DIE ACHSENREGELFLÄCHE EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

GEOMETRIJSKO MJESTO OSI PLOHA 2. STUPNJA U JEDNOM PRAMENU TAKVIH PLOHA

Vilko Niče, Zagreb

Sonderabdruck aus
GLASNIK MATEMATIČKI 1 (21) (1966), 215—221

Štamparski zavod „Ognjen Prica" Zagreb, Savska Cesta 31, 1966

GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 1 (21) — No. 2 — 1966.

DIE ACHSENREGELFLÄCHE EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

Vilko Niče, Zagreb

Einführung: Jede der ∞^1 in einem Flächenbüschel 2. Grades sich befindenden Flächen hat drei Achsen, von denen zwei in speziellen Fällen unendlich fern liegen können. Alle diesen Flächen angehörenden Achsen bilden eine stetige eindimensionale Geradenmenge, also eine Regelfläche, deren Grad wir in dieser Arbeit bestimmen werden. Die bekannte Raumkurve 3. Ordnung der Mittelpunkte der Flächen dieses Flächenbüschels wird offenbar die dreifache Kurve der gesuchten Regelfläche sein. In dieser Arbeit werden auch kurz einige Eignschaften und einige spezielle Fälle dieser Regelflächen in Betracht gezogen.

1. *Der Grad der Achsenregelfläche.* Jeder Fläche 2. Grades, resp. dem durch diese Fläche als Inzidenzfläche bestimmten polaren Raum, ist der durch diesen polaren Raum bestimmte Achsenkomplex zugeordnet [2]. Dieser Strahlenkomplex ist, wie bekannt, vom 2. Grade, und die einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen eines derartigen Strahlenkomplexes bilden den bekannten gleichseitigen Komplexkegel 2. Grades, der die unendlich fernen Punkte der Achsen und den Mittelpunkt der Inzidenzfläche dieses polaren Raumes enthält. Die Achsen der in diesem polaren Raum sich befindenden polaren Felder, und die Achsen der in diesem polaren Raum sich befindenden polaren Bündel, gehören auch als Strahlen diesem quadratischen Strahlenkomplex an. Jedem Strahl eines derartigen Komplexes gehört einer seiner Punkte als Pol an, dann ist weiter die diesem Pol zugeordnete Polarebene diesem Strahl zugeordnet, und weiterhin auch der in dieser Ebene sich befindende Fusspunkt des diesem Pol zugeordneten Strahles. Der diesem Pol zugeordnete reziproke Pol, der reziproke Strahl, die reziproke Polarebene und der reziproke Fusspunkt, werden ausser Betracht gelassen, da sie uns in dieser Arbeit nicht nötig sind.

Die Pole der einen Raumpunkt P enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes eines polaren Raumes, die, wie erwähnt, einen gleichseitigen Kegel 2. Grades bilden, bilden eine gleichseitige Raumhyperbel 3. Ordnung auf diesem Kegel, die die unendlich fernen Punkte der Achsen und den Mittelpunkt der Inzidenzfläche enthält.

