VILIM NIČE

HOMOTHETISCHE POLARE RÄUME

HOMOTETIČNI POLARNI PROSTORI

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
ZAGREB

VILIM NIČE

HOMOTHETISCHE POLARE RÄUME

EINFÜHRUNG: Die durch zwei homothetische Flächen 2. Grades, also durch solche die den unendlich fernen Kegelschnitt gemeinsam haben, als Inzidenzflächen bestimmten polaren Räume nennen wir homothetische polare Räume. Die Durchdringungskurve dieser zwei Flächen zerfällt in den gemeinsamen unendlich fernen Kegelschnitt k^n und in einen endlichen Kegelschnitt k. Nimmt man diese zerfallene Raumkurve 4. Ordnung I. Art als Grundkurve eines Flächenbüschels 2. Grades an, dann ist durch dieses Büschel homothetischer Flächen 2. Grades ein Büschel homothetischer polarer Räume bestimmt, für die diese Flächen Inzidenzflächen sind.

Wie bekannt, sind jedem Polarraumbüschel vier Strahlenkomplexe zugeordnet, die durch dieses Büschel ebenfalls bestimmt sind. Es sind dies die folgenden: 1) Der tetraedrale quadratische Strahlenkomplex, den die Achsen der den Raumpunkten im Polarraumbüschel zugeordneten Polarebenenbüschel bilden [1]. 2) Der Majcensche kubische Strahlenkomplex, der durch diejenigen Geraden des Raumes gebildet ist, die die Inzidenzflächen des Polarraumbüschels unendlich fern berühren, resp. die das Inzidenzflächenbüschel des Polarraumbüschels in symmetrischen involutorischen Punktreihen schneiden [2]. 3) Der kubische Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen den Inzidenzflächen des Polarraumbüschels [3]. 4) Der Normalenkomplex der Normalen der Inzidenzflächen des Polarraumbüschels, der vom 8. Grade ist [4].

Jedem Punkt des Raumes ist je ein Strahl dieser vier Komplexe zugeordnet, aber in allen vier dieser Komplexen gilt die Umkehrung nicht. Diese vier durch einen homothetischen Polarraumbüschel bestimmten Strahlenkomplexe werden in dieser Arbeit näher betrachtet.

Die aus den verschiedenen Raumpunkten auf die diesen Punkten in einem Polarraum zugeordneten Polarebenen gefällten Normalen bilden, wie bekannt, den durch diesen Polarraum bestimmten quadratischen Achsenkomplex. Durch ein Polarraumbüschel sind im allgemeinen Fall ∞^1 derartige diesem Büschel zugeordnete Achsenkomplexe bestimmt, die ein diesem Polarraumbüschel zugeordnetes Achsenkomplexbüschel bilden. Alle Geraden des Raumes sind in diesem Achsenkomplexbüschel enthalten. In unserer Arbeit wird auch ein derartiges dem homothetischen Polarraumbüschel zugeordnetes Achsenkomplexbüschel betrachtet.

Es werden ferner einige spezielle homothetische Polarraumbüschel, so wie auch ein homothetisches Polarraumbündel behandelt. Es muss zunächst noch bemerkt werden, dass es drei Arten homothetischer Polarräume gibt. Jede dieser Arten hängt davon ab, ob der gemeinsame unendlich ferne Kegelschnitt reell oder imaginär ist, bzw. in zwei reelle oder imaginäre Geraden zerfallen ist. In einem homothetischen Polarraumbüschel sind also alle Inzidenzflächen entweder Hyperboloide, oder Ellipsoide (Kugeln), oder elliptische, resp. hyperbolische Paraboloide.

