsebene dieser Inzidenzfläche in diesem Berührungspunkt P aus, und die Erzeugenden dieses Berührungskegels gehen in die doppeldeutigen Berührungsgeraden dieser Fläche in diesem Berührungspunkt P über. Von den drei Achsen, also Achsenkomplexstrahlen, dieses zerfallenen Kegels, fällt eine in die Normale der Inzidenzfläche im Punkt P, und die zwei anderen in das senkrechte Paar der konjugiert zugeordneten Berührungsgeraden dieser Fläche in dem Berührungspunkt P. In jedem Punkt der Inzidenzfläche berühren zwei derartige Berührungsgeraden diese Fläche. Alle derartigen Berührungsgeraden sind Strahlen des diesem Polarraum zugeordneten Achsenkomplexes und bilden in diesem Komplex die Kongruenz derjenigen seiner Strahlen, die die Inzidenzfläche dieses Polarraumes berühren. Diejenigen dieser Kongruenzen, deren Strahlen die Grundkurve unseres koaxialen Polarraumbüschels berühren, gehört dem Achsenkomplex des besonderen Polarraumes in diesem Polarraumbüschel an.

Da die Inzidenzflächen der polaren Räume eines koaxialen Polarraumbüschels ein koaxiales Flächenbüschel 2. Grades bilden.

also alle Flächen dieses Büschels drei gemeinsame Symmetrieebenen haben, ist offenbar auch die Grundkurve dieses Inzidenzflächenbüschels dreifach symmetrisch. Auf Grund dieser Tatsache, wie auch auf Grund der Tatsache, dass die Normalen einer Fläche 2. Grades Strahlen des dieser Fläche zugeordneten Achsenkomplexes sind, können die Resultate unserer Betrachtungen auch in der Form des folgenden Satzes aussgesprochen werden.

Jede dreifach symmetrische Raumkurve 4. Ordnung I. Art enthält eine Fläche 2. Grades, deren Normalen diese drei Symmetrieebenen in Punkttripeln schneiden, deren ein Verhältnis dem gleichnamigen Verhältnis der Schnittpunkte der Berührungsgeraden dieser Raumkurve mit den drei Symmetrieebene gleich ist.

2. *Über die vier Strahlkomplexe des koaxialen Polarraumbüschels.* Da durch die drei Symmetrieebenen des koaxialen Polarraumbüschels alle Inzidenzflächen dieses Büschels, und dadurch auch die Grundkurve 4. Ordnung I. Art dieses Inzidenzflächenbüschels, dreifach symmetrisch sind, bekommen die vier erwähnten Strahlkomplexe neue spezielle Eigenschaften, die durch diese dreifache Symmetrie entstanden sind.

Wie bekannt, enthalten die den Punkten einer Seitenebene des gemeinsamen Polartetraeders eines Polarraumbüschels zugeordneten Strahlen, in dem diesem Büschel zugeordneten tetraedralen Komplex, den dieser Seitenebene gegenüberliegenden Scheitel dieses Tetraeders. Auf Grund dessen gilt für das koaxiale Polarraumbüschel, mit dem vorher beschriebenen Axialtetraeder als gemeinsamen Polartetraeder, die Tatsache, dass alle mit den Achsen des koaxialen Polarraumbüschels parallelen Geraden Strahlen des diesem Büschel zugeordneten tetraedralen Strahlenkomplexes sind. Da aber die einem Raumpunkt zugeordneten Strahlen in dem einem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen und Majcenschen Komplex parallel sind, gilt offenbar folgender Satz:

Alle Geraden des Raumes, die mit den Achsen eines koaxialen Polarraumbüschels im Raum parallel sind, sind Strahlen des diesem Büschel zugeordneten Majcenschen kubischen Komplexes, die ihren Schnittpunkten mit den auf sie senkrecht stehenden Symmetrieebenen zugeordnet sind.

Im Fall eines allgemeinen Polarraumbüschels sind die einem Scheitel des gemeinsamen Polartetraeders enthaltenden Strahlen des diesem Büschel zugeordneten Majcenschen Komplexes mit der diesem Scheitel gegenüber liegenden Seitenebene parallel. Sie bilden also ein Strahlbüschel. Da aber in unserem koaxialen Fall der Mittelpunkt des Polarraumbüschels ein Scheitel des gemeinsamen Polartetraeders (Axialtetraeders) ist, dessen gegenüberliegende Seitenebene die unendlich ferne Ebene ist, und diese mit jeder endlichen Ebene »parallel« im Raum liegt, folgt, dass alle Geraden des Mittelpunktes des koaxialen Polarraumbüschels auch Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen Komplexes sind.