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

Es sei ein Flächenbüschel Π_n 2. Grades, und das durch Flächen φ_n dieses Büschels als Inzidenzflächen bestimmte Polarraumbüschel (Π_n) gegeben. Jeder Punkt des Raumes ist Scheitel eines gleichseitigen Achsenkomplexkegels in jedem polaren Raum dieses Polarraumbüschels (Π_n), und auf jedem dieser Strahlenkegel befindet sich die beschriebene Raumhyperbel, die aus den diesen Strahlen in ihren polaren Räumen zugeordneten Polen besteht. Die ∞^2 diesen Strahlen eines Raumpunktes P in ihren polaren Räumen zugeordneten Pole liegen auf einer Fläche 3. Ordnung, die mit **F** bezeichnet sei und die durch diese Pole, resp. durch die erwähnten Raumhyperbeln gebildet ist ([1] S. 251). Da in jedem Polarraum unseres Polarraumbüschels (Π_n) die jedem Punkt des Raumes zugeordnete Raumhyperbel der Pole nicht nur auf dem Achsenkomplexkegel dieses Punktes liegt, sondern auch die unendlich fernen Punkte aller drei Achsen dieses polaren Raumes enthält, besteht die unendlich ferne Kurve 3. Ordnung der Fläche **F** aus den unendlich fernen Punkten der Achsen aller Inzidenzflächen des Polarraumbüschels (Π_n). Die gesuchte Achsenregelfläche des Inzidenzflächenbüschels Π_n muss also die unendlich ferne Kurve der Fläche **F** enthalten. Da jede einem Raumpunkt P in einem polaren Raum auf die beschriebene Weise zugeordnete kubische Raumhyperbel auch den Mittelpunkt der Inzidenzfläche dieses polaren Raumes enthält, befindet sich auch der geometrische Ort der Mittelpunkte der Inzidenzflächen des Polarraumbüschels (Π_n) (die bekannte Raumkurve 3. Ordnung) auf der betrachteten einem Raumpunkt P zugeordneten Fläche **F** 3. Ordnung. Diese Raumkurve der Mittelpunkte der Inzidenzflächen des Polarraumbüschels (Π_n) bezeichne man mit k^3. Die unendlich ferne Kurve der dem Raumpunkt P zugeordneten Fläche **F**, die mit u^3 bezeichnet sei, befindet sich offensichtlich auf allen derartigen allen Raumpunkten zugeordneten Flächen **F**, und muss mit der kubischen Raumkurve k^3 die drei unendlich fernen Punkte dieser Raumkurve gemeinsam haben, da sich beide dieser Kurven auf jeder der Flächen **F** befinden. Für unsere Zwecke genügt es nur eine dieser Flächen **F** in Betracht zu ziehen.

Die unendlich ferne Kurve der gesuchten Achsenregelfläche, die, wie wir sahen, 3-ter Ordnung ist, kann auch folgenderweise erhalten und betrachtet werden: Die Achsen einer Fläche 2. Grades sind die Verbindungsgeraden des Mittelpunktes dieser Fläche mit den Scheiteln des gemeinsamen unendlich fernen Polardreiecks des unendlich fernen Kegelschnittes dieser Fläche und des absoluten Kegelschnittes. Jede Fläche des Inzidenzflächenbüschels Π_n hat ein derartiges unendlich fernes Polardreieck, das der unendlich fernen Schnittkurve 2. Grades dieser Fläche zugeordnet ist. Durch das unendlich ferne Kegelschnittbüschel des Inzidenzflächenbüschels Π_n und durch den absoluten Kegelschnitt ist so ein spezielles unendlich fernes Kegelschnittnetz gegeben, in dem die Scheitel der gemeinsamen Polardreiecke derjenigen seiner Kegelschnittbüschel, von denen jeder den absoluten Kegelschnitt enthält, die eben erwähnte Kurve u^3 bilden. Die Punkte dieser Kurve sind die unendlich fernen Punkte der Achsen der Inzidenzflächen φ_n des Polarraumbüschels (Π_n), und diese Kurve u^3 ist in diesem speziellen Kegelschnittnetz der Jacobischen Kurve eines gewöhnlichen Kegelschnitnetzes analog.