A) DAS HOMOTHETISCHE POLARRAUMBÜSCHEL

1. *Der quadratische tetraedrale Strahlenkomplex des homothetischen Polarraumbüschels.* Es sei ein homothetisches Polarraumbüschel durch zwei homothetische Flächen φ_1, φ_2 2. Grades bestimmt, die sich in einem endlichen reellen Kegelschnitt k, und in einem unendlich fernen Kegelschnitt k^n schneiden. Die Mittelpunkte der Flächen φ_1, φ_2 seien mit O_1, O_2 bezeichnet. Der gemeinsame unendlich ferne Kegelschnitt k^n der Flächen φ_1, φ_2 kann auch als der gemeinsame Schnitt der unendlich fernen Ebene und der asymptotischen Berührungskegel der Flächen φ_1, φ_2 betrachtet werden. Diese asymptotischen Kegel 2. Grades sind, wie bekannt, die Inzidenzkegel der kollokalen korelativen Bündel mit den Scheiteln O_1, O_2, die durch die Durchmesser und durch die ihnen in den Polarräumen der Inzidenzflächen φ_1, φ_2, zugeordneten Mittelpunktebenen gebildet sind. Jedem Durchmesser einer Fläche 2. Grades ist diejenige Durchmesserebene dieser Fläche konjugiert zugeordnet, welche die dem unendlich fernen Punkte dieses Durchmessers als Pol bezüglich des unendlich fernen Kegelschnittes dieser Fläche zugeordnete Polare enthält. Jede einer Durchmessergeraden bezüglich dieser Fläche

2. Grades konjugiert zugeordnete Gerade befindet sich in der unendlich fernen Ebene. Also die den auf einer Durchmessergeraden sich befindenden Polen zugeordneten Polarebenen bilden ein Büschel paralleler Ebenen.

Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte O_1, O_2 sei mit o bezeichnet. Da diese Verbindungsgerade o die Mittelpunkte der Flächen φ_1, φ_2 enthält, befinden sich die dieser Geraden o bezüglich der Flächen φ_1, φ_2 konjugiert zugeordneten Geraden in der unendlich fernen Ebene. Da aber die homothetischen Flächen φ_1, φ_2 den unendlich fernen Kegelschnitt k^n gemein haben, werden die der Geraden o bezüglich der Flächen φ_1, φ_2 konjugiert zugeordneten Geraden in eine unendlich ferne Gerade o^n zusammenfallen. Die jeder Ebene der Geraden o als Polarebene bezüglich der Flächen φ_1, φ_2 zugeordneten Pole befinden sich auf der unendlich fernen Geraden o^n. Da aber die Flächen φ_1, φ_2 den gemeinsamen Kegelschnitt k^n haben, werden für jede Ebene der Geraden o die derselben zugeordneten Pole in einen Punkt der Geraden o^n zusammenfallen. Auf Grund dessen folgt also, dass in den polaren Räumen der Inzidenzflächen φ_1, φ_2 ein gemeinsames involutorisches Büschel konjugiert zugeordneter Ebenen existiert, dessen Achse die Verbindungsgerade o ist.

Wir bezeichnen unser homothetisches Polarraumbüschel mit (Π_n), während mit Π_n das Inzidenzflächenbüschel 2. Grades dieses Polarraumbüschels (Π_n) bezeichnet sei.

Da die Kegelschnitte k, k^n sich auf jeder der Inzidenzflächen unseres homothetischen Büschels Π_n befindet, schneiden sich diese zwei Kegelschnitte in zwei unendlich fernen Punkten A_1^n, A_2^n, die, selbstverständlich, reell oder konjugiert imaginär sein können. Durch die Berührungsgeraden der Kegelschnitte k, k^n in den Punkten A_1^n, A_2^n, bestimmten reellen oder konjugiert imaginären Ebenen, sind gemeinsame Berührungsebenen aller homothetischen Inzidenzflächen φ_n des Büschels Π_n in den Punkten A_1^n, A_2^n. Dieses Paar reeller, oder konjugiert imaginärer Ebenen schneidet sich in einer reellen Geraden, die der Verbindungsgeraden $A_1^n A_2^n$ in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (Π_n) konjugiert zugeordnet ist. Da die Verbindungsgerade $A_1^n A_2^n$ unendlich fern ist, muss die dieser Geraden konjugiert zugeordnete Gerade die Mittelpunkte aller Flächen φ_n des Büschels Π_n enthalten, also auch diejenigen der Flächen φ_1, φ_2. Es handelt sich hier also um die schon erwähnte Gerade o der Mittelpunkte O_1, O_2. Die unendlich ferne Verbindungsgerade $A_1^n A_2^n$ ist daher identisch mit der vorher erwähnten Geraden o^n. Man sieht also auch hier, dass alle homothetischen Flächen φ_n des Büschels Π_n ein gemeinsames involutorisches Büschel konjugierter Ebenenpaare der Achse o haben, und dass die Doppelebenen dieses involutorischen Ebenenbüschels alle Flächen φ_n des Büschels Π_n in ihren gemeinsamen unendlich fernen Punkten A_1^n, A_2^n berühren. Es ist auch hier offensichtlich, dass die Gerade o^n die Schnittgerade der Ebenen der Grundkegelschnitte k, k^n ist.