Auf Grund dieser Eigenschaft des koaxialen Polarraumbüschels folgt ferner, dass die den Punkten einer Symmetrieebene zugeordneten Strahlen in dem diesem Büschel zugeordneten Komplex der kürzesten Tangentialwege in dieser Symmetrieebene liegen, und dass dasselbe auch für den Komplex der Normalen der Inzidenzflächen dieses koaxialen Polarraumbüschels gilt.

Im Zusammenhang mit der dreifachen Symmetrie treten einige Eigenschaften des koaxialen Polarraumbüschels in Erscheinung, die einigen Eigenschaften eines allgemeinen Polarraumbüschels analog sind, in denen anstatt der harmonischen Punkt — Geraden — und Ebenenquadrupel die Symmetrie auftritt. Z. B. Jedem Raumpunkt P_1 sind symmetrisch, in den acht durch die drei Symmetrieebenen gebildeten Oktanten, sieben andere Raumpunkte P_{2-8} zugeordnet, die offensichtlich mit dem Punkt P_1 eine assoziierte Punktraumgruppe bilden. Die Berührungsebenen der Inzidenzflächen in diesen Punkten, die diesen Inzidenzflächen angehören, bilden als Seitenflächen ein mit dem Polarraumbüschel koaxiales Oktaeder. Die diesen Punkten einer derartigen assoziierten Gruppe zugeordneten Strahlen in dem diesem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen (*TK*)-Komplex, im Majcenschen kubischen (*MK*)-Komplex, in dem Komplex der kürzesten Tangentialwege (*RK*) und in dem Normalenkomplex (*NK*), bilden in jedem dieser dreifach symmetrischen Komplexe ein Geradenoktupel, in welchem jede Gerade durch drei seiner anderen Geraden geschnitten wird (in ihren Schnittpunkten mit den drei Symmetrieebenen). Der einem Raumpunkt P_1 derartig zugeordnete Geradenoktupel des (*MK*)- und des (*RK*)-Komplexes liegen auf den Seitenflächen des erwähnten Berührungsoktaeders, und die die Punkte P_{1-8} enthaltenden Geraden dieser zwei Geradenoktupel schneiden sich in diesen Punkten rechtwinklig, usw.

3. *Über das Bündel polarer Räume.* So wie durch zwei Flächen 2. Grades ein Flächenbüschel derartiger Flächen bestimmt ist, und weiterhin alle diese Flächen die Inzidenzflächen eines Polarraumbüschels sind, wird durch drei Flächen 2. Grades, die sich nicht in einem Büschel befinden, ein Bündel derartiger Flächen bestimmt. Nimmt man diese Flächen als Inzidenzflächen der polaren Räume an, dann ist durch derartige drei Flächen ein Polarraumbündel gegeben. Sind diese drei Flächen 2. Grades koaxial, dann wird durch diese drei Flächen ein Flächenbündel 2. Grades, resp. ein Polarraumbündel koaxialer polarer Räume bestimmt. In unseren weiteren Betrachtungen werden diese drei Flächen 2. Grades nur unter der Bedingung angenommen, dass sie sich nicht nur nicht in einem Büschel befinden, sondern auch keine zwei von ihnen homothetisch sind. Drei derartige im Raum sich befindende Flächen 2. Grades haben acht assoziierte Punkte gemeinsam, die Grund-

punkte des durch diese drei Flächen bestimmten Inzidenzflächenbündels, resp. seines Polarraumbündels, sind. In unserem koaxialen dreifach symmetrischen Fall sind diese acht assoziierten Punkte die Scheitel eines rechtwinkligen regelmässigen Parallelepipedes, dessen drei Symmetrieebenen die des Inzidenzflächenbündels sind. Ein derartiges koaxiales Polarraumbündel und sein Inzidenzflächenbündel bezeichnen wir mit (Π_k^2), resp. Π_k^2. Da die drei Symmetrieebenen allen ∞^2 Inzidenzflächen 2. Grades des Polarraumbündels (Π_k^2) gemeinsam sind, bilden diese drei Ebenen mit der unendlich fernen Ebene das den polaren Räumen des Bündels (Π_k^2) gemeinsame Polartetraeder. Ein koaxiales Polarraumbündel (Π_k^2) ist also ein spezieller Fall des Polarraumbündels mit gemeinsamem Polartetraeder ([8] S. 233). Wegen der dreifachen Symmetrie der Bündel (Π_k^2) und Π_k^2 sind die Kanten des rechtwinkligen regelmässigen Grundpunktparallelepipedes mit den Achsen dieser Bündel parallel, und seine Diagonalen enthalten seinen Mittelpunkt. Je vier der zwölf Kanten dieses Parallelepipedes sind mit jeder Achse dieses Bündels parallel, resp. enthalten deren unendlich fernen Punkt.