Jeder Punkt der Raumkurve k^3 enthält offenbar drei Erzeugende der gesuchten Regelfläche, während jeder Punkt der unendlich fernen Kurve u^3 nur eine Erzeugende dieser Regelfläche enthalten kann. Diese Tatsache kann folgendermassen bewiesen werden: Man nehme an, dass der Mittelpunkt einer Inzidenzfläche φ_n des Büschels Π_n auf der Raumkurve k^3, samt seiner drei Achsen, sich stetig durch das Büschel Π_n bewegt. Jede dieser drei Achsen beschreibt in jedem Zeitabschnitt einen stetigen Bogen der Kurve u^3, und durch alle derartige Bogen wird diese Kurve gebildet. Die drei unendlich fernen Achsenpunkte jeder der Inzidenzflächen φ_n bilden also auf der Kurve u^3 eine involutorische kubische Punktreihe, in der jedem Punkt A_1 dieser Kurve u^3 zwei andere ihre Punkte A_2, A_3 einzweideutig so zugeordnet sind $(A_1 - A_2 A_3)$, dass dasselbe auch für die zwei anderen möglichen Anordnungen, $(A_2 - A_1 A_3)$ und $(A_3 - A_1 A_2)$, gültig ist. Es könnte hier nur noch die Frage gestellt werden, ob einen Punkt der Kurve u^3 eine, oder mehrere Achsen der Inzidenzflächen φ_n enthalten können. Man nehme an, dass den Punkt A_1 der Kurve u^3 je eine Achse zweier Inzidenzflächen φ_1, φ_2 enthält. Von den anderen zwei Achsen dieser Flächen φ_1, φ_1 müssten wegen der beschriebenen involutorischen Zuordnung je zwei von ihnen die Punkte A_2, A_3 enthalten. Also man hätte zwei Punkttripel $A_1 A_2 A_3$ und $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, bei denen die Identitäten $A_1 \equiv \bar{A}_1$, $A_2 \equiv \bar{A}_2$, $A_3 \equiv \bar{A}_3$ gelten müssten. Dies aber hätte zur Folge: Das Dreieck $A_1 A_2 A_3 \equiv \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ wäre ein gemeinsames Polardreieck des absoluten Kegelschnittes und der unendlich fernen Kurve der Fläche φ_1, und des absoluten Kegelschnittes und der unendlich fernen Kurve der Fläche φ_2. Also das Dreieck, $A_1 A_2 A_3$ wäre das gemeinsame Polardreieck aller unendlich fernen Kurven der Flächen φ_n, die ein unendlich fernes Kurvenbüschel 2. Grades bilden, das durch die unendlich ferne Kurven der Flächen φ_1, φ_2 gebildet wird, und in dem sich auch der absolute Kegelschnitt befinden müsste. Dies aber ist unmöglich, da sich in einem derartigen Fall in dem Inzidenzflächenbüschel Π_n eine Kugel befinden müsste, was bei unserem nichtspeziellen Flächenbüschel Π_n 2. Grades nicht möglich ist. Also jeden Punkt der unendlich fernen Kurve u^3 3. Ordnung enthält nur eine Achse einer Inzidenfläche des Polarraumbüschels (Π_n).

Wählt man auf der kubischen Raumkurve k^3 einen Mittelpunkt O, und eine Achse a der diesem Mittelpunkt zugeordneten Inzidenzfläche φ_1, und lässt den Mittelpunkt O sich, wie wir vorher sahen, längs der Raumkurve k^3 bewegen, während die diesem Mittelpunkt

O zugeordnete Fläche φ_1 alle Flächen des Büschels Π_n durchläuft, beschreibt die gewählte Achse a also nur einen Teil (1/3) der gesuchten Achsenregelfläche, während der Punkt O die ganze Raumkurve k^3 durchläuft, da der unendlich ferne Punkt der Achse a in der unendlich fernen Ebene nur einen Teilbogen der Kurve u^3 beschreibt, so dass diese so durch die drei Achsen entstandenen Teilbogen zusammen die Kurve u^3 bilden. Es folgt also, dass jeder Punkt der Kurve u^3, ausser ihren drei Schnittpunkten mit der Raumkurve k^3, nur eine Achse, also auch nur eine Erzeugende der gesuchten Regelfläche enthält. Man sieht also, dass die Erzeugenden der gesuchten Regelfläche die unendlich ferne Kurve u^3 und die Raumkurve k^3 in Punktreihen schneiden, die eindreideutig zugeordnet sind. Wenn die Träger u^3, k^3 dieser zwei eindreideutig zugeordneten Punktreihen keine gemeinsamen Punkt hätten, wäre das Erzeugnis dieser zwei Punktreihen eine Regelfläche $(1 \cdot 3 + 3 \cdot 3) = 12$ — ten Grades. Da aber die Kurven u^3 und k^3 auf der beschriebenen Fläche **F** 3. Ordnung liegen, befinden sich die drei unendlich fernen Punkte A^n, B^n, C^n der Raumkurve k^3, von denen auch zwei konjugiert imaginär sein können, auf der unendlich fernen Kurve u^3 dieser Fläche. Da diese drei unendlich fernen Punkte A^n, B^n, C^n in den Punktreihen der Kurven u^3, k^3 sich selbst zugeordnet sind, zerfällt die erwähnte Regelfläche 12. Grades in diejenigen drei Berührungsgeradenbüschel (A^n), (B^n), (C^n), deren Strahlen (in jedem dieser Büschel parallel) die Fläche **F** in den unendlich fernen Punkten A^n, B^n, C^n berühren, und in eine Regelfläche 9. Grades. In den unendlich fernen Punkten A^n, B^n, C^n der Raumkurve k^3, die durch die Mittelpunkte der Inzidenzflächen des Polarraumbüschels (Π_n) gebildet ist, berühren, wie bekannt, drei von diesen Inzidenzflächen (Paraboloide) die unendlich ferne Ebene. Diese drei Punkte sind »Mittelpunkte« A^n, B^n, C^n dieser drei Inzidenzflächen, die sich auf diesen Flächen (Paraboloiden) befinden. Die Berührungsgeraden einer Fläche 2. Grades in einem Punkt T dieser Fläche, bilden, wie bekannt, in der Berührungsebene dieses Berührungspunktes T ein involutorisches Berührungsstrahlbüschel der Paare konjugiert zugeordneter Berührungsgeraden, dessen Doppelstrahlen die diesen Berührungspunkt enthaltenden Erzeugenden dieser Fläche 2. Grades sind. Die zwei rechtwinklig liegenden und konjugiert zugeordneten Strahlen in derartigen involutorischen Berührungsstrahlbüscheln der drei die unendlich ferne Ebene in den Punkten A^n, B^n, C^n berührenden Inzidenzflächen, ganz gleich ob sie elliptisch oder hyperbolisch sind, sind deren unendlich fern liegende »Achsen«, also demnach auch Erzeugende der gesuchten Regelfläche 9. Grades. Dem Punkt A^n der Raumkurve k^3 ist also auf der unendlich fernen Kurve u^3 dieser diesen Kurven gemeinsame Punkt, und die zwei Schnittpunkte der Kurve u^3 mit den zwei beschriebenen unendlich fernen »Achsen« des dem Berührungspunkt A^n zugeordneten Inzidenzparaboloides zugeordnet. Das gleiche gilt selbstverständlich auch für die Punkte B^n und C^n. Die Resultate unserer Betrachtungen können also durch folgenden Satz ausgesprochen werden:

Die Achsen der in einem Flächenbüschel 2. Grades sich befindenden Flächen bilden eine Regelfläche 9. Grades. Die Raumkurve 3. Ordnung der Mittelpunkte dieser Flächen ist die dreifache Kurve dieser Regelfläche, die durch die unendlich ferne Ebene in einer Kurve 3. Ordnung und in sechs Erzeugenden geschnitten wird.

2. *Einige Eigenschaften der Achsenregelfläche 9. Grades.* Die sechs unendlich fernen Erzeugenden dieser Regelfläche 9. Grades bilden, wie wir sahen, die Symmetriegeraden der drei Erzeugendenpaare, deren Schnittpunkte die auf der unendlich fernen Kurve sich befindenden unendlich fernen Punkte der drei im Büschel der Inzidenzflächen φ_n des Polarraumbüschels (Π_n) möglichen Paraboloide sind. Die dritte Achse eines jeden dieser drei Inzidenzparaboloide befindet sich, so wie auf jedem anderen Paraboloid, im Endlichen. Auf Grund der Tatsache des Bestehens einer endlichen Achse bei jedem Paraboloid folgt schon, dass die unendlich fernen Punkte A^n, B^n, C^n in den Punktreihen der Kurven k^3 und u^3 sich selbst zugeordnet sind.

Wie bekannt, sind die drei unendlich fernen Punkte A^n, B^n, C^n die Scheitel des gemeinsamen Polardreicks im Schnittkurvenbüschel 2. Grades der unendlich fernen Ebene und des Büschels der Inzidenzflächen des Polarraumbüschels (Π_n). Es hängt von der Form dieses Inzidenzflächenbüschels, resp. von der Form seiner Grundraumkurve 4. Ordnung I. Art ab, wie dieses unendlich ferne Schnittkurvenbüschel 2. Grades aussehen wird, und auch ob ein Paar der drei Punkte A^n, B^n, C^n konjugiert imaginär sein werden. In einem solchen Fall mit einem konjugiert imaginären Paar der Punkte A^n, B^n, C^n sind selbstverständlich auch die diese konjugiert imaginären Punkte enthaltenden Erzeugendenpaare unserer Achsenregelfläche imaginär. Da jede reelle oder imaginäre Flache 2. Grades mit endlichem Mittelpunkt drei reelle Achsen hat, können keine anderen Erzeugenden unserer Achsenregelfläche imaginär sein, ausser der erwähnten zwei unendlich fernen Paare. Ein interessanter Fall einer derartigen Achsenregelfläche wäre der mit dem kubischen Raumkreis k^3, aber in dieser Arbeit haben wir nicht die Absicht unsere Untersuchungen auf verschiedene derartige Fälle auszudehnen.