Man betrachte jetzt jenen dem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Strahlenkomplex, der dem in einem gewöhnlichen Polarraumbüschel sich befindenden tetraedralen quadratischen Strahlenkomplex analog ist. Die Strahlen dieses Komplexes sind, wie bekannt, die Achsen derjenigen Polarebenenbüschel, deren Ebenen in den Polarräumen des Büschels (Π_n) je einem Punkt des Raumes als Polarebenen zugeordnet sind. Das allen Flächen des Büschels Π_n gemeinsame Polartetraeder ist, wie bekannt, das Haupttetraeder des erwähnten diesem Polarraumbüschel zugeordneten und durch ihn bestimmten quadratischen tetraedralen Strahlenkomplexes. In unserem homothetischen Fall des Polarraumbüschels (Π_n) besteht dieses Haupttetraeder immer aus zwei reellen Gegenkanten o, o^n, mit den reellen oder konjugiert imaginären Scheiteln A_1^n, A_2^n auf der Kante o^n, da die Geraden o, o^n konjugiert zugeordnet sind in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n). Die Scheitel auf der Geraden o sind die Doppelpunkte der involutorischen Punktreihe der Schnittpunktepaare dieser Geraden und der Flächen φ_n des Büschels Π_n. Der Schnittpunkt der Geraden o und der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k ist der Zentralpunkt dieser involutorischen Punktreihe, da diese Ebene der Kurve k und die unendlich ferne Ebene der Kurve k^n eine zerfallene Fläche φ_n des Büschels Π_n bilden.

Man wähle beliebig im Raum einen Punkt P und bezeichne die Ebene dieses Punktes und der Geraden o mit π. Der dieser Ebene π als der gemeinsamen Polarebene in allen polaren Räumen des Büschels (Π_p) zugeordnete Pol P^n befindet sich, auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen, auf der unendlich fernen Geraden o^n. Der Punkt P^n enthält also die Polarebenen des Pols p in allen homothetischen polaren Räumen des Büschels (Π_n). Die Ebene π schneidet das Büschel Π_n der homothetischen Flächen φ_n in einem Büschel homothetischer Kegelschnitte, mit einem reellen oder konjugiert imaginären Grundpunktepaar auf dem Kegelschnitt k und einem anderen auf dem Kegelschnitt k^n.

Die Polaren des Pols P in der Ebene π bezüglich aller homothetischen Kegelschnitte des erwähnten Schnittbüschels enthalten, wie bekannt, einen gemeinsamen Punkt P_1. Offenbar enthalten alle Polarebenen des Pols P bezüglich der Inzidenzflächen φ_n den Punkt P_1. Alle diese Polarebenen in dem Polarraumbüschel (Π_n) bilden also ein Ebenenbüschel, dessen Achse die Verbindungsgerade p der Punkte P_1, P^n ist. Jeder Punkt P_n des Raumes liegt in einer Ebene π_n der Geraden o, deren gemeinsamer Pol $P_n{}^n$ in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) auf der unendlich fernen Geraden o^n liegt. Man sieht also, dass die allen Punkten P_n des Raumes zugeordneten Geraden p_n, die die Polarebenen dieses Punktes in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (Π_n) enthalten, die unendlich ferne Gerade o^n schneidet. Alle derartigen den Raumpunkten zugeordneten Geraden p_n bilden also einen speziellen linearen singulären Komplex, dessen Leitgerade die unendlich ferne Gerade o^n ist (einen linearen konoidalen Strahlenkomplex).