In der Arbeit »Ein Beitrag zum F^2-Bündel mit Polartetraeder« wurde ausgeführt, dass ein derartiges Bündel in ∞^1 Büschel so zerlegt werden kann, dass die Grundkurven 4. Ordnung I. Art dieser Büschel eine Fläche 4. Ordnung mit 12 Doppelpunkten und 16 Geraden bilden ([2]). In unserem speziellen koaxialen Fall kann diese Eigenschaft auf folgende Weise gezeigt werden: Man nehme die Geraden, der vier mit einer Achse parallelen Kanten des erwähnten Parallelepipedes, als Grunderzeugende eines Zylinderbüschels 2. Grades an. Die parallelen Geraden eines zweiten derartigen parallelen Kantenquadrupels nehme man als Grunderzeugende eines zweiten Zylinderbüschels 2. Grades an. Die Verbindungsgeraden eines der acht assoziierten Punkte, z. B. K_1, mit dem Mittelpunkt des Bündels (Π_k^2) und mit den unendlich fernen Punkten seiner Achsen, nehme man jetzt als Grunderzeugende eines Kegelbüchels (K_1^n) 2. Grades an, mit in dem Punkt K_1 sich befindenden gemeinsamem Scheitel. Die Erzeugenden eines Kegels dieses Kegelbüschels (K_1^n) sind Strahlen desjenigen speziellen tetraedralen Komplexes, der durch das vorher erwähnte axiale Polartetraeder als Haupttetraeder, und eine Erzeugende dieses Kegels ausser der vier Grunderzeugenden, bestimmt ist.

Alle Ebenenpaare je zweier dieser Grunderzeugenden, die eine Erzeugende dieses Kegels enthalten, bilden, wie bekannt, zwei projektiv zugeordnete Ebenenbüschel, da ihr Erzeugnis dieser Kegel 2. Grades ist. Man betrachte zwei Grunderzeugende dieses Kegelbüschels, die mit zwei Achsen unseres Bündels (Π_k^2) parallel sind. Es sei S ein Kegel dieses Kegelbüschels (K_1^n) mit gemeinsamem Scheitel K_1. Man betrachte nun diejenigen zwei eine Erzeugende des Kegels S enthaltenden Ebenen, von denen die eine eine Grunderzeugende des ersten, und die andere eine Grunderzeugende des zweiten der zwei vorher erwähnten Zylinderbüschel enthält. Beide dieser Grunderzeugenden enthalten selbstverständlich den Scheitel K_1. Durch jede dieser zwei Ebenen ist in deren Zylinderbüschel ein Zylinder bestimmt. Da aber alle derartig zugeordneten Ebenenpaare den Kegel S erzeugen, also projektiv zugeordnet sind, ordnen diese projektiv zugeordneten Berührungsebenenpaare auch die in diesen Zylinderbüscheln durch diese Berührungsebenen bestimmten Zylinder einander projektiv zu. Durch jede Erzeugende des Kegels S sind also in diesen zwei Zylinderbüscheln Zylinderpaare projektiv zugeordnet, die sich in je einer Raumkurve 4. Ordnung I. Art durchdringen, die dreifach symmetrisch ist und die die acht assoziierten Punkte (K_n, $n = 1$—8) enthält. Alle diese ∞^1 durch diese projektiv zugeordneten Zylinderpaare erzeugten Raumkurven bilden eine Fläche 4. Ordnung, die als das Erzeugnis dieser zwei projektiv zugeordneten Zylinderbüschel entstanden ist.