Wie bekannt, kann eine Kurve 3. Ordnung mit oder ohne Doppelpunkt sein (Geschlecht 0 oder 1). Man nehme an, dass die unendlich ferne Kurve u^3 unserer Achsenregelfläche den Doppelpunkt $D_1 \equiv \overline{D}_1$ hat. Wegen der beschriebenen involutorischen Eigenschaft der auf dieser Kurve liegenden Punktetripel, in unserem Fall die Punktetripel $D_1 D_2 D_3$ und $D_1 D_2 \overline{D}_3$, müssen entweder die Punktepaare $D_2 \equiv \overline{D}_3$ und $D_3 \equiv \overline{D}_3$ in einen Punkt zusammenfallen, oder wenn sie nicht zusammenfallen, müssen die vier Punkte $D_2, D_3, \overline{D}_2, \overline{D}_3$ auf einer Geraden liegen, die die Polare des Pols $D_1 \equiv \overline{D}_1$ bezüglich des absoluten Kegelschnittes sein müsste. Da alle diese fünf Punkte ($D_1 \equiv \overline{D}_1, D_2, D_3, \overline{D}_2$ und $\overline{D}_3$) auf der Kurve u^3 liegen, und diese 3-ter Ordnung ist, ist der erste, wie auch der zweite Fall nicht möglich, da im ersten Fall die Kurve u^3 drei Doppelpunkte haben müsste, und im zweiten Fall von einer Geraden in vier Punkten geschnitten würde. Die unendlich ferne Kurve u^3 der Achsenregelfläche kann also keinen Doppelpunkt haben, und ist also vom Geschlecht eins.

Jede Gerade einer Ebene in der sich eine Kurve 3. Ordnung befindet, schneidet diese Kurve in 3 Punkten. Also auch jede der Verbindungsgeraden der unendlich fernen drei Punkte jedes der beschriebenen Punktetripel auf der Kurve u^3 schneidet diese Kurve noch in einem Punkt. Es folgt also, dass auf der Achsenregelfläche noch eine Erzeugende dieser Regelfläche mit der Ebene der je zwei sich auf der dreifachen kubischen Raumkurve dieser Fläche schneidenden Erzeugenden parallel liegt.

LITERATUR:

[1] *V. Niče,* Die Achsenkomplexe der in einem Büschel sich befindenden Polarräume, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **19** (1964), 243—254,

[2] *Th. Reye,* Die Geometrie der Lage, II. Abt. S. 214.

(Eingegangen am 24. IX 1965.)

Mathematisches Institut
der Universität Zagreb

GEOMETRIJSKO MJESTO OSI PLOHA 2. STUPNJA U JEDNOM PRAMENU TAKVIH PLOHA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Osi ploha 2. stupnja u jednom pramenu takvih ploha čine jednodimenzionalni neprekinuti pravčasti skup, dakle jednu pravčastu plohu. Polarnom prostoru svake plohe 2. stupnja pridružen je poznati kvadratni osni kompleks. Plohama jednog pramena ploha 2. stupnja pridruženo je ∞^1 takvih osnih kompleksa, i to svakoj plohi po jedan. Svakom tačkom prostora P prolazi kao vrhom po jedan istostrani stožac 2. stupnja zraka svakog takvog kompleksa. Pridruženi polovi ovim zrakama tačke P, kao zrakama osnih kompleksa u njihovim polarnim prostorima, čine opću plohu 3. reda, koja prolazi neizmjerno dalekim tačkama osi svih ploha takvog pramena ploha 2. stupnja. Dakle, neizmjerno daleke tačke svih

opisanih osi čine krivulju 3. reda u^3. Središta svih ploha u opisanom pramenu čine prostornu krivulju 3. reda k^3, koja neizmjerno daleku krivulju u^3 spomenute opće plohe 3. reda siječe u trima svojim neizmjerno dalekim tačkama. Svakom tačkom krivulje k^3 prolaze tri izvodnice traženog geometrijskog mjesta, a svakom tačkom krivulje u^3 samo po jedna. Na krivuljama k^3, u^3 imamo dakle jednotroznačno pridružene nizove tačaka, u kojima su neizmjerno daleke tačke krivulje k^3 same sebi pridružene. Spojnice pridruženih tačaka u ta dva kubna niza daju traženo geometrijsko mjesto, koje je pravčasta ploha 9. stupnja s trostrukom prostornom kubnom krivuljom k^3.