Wählt man den Raumpunkt P_n in der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k, dann enthält die Polare p_n des Pols P_n bezüglich des Grundkegelschnittes k die Polarebenen dieses Pols in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (Π_n), da die Inzidenzflächen aller polaren Räume dieses Büschels die Kurve k enthalten. Jede Gerade p_n der Ebene des Kegelschnittes k ist also auf die beschriebene Weise einem Punkt P_n dieser Ebene zugeordnet. Offenbar gilt dasselbe auch für die unendlich ferne Ebene der Konik k^n. Es gilt demnach folgender Satz:

Der bekannte quadratische tetraedrale Strahlenkomplex eines Polarraumbüschels, den die Achsen der den Raumpunkten als Polen zugeordneten Polarebenenbüschel in diesem Polarraumbüschel bilden, zerfällt im Falle eines homothetischen Polarraumbüschels in den singulären linearen Strahlenkomplex der unendlich fernen Geraden o^n als Leitgeraden (linearer konoidaler Strahlenkomplex der Leitgeraden o^n), in dem sich auch die Strahlfelder der Ebenen der Grundkegelschnitte k und k^n befinden.

Es ist offensichtlich, dass die Grundkegelschnitte k und k^n auch imaginär sein können, und dass dadurch keine Änderung eintreten muss. Diesen konoidalen linearen Strahlenkomplex bezeichnen wir mit (TH).

Die jedem Raumpunkt P_n auf diese Weise zugeordnete Gerade p_n liegt also mit der Ebene des Kegelschnittes k im Raum parallel. Da die Ebenen der Grundkegelschnitte k, k^n ebenfalls eine zerfallene Inzidenzfläche im Inzidenzflächenbüschel Π_n sind, schneidet jede Gerade eines

Raumpunktes P in der Ebene (Pp), die durch diesen Punkt und durch die diesem Punkt zugeordnete Gerade p im Komplex (TH) bestimmt ist, diese Gerade p und die Ebenen der Grundkegelschnitte k, k^n in Punkten P^1, Q, Q^n, die mit dem Punkt P einen harmonischen Punktquadrupel $(P\,P^1\,Q\,Q^n) = -1$ bilden. Da sich aber der Punkt Q^n immer unendlich fern befindet, wird auf jeder derartigen Geraden p gelten: $P\,Q = Q\,P_1$, resp. der Punkt P und der ihm zugeordnete Strahl p im Komplex (TH) sind immer von der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k gleich entfernt.

Ist das Büschel Π_n homothetischer Flächen φ_n 2. Grades durch zwei homothetische Hyperboloide gegeben und bestimmt, so wird der unendlich ferne Grundkegelschnitt k^n reell. Die asymptotischen Kegel dieser zwei Flächen, sowie auch diejenigen aller anderen Flächen φ_n des Büschels Π_n, sind in diesem Fall reelle homothetische Strahlenkegel 2. Grades. Der endliche Grundkegelschnitt k kann reell oder imaginär sein. Ist der Kegelschnitt k reell, dann können die unendlich fernen gemeinsamen Punkte A_1^n, A_2^n der Kegelschnitte k, k^n reell oder imaginär sein. Diese zwei unendlich fernen Punkte sind reell dann, wenn auf die asymptotischen Kegel der zwei gegebenen Hyperboloide zwei gemeinsame reelle Berührungsebenen gelegt werden können. Die parallelen Paare der Berührungserzeugenden dieser asymptotischen Kegel, in diesen Berührungsebenen, schneiden sich in den gemeinsamen unendlich fernen Punkten A_1^n, A_2^n der Grundkegelschnitte k und k^n. Alle diese Betrachtungen gelten selbstverständlich ohne Rücksicht darauf, ob die Kegelschnitte k, k^n oder ihre Schnittpunkte A_1^n, A_2^n reell oder konjugiert imaginär sind.

Ist ein Polarraumbüschel und der durch dieses bestimmte und ihm zugeordnete quadratische tetraedrale Strahlenkomplex gegeben, dessen Strahlen den Raumpunkten auf bekannte Weise zugeordnet sind, dann bilden, wie bekannt, die den Punkten einer Ebene τ zugeordneten Strahlen in diesem Strahlenkomplex eine Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse.[1] Die Strahlen dieser Kongruenz sind Bisekanten der durch die Pole der Ebene τ in den polaren Räumen dieses Polarraumbüschels gebildeten Raumkurve 3. Ordnung. Im Fall unseres homothetischen Polarraumbüschels, resp. in unserem konoidalen linearen (TH) Strahlenkomplex, liegen derartige Pole einer Ebene τ auf einer zerfallenen Raumkurve 3. Ordnung, die man auf folgende Weise bestimmen kann:

[1] Siehe [1] S. 27.