Durch jede dieser ∞^1 Raumkurven 4. Ordnung I. Art ist ein Inzidenzflächenbüschel eines Polarraumbüschels bestimmt, und zu jedem polaren Raum eines dieser Büschel gehört der ihm zugeordnete quadratische Achsenkomplex. Alle diese Achsenkomplexe eines dieser Polarraumbüschel bilden das diesem Büschel zugeordnete Achsenkomplexbüschel, in dem sich, wie wir sahen, auch der diesem Polarraumbüschel zugeordnete tetraedrale Strahlkomplex, als besonderer Achsenkomplex dieses Polarraumbüschels, befindet. Da alle polaren Räume unseres Polarraumbündels koaxial sind, ist also auch das ganze Polarraumbündel dreifach symmetrisch, und dadurch ist auch die vorher erwähnte Fläche 4. Ordnung bezüglich dieser drei Symmetrieebenen dreifach symmetrisch.

Die durch den Kegel S des Kegelbüschels (K_1^n) bestimmte Fläche 4. Ordnung enthält offenbar die acht assoziierten Punkte und die vier Scheitel des gemeinsamen Axialpolartetraeders, von denen drei unendlich fern liegen, wie auch die sechzehn Verbindungsgeraden von je drei dieser Punkte. Durch jeden Kegel S_n des Kegelbüschels (K_1^n) ist eine derartige Fläche 4. Ordnung bestimmt, mit denselben gemeinsamen eben erwähnten zwölf Punkten und sechzehn Geraden. Alle diese Flächen 4. Ordnung bilden also ein Flächenbüschel 4. Ordnung, dessen Grundkurve 16. Ordnung in 16 Geraden zerfallen ist. Unser koaxiales Polarraumbündel (Π_k^2) haben wir also auf diese Weise in koaxiale Polarraumbüschel zerlegt, von denen jedes den ihm zugeordneten tetraedralen Strahlkomplex als seinen besonderen Achsenkomplex enthält.

Der Achsenkomplex eines polaren Raumes ist, wie bekannt, quadratisch. Alle einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Komplexes bilden einen Kegel 2. Grades, auf dem sich die drei diesen Punkt enthaltenden und mit den Achsen dieses Polarraumes parallelen Geraden, wie auch die Verbindungsgerade des Scheitels mit dem Mittelpunkt, als Erzeugende befinden. Da durch ein gemeinsames Haupttetraeder ein Büschel tetraedraler Strahlkomplexe bestimmt ist, in welchen die charakteristische Konstante als Wert eines Parameters betrachtet werden kann ([1] S. 249), und ein Achsenkomplex nur ein Spezialfall eines tetraedralen Komplexes ist, folgt, dass durch die drei Symmetrieebenen unseres koaxialen Polarraumbündels (Π_k^2) auch ein Achsenkomplexbüschel bestimmt ist, dessen gemeinsames Haupttetraeder das vorher erwähnte Axialtetraeder ist. Die einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen der Achsenkomplexe dieses Büschels bilden ein Kegelbüschel 2. Grades, für das die vier eben erwähnten, mit den Achsen parallelen und den Mittelpunkt enthaltenden Strahlen die Grunderzeugenden sind. Da allen polaren Räumen unseres Polarraumbündels (Π_k^2) auf diese Weise nur ∞^1 Achsenkomplexe zugeordnet sind, folgt, dass je einem dieser Achsenkomplexe in dem Bündel (Π_k^2) ∞^1 polare Räume zugeordnet sind.