Der unendlich fernen Geraden a^n einer Ebene α sei bezüglich des unendlich fernen Kegelschnittes k^n in seiner Ebene der unendlich ferne Pol A_n zugeordnet. Die der Ebene α konjugiert zugeordneten Geraden in allen homothetischen polaren Räumen des Büschels (Π_n) enthalten diesen unendlich fernen Pol A_n und die Mittelpunkte dieser homothetischen polaren Räume, da der Pol der Ebene des gemeinsamen Kegelschnittes k^n in jedem polaren Raume des homothetischen Büschels (Π_n) sich im Mittelpunkt der Inzidenzfläche dieses polaren Raumes befindet. Der Pol der Ebene α, bezüglich jeder Fläche φ_n unseres Inzidenzflächenbüschels Π_n, befindet sich, wie bekannt, auf der dieser Ebene konjugiert zugeordneten Geraden bezüglich der Fläche φ_n des Büschels Π_n, die den Mittelpunkt auf der Geraden o enthält. Da diese der Ebene α konjugiert zugeordnete Geraden den unendlich fernen Pol A_n der Geraden a^n enthalten, also parallel sind, und in der Ebene (oA^n) liegen, müssen sich in dieser Ebene (oA^n) auch die Pole der Ebene α in allen homothetischen Polarräumen des Büschels (Π_n) befinden.

Es schneide die Ebene (oA^n) die Ebene α in der Geraden a, und das Büschel Π_n homothetischer Flächen φ_n in einem Büschel homothetischer Kegelschnitte. Da die erwähnten Pole der Ebene α in der Ebene (oA^n) liegen, müssen diese Pole mit den Polen der Schnittgeraden a bezüglich der Kegelschnitte des homothetischen Schnittkegelschnittbüschels in dieser Ebene identisch sein. Man weiss aber, dass die Pole einer Geraden, bezüglich der Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels, einen Kegelschnitt bilden, der mit s_α bezeichnet sei.

Wie schon erwähnt, schneiden alle den Raumpunkten zugeordneten Strahlen des (TH) Komplexes die unendlich ferne Leitgerade o^n, also schneiden diese Gerade o^n auch diejenigen Strahlen, die den Punkten der Ebene α zugeordnet sind. Es folgt daher, dass die Raumkurve 3. Ordnung der der Ebene α in den homothetischen polaren Räumen des Büschels (Π_n) zugeordneten Pole in einen Kegelschnitt s_α in der Ebene (oA^n) und in die unendlich ferne Gerade o^n zerfällt.

Da alle den Punkten P_n einer Ebene der Geraden o zugeordneten Geraden p_n in dem konoidalen Strahlenkomplex (TH) einen Punkt der unendlich fernen Geraden o^n enthalten, bilden diejenigen Strahlen p^n dieses konoidalen Komplexes (TH), die den Punkten der Geraden a in der Ebene (oA^n) zugeordnet sind, einen Zylinder, der den Kegelschnitt s_α in der Ebene (oA^n) enthält und jenen Scheitel auf der unendlich fernen Geraden o^n besitzt, der auf dieser Geraden der Ebene (oA^n) als gemeisamer Pol in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) zugeordnet ist. Dieser Scheitel und der Punkt A_n bilden auf der Geraden o^n ein Paar zugeordneter Punkte in der gemeinsamen involutorischen Punktreihe konjugiert zugeordneter Punktepaare in allen homothetischen polaren Räumen des Büschels (Π_n).