In unseren vorher durchgeführten Betrachtungen haben wir die Zerlegung unseres Polarraumbündels (Π_k^2) in ∞^1 Polarraumbüschel, mittels der Erzeugenden eines Kegels S des Kegelbüschels (K_1^n), auf die beschriebene Weise durchgeführt, wo als gemeinsamer Scheitel dieses Büschels ein Punkt K_1 der acht assoziierten Grundpunkte des Bündels (Π_k^2) angenommen war. Durch eine Erzeugende des Kegels S dieses Kegelbüschels war, wie wir sahen, ein Polarraumbüschel (Π_k) des Polarraumbündels (Π_k^2) bestimmt, da durch diese Erzeugende und durch die acht assoziierten Punkte die Grundkurve 4. Ordnung I. Art des Inzidenzflächenbüschels dieses Polarraumbüschels (Π_k) bestimmt ist. Da aber in jedem Kegel S_n des Büschels (K_1^n), also auch im Kegel S, die den Scheitel K_1 enthaltenden Parallelen mit den Achsen des Bündels (Π_k^2), und seine Verbindungsgerade mit dem Mittelpunkt dieses Bündels, als Erzeugende sich befinden, also Grunderzeugende des Büschels (K_1^n) sind, sind alle Erzeugenden des Kegels S Strahlen eines der erwähnten ∞^1 Achsenkomplexe, die das beschriebene dem Polarraumbündel (Π_k^2) zugeordnete Achsenkomplexbüschel bilden, aber gleichzeitig auch Strahlen eines speziellen tetraedralen Komplexes sind, der durch das Axialtetraeder des Bündels (Π_k^2) bestimmt ist. Dieser spezielle tetraedrale Komplex ist aber, auf Grund unserer Betrachtungen, allen durch die Erzeugenden des Kegels S bestimmten Polarraumbüscheln des Bündels (Π_k^2) zugeordnet. Also, dieser durch die Erzeugenden des Kegels S bestimmte tetraedrale Komplex ist der besondere Achsenkomplex jedes Achsenkomplexbüschels, das je einem der durch die Erzeugenden des Kegels S bestimmten Polarraumbüschel zugeordnet ist. Da aber durch die drei Symmetrieebenen nur ein Achsenkomplexbüschel bestimmt ist, handelt es sich bei allen Polarraumbüscheln des Kegels S, resp. seiner Erzeugenden, immer nur um dasselbe Achsenkomplexbüschel.

Dieselben Betrachtungen können innerhalb des Polarraumbündels (Π_k^2) im Zusammenhang mit jedem Kegel S_n des Kegelbüschels (K_1^n) durchgeführt werden. Durch jeden Kegel S_n dieses

Kegelbüschels wird also nur eine neue Zerlegung des koaxialen Polarraumbündels (Π_k^2) in koaxiale Polarraumbüschel durchgeführt. In jeder derartigen Zerlegung sahen wir aber, dass die Grundkurven der Inzidenzflächenbüschel dieser Polarraumbüschel eine Fläche 4. Ordnung bilden, die die beschriebenen 12 Punkte und 16 Geraden enthalten. Alle derartigen Flächen 4. Ordnung bilden also das schon erwähnte Flächenbüschel 4. Ordnung, dessen Grundkurve 16. Ordnung in 16 Geraden zerfiel. Offenbar ist dieses Flächenbüschel 4. Ordnung auch dreifach symmetrisch.

Jedem Kegel S_n des Kegelbüschels $(K_1{}^n)$, resp. jedem der durch die drei Symmetrieebenen des koaxialen Polarraumbündels (Π_k^2) bestimmten Achsenkomplexe, wenn er als besonderer Achsenkomplex angenommen wird, ist also eine dieser Flächen 4. Ordnung zugeordnet. Alle diese Betrachtungen und Resultate können also durch folgenden Satz ausgesprochen werden:

Wird ein koaxiales Polarraumbündel (Π_k^2), in dem keine zwei Inzidenzflächen homothetisch sind, in ∞^1 derartige Polarraumbüschel zerlegt, dass je einer der ∞^1 durch die drei Symmetrieebenen des Bündels (Π_k^2) bestimmten Achsenkomplexe allen diesen Polarraumbüscheln als tetraedraler Strahlkomplex, resp. als besonderer Achsenkomplex zugeordnet ist, dann bilden die Grundkurven 4. Ordnung dieser Polarraumbüschel eine dreifach symmetrische Fläche 4. Ordnung mit 12 Doppelpunkten und 16 Geraden. Alle derartigen den Achsenkomplexen der drei Symmetrieebenen des Bündels (Π_k^2) zugeordneten Flächen 4. Ordnung bilden ein Flächenbüschel 4. Ordnung, dessen Raumgrundkurve 16. Ordnung in 16 Geraden zerfallen ist, und dessen Flächen 12 gemeinsame Doppelpunkte in den Schnittpunkten dieser Geraden haben.

Wird die charakteristische Konstante der Achsenkomplexe des durch die drei Symmetrieebenen bestimmten Achsenkomplexbüschels als Wert eines Parameters angenommen, dann ist selbstverständlich auch durch jeden Wert dieses Parameters eine Fläche 4. Ordnung in dem erwähnten Flächenbüschel bestimmt. Mittels dieser Eigenschaft könnte offenbar auch eine projektive Zuordnung von zwei koaxialen Polarraumbündeln durchgeführt werden.

Da durch jede Erzeugende des vorher erwähnten Kegels S im Kegelbüschel $(K_1{}^n)$ ein Polarraumbüschel des Bündels (Π_k^2), resp. die Grundkurve 4. Ordnung seines Inzidenzflächenbüschels bestimmt ist, die diese Erzeugende im Punkt K_1 als Berührungsgerade hat, berührt der Kegel S die diesem Kegel zugeordnete Fläche 4. Ordnung in ihrem Doppelpunkt K_1. Offenbar gilt dasselbe für jeden Kegel S_n des Kegelbüschels $(K_1{}^n)$ und die ihm zugeordnete Fläche 4. Ordnung. Was für den Doppelpunkt K_1 aller derartigen Flächen 4. Ordnung gilt, gilt offenbar ebenso auch für die 11 weiteren Doppelpunkte, da wir anstatt des Punktes K_1 je einen der 11 anderen nehmen könnten. Man sieht also, dass die Berührungskegel 2. Grades der Flächen 4. Ordnung in den 12 gemeinsamen Doppelpunkten

Kegelbüschel 2. Grades bilden. In den drei unendlich fernen Doppelpunkten sind es offenbar asymptotische Zylinderbüschel.

Die Tatsache, dass diese 12 Kegelbüschel, wenn die Kegel derselben Fläche einander zugeordnet sind, untereinander projektiv zugeordnet sind, und dass dadurch weitere interessante geometrische Erzeugnisse, als neue Eigenschaften eines koaxialen Polarraumbündels, erzielt werden können, wird eventuell in einer weiteren Arbeit betrachtet werden.

LITERATUR:

[1] *V. Niče,* Die Büschel der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe und ihre projektive Zuordnung, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **314** (1959), 229—262,

[2] *V. Niče,* Ein Beitrag zum F^2-Bündel mit Polartetraeder, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **15** (1960), 179—188,

[3] *V. Niče,* Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlkomplex, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **325** (1962), 107—125,

[4] *V. Niče,* Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **18** (1963), 255—266,

[5] *V. Niče,* Die Achsenkomplexe der in einem Büschel sich befindenden Polarräume, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **19** (1964), 243—254,

[6] *V. Niče,* Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **331** (1965), 145—172,

[7] *Th. Reye,* Die Geometrie der Lage, Abt. II. (1907),

[8] *Th. Reye,* Die Geometrie der Lage, Abt. III. (1910).

(Eingegangen am 4. I 1966.)

Mathematisches Institut der Universität Zagreb

KOAKSIJALNI POLARNI PROSTORI

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Uvod. Dvjema koaksijalnim plohama 2. stupnja određen je pramen takvih koaksijalnih ploha, a uzmemo li sve te plohe kao incidentne plohe polarnih prostora, bit će tako određen pramen koaksijalnih polarnih prostora. Svakim pramenom polarnih prostora određeni su i njemu pridruženi, a) tetraedralni kvadratni kompleks osi pramenova polarnih ravnina pridruženih po jednoj tački prostora kao polu, b) Majcenov kubični kompleks pravaca, koji incidentne plohe diraju neizmjerno daleko, c) kubični kompleks najkraćih dirnih putova između incidentnih ploha i d) kompleks normala incidentnih ploha, koji je 8. stupnja. Jer je nadalje svakim polarnim prostorom određen i njemu pridružen kvadratni osni kompleks, to svaki pramen polarnih prostora ima svoj skup od ∞^1 osnih kompleksa. Svi ovi kompleksi koaksijalnog pramena polarnih prostora promatraju se u ovoj radnji. Na kraju je razmotren i svežanj koaksijalnih polarnih prostora.

1. *Pramen koaksijalnih polarnih prostora.* Iz definicije osnog kompleksa jednog polarnog prostora i iz činjenice da svi polarni prostori koaksijalnog pramena imaju sve tri simetralne ravnine zajedničke, izlazi da osni kompleksi polarnih prostora ovakvog pramena čine pramen osnih kompleksa, dakle pramen specijalnih tetraedralnih kvadratnih kompleksa, sa zajedničkim glavnim tetraedrom. Ovaj je glavni tetraedar sastavljen, kao što znamo, iz simetralnih ravnina i neizmjerno daleke ravnine. Budući da je jednim tetraedrom, kao zajedničkim glavnim tetraedrom, određen pramen tetraedralnih kompleksa, to im se karakteristične konstante mogu uzeti kao vrijednosti jednog parametra. Svaki polarni prostor koaksijalnog pramena ima svoj osni kompleks, a cio koaksijalni pramen tih polarnih prostora ima svoj tetraedralni kompleks, kojemu se glavni tetraedar podudara sa zajedničkim glavnim tetraedrom svih spomenutih osnih kompleksa. Izlazi prema tome, da je taj specijalni tetraedralni kompleks cijelog koaksijalnog pramena polarnih prostora, jedan između onih ∞^1 osnih kompleksa pridruženih polarnim prostorima tog pramena. Mi ćemo ga nazvati izdvojenim osnim kompleksom našeg koaksijalnog pramena polarnih prostora. Lako se može dokazati ovaj stavak:

a) *Karakteristična konstanta izdvojenog osnog kompleksa u koaksijalnom pramenu polarnih prostora jednaka je dvoomjeru onih četiriju ravnina jedne tangente temeljne krivulje pramena incidentnih ploha tog pramena, od kojih su tri usporedne s osima, a četvrta prolazi središtem tog pramena.*

Pomoću činjenice, da su pramenovi stožaca kompleksnih zraka tetraedralnih kompleksa jednog pramena sa zajedničkim glavnim tetraedrom u svim tačkama prostora međusobno projektivno pridruženi, daju se izvesti i dokazati ovi stavci:

b) *Odaberu li se u prostoru dvije tačke O_1, O_2 i svakom od njih postave bilo kako tri međusobno okomita pravca x_1, y_1, z_1, odnosno x_2, y_2, z_2 s neizmjerno dalekim tačkama X_1, Y_1, Z_1, odnosno X_2, Y_2, Z_2, tada svi pravci prostora označeni sa p, za čije ravnine pX_1, pY_1, pZ_1 i pX_2, pY_2, pZ_2 vrijedi $(pX_1\, pY_1\, pZ_1\, pO_1) = (pX_2\, pY_2\, pZ_2\, pO_2)$, čine kompleks 4. stupnja. Sijeku li zrake ovog kompleksa ravnine $(x_1\, y_1)$, $(x_1\, z_1)$, $(y_1\, z_1)$ tačke O_1 i ravnine $(x_2\, y_2)$, $(x_2\, z_2)$, $(y_2\, z_2)$ tačke O_2 u tačkama A_1, B_1, C_1, odnosno A_2, B_2, C_2, tada za ove dvije trojke tačaka na svakoj zraci spomenutog kompleksa vrijedi omjer $A_1 B_1 : B_1 C_1 = A_2 B_2 : B_2 C_2$.*

c) *Pomoću triju međusobno okomitih ravnina može se svih ∞^4 pravaca u prostoru rastaviti u takvih ∞^1 kompleksa, kojih će zrake te tri ravnine probadati u trojkama tačaka, kojih istoimeni dvoomjeri imaju jednaku vrijednost.*

Ovi se stavci očito mogu protegnuti i na međusobno kose pravce i ravnine.

Na temelju određenih osobina pramena osnih kompleksa jednog koaksijalnog pramena polarnih prostora može se izvesti i dokazati i ovaj stavak:

d) *Unutar pramena koaksijalnih polarnih prostora postoji uvijek jedan takav polarni prostor, čijem osnom kompleksu kao zrake pripadaju tangente temeljne krivulje pramena incidentnih ploha tog pramena.*

Osim ovih stavaka može se dokazati i ovaj:

e) *Svakom trostruko simetričnom prostornom krivuljom 4. reda I. vrste može se postaviti takva ploha 2. stupnja, čije će normale u tačkama te krivulje sjeći njene simetralne ravnine u trojkama tačaka, kojih će omjer biti jednak istoimenom omjeru probodišta tangenata te prostorne krivulje u tim tačkama s tim simetralnim ravninama.*

2. *O četirma kompleksima koaksijalnog pramena polarnih prostora.* Iz činjenice da su sve zrake vrhova glavnog tetraedra nekog tetraedralnog kompleksa zrake tog kompleksa, proizlazi činjenica kod koaksijalnog pramena polarnih prostora, da su pravci usporedni s osima tog pramena zrake Majcenovog kompleksa pridruženog tom pramenu. A jer je neizmjerno daleka ravnina »usporedna« sa svakom ravninom prostora, to su i pravci središta tog pramena zrake tog Majcenovog kompleksa. Zrakama usporednim s osima pridružene tačke leže u na njih okomitoj simetralnoj ravnini, a zrakama središta pridruženo je to središte.

Iz trostruke simetrije koaksijalnog pramena polarnih prostora očito proizlazi, da su i sva četiri kompleksa tog pramena također simetrična s obzirom na iste tri ravnine. Odavde se dalje može zaključiti, da je svakom tačkom prostora određeno daljnjih sedam u prostoru, koje s onom prvom čine trostruko simetričnu asociranu grupu. Ovoj asociranoj osmerki tačaka pridružene zrake u svakom od četiriju kompleksa, čine prostorni trostruko simetričan osmerolik, kojega svaka stranica siječe tri ostale (u njihovim probodištima sa simetralnim ravninama). Dirne ravnine incidentnih ploha, ili bolje jedne incidentne plohe, u tačkama takvog osmerolika čine oktaedar, koji je koaksijalan s tim koaksijalnim pramenom polarnih prostora. U pobočnim ravninama tog oktaedra leže njenim diralištima pridružene zrake Majcenovog kompleksa i kompleksa najkraćih dirnih putova tako, da se one u tim tačkama sijeku okomito. Očito je, da bi se pomoću te trostruke simetrije dalo pronaći cio niz i daljnjih osobina našeg koaksijalnog polarnog pramena.

3. *O svežnju koaksijalnih polarnih prostora.* Trima koaksijalnim plohama 2. stupnja, od kojih jedna nije u pramenu drugih dviju, određen je svežanj takvih ploha. Uzmemo li sve te plohe kao incidentne plohe polarnih prostora, tada je tim svežnjem ploha 2.

stupnja određen svežanj koaksijalnih polarnih prostora. Spomenute tri koaksijalne plohe imaju osam zajedničkih tačaka, koje čine asociranu trostruko simetričnu grupu temeljnih tačaka našeg koaksijalnog svežnja polarnih prostora. Tri simetralne ravnine i neizmjerno daleka ravnina čine zajednički polarni tetraedar svih ∞^2 polarnih prostora našeg svežnja, dakle imamo specijalan slučaj svežnja polarnih prostora sa zajedničkim polarnim tetraedrom.

Poznato je, da ovakav svežanj polarnih prostora možemo na ∞^1 načina rastaviti u ∞^1 pramenova polarnih prostora. Temeljne krivulje u ∞^1 pramenova polarnih prostora dobivenih na jedan takav način čine opću plohu s 12 dvostrukih tačaka i 16 pravaca. Dvostruke tačke se nalaze u 8 asociranih temeljnih tačaka i u vrhovima zajedničkog polarnog tetraedra, a pravci su spojnice od po tri između ovih tačaka. Svaki način rastavljanja daje jednu takvu plohu 4. reda s istim dvostrukim tačkama i s istim pravcima. Sve takve plohe 4. reda čine prema tome pramen ploha 4. reda, kojemu se je temeljna krivulja 16. reda raspala u 16 pravaca.

U slučaju našeg koaksijalnog svežnja polarnih prostora sve su takve plohe plohe 4. reda, a prema tome i cijeli njihov pramen, trostruko simetrični. Tri dvostruke tačke nalaze se u tom slučaju neizmjerno daleko.

Trima međusobno okomitim ravninama zadan je pramen od ∞^1 osnih kompleksa, čiju karakterističnu konstantu možemo smatrati vrijednošću jednog parametra. Simetralnim ravninama našeg koaksijalnog svežnja polarnih prostora zadano je dakle također ∞^1 osnih kompleksa, tj. svakom osnom kompleksu pridruženo je ∞^1 polarnih prostora tog svežnja. Temeljne krivulje pramenova incidentnih ploha svih ovih grupa od ∞^1 polarnih prostora, čine očito jednu opisanu plohu 4. reda, koja je određena zapravo vrijednošću parametra karakteristične konstante odabranog osnog kompleksa. Zadamo li dva svežnja koaksijalnih polarnih prostora, mogli bismo ih projektivno pridružiti pomoću iste vrijednosti karakteristične konstante po jednog osnog kompleksa u svakom od tih svežanja, kojim je opet na opisani način određena po jedna spomenuta ploha 4. reda u svakom od njih. Očito je da bismo daljnjim analognim razmatranjima mogli otkriti više daljnjih osobina dvaju ovako pridruženih koaksijalnih svežanja polarnih prostora, ali takva razmatranja nisu predviđena u ovoj radnji.