Wie bekannt, sind die Geraden o, o^n in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) konjugiert zugeordnet. Die Polarebenen jedes Punktes auf der Geraden o bezüglich der Inzidenzflächen φ_n unseres Polarraumbüschels (Π_n) bilden das Büschel paralleler Ebenen, die die unendlich ferne Gerade o^n enthalten. Dem Schnittpunkt der Geraden a, o wird demnach in der Ebene (oA_n) ihr Schnittpunkt mit der Geraden o_n zugeordnet, der deswegen auf dem Kegelschnitt s_a in dieser Ebene liegen muss. Dieser Schnittpunkt ist also der erste unendlich ferne Punkt des Kegelschnittes s_a. Da aber die den Raumpunkten P^n in dem konoidalen Strahlenkomplex (TH) zugeordneten Geraden p^n von der Ebene des Grundkegelschnittes k die gleiche Entfernung wie die diesen Geraden p^n zugeordneten Punkte P^n haben, und auf der diesem Punkt P^n gegenüber liegenden Seite mit den betreffenden Geraden p^n parallel laufen, wird dem unendlich fernen Punkt der Geraden a in der Ebene (oA_n) ein ebenfalls unendlich ferner Punkt in dieser Ebene zugeordnet, der auch auf dem Kegelschnitt s_a liegt. Da der Kegelschnitt s_a zwei reelle unendlich ferne Punkte hat, ist er also eine Hyperbel. Einer dieser zwei Punkte liegt auf der Geraden o^n. Es gilt also folgender Satz:

Die den Punkten einer Ebene zugeordneten Polarebenen in den polaren Räumen eines homothetischen Polarraumbüschels bilden Ebenenbüschel, deren Achsen eine konoidale Strahlkongruenz 1. Ordnung 2. Klasse bilden, und deren Leitkurven eine Hyperbel und eine unendlich ferne Gerade sind, die einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt haben.

Die analoge einer Ebene des Raumes zugeordnete bekannte Kongruenz der Bisekanten einer Raumkurve 3. Ordnung, im gewöhnlichen Fall eines Polarraumbüschels, zerfällt also in unserem homothetischen Fall in die beschriebene Kongruenz 1. Ordnung 2. Klasse, und in das Strahlenbündel paralleler Geraden, die den unendlich fernen Schnittpunkt der Leithyperbel und der Leitgeraden dieser Kongruenz enthalten.

Es sei nebst einem Büschel (Π_n) homothetischer polarer Räume eine beliebig angenommene Gerade r gegeben. Da sich jeder Punkt P_r der Geraden r in einer anderen Ebene der Geraden o befindet, muss jeder diesen Punkten P_r zugeordnete Strahl p_r im Komplex (TH) einen anderen Punkt der unendlich fernen Leitgeraden o^n enthalten. Man wähle nun in unserem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zwei polare Räume (Π_1) und (Π_2), und es seien r_1 und r_2 die der Geraden r in diesen polaren Räumen (Π_1), (Π_2) konjugiert zugeordneten Geraden. Den Punkten der Punktreihe (r) auf der Geraden r sind in den polaren Räumen (Π_1), (Π_2) Polarebenen zugeordnet, die der Punktreihe (r) projektiv zugeordnete Polarebenenbüschel $[r_1]$, $[r_2]$ bilden, und hier gilt, wie bekannt, $(r) \overline{\wedge} [r_1]$, $(r) \overline{\wedge} [r_2]$. Jedem Punkt P_r der Geraden r ist eine Ebene des Büschels $[r_1]$ und eine Ebene des Büschels $[r_2]$ zugeordnet, und die Schnittgerade p_r dieser zwei Ebenen ist, wie bekannt, der diesem Punkt P_r im konoidalen Komplex (TH) zugeordnete Strahl. Die den Punkten der Punktreihe (r) zugeordneten Strahlen sind also das Erzeugnis zweier projektiv zugeordneten Ebenenbüschel $[r_1] \overline{\wedge} [r_2]$, und bilden daher eine Regelfläche 2. Grades. Auf dieser Regelfläche befindet sich aber auch die unendlich ferne Gerade o^n. Die zweite unendlich ferne Erzeugende dieser Regelfläche ist der Strahl p_∞, der im (TH) Komplex dem unendlich fernen Punkt P_∞ der Punktreihe (r) zugeordnet ist. Die den Punkten jeder Geraden r im Raum, die kein Strahl des konoidalen Komplexes (TH) ist, zugeordneten Strahlen in diesem Komplex bilden ein hyperbolisches Paraboloid. Alle diese hyperbolischen Paraboloide haben dieselbe Direktionsebene, deren Lage konjugiert der Geraden o in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) ist. Bei einem gewöhnlichen Polarraumbüschel erhält man, wie bekannt, auf diese Weise die Erzeugenden eines gewöhnlichen Hyperboloides.

Es sei die Gerade r ein Strahl p^i $(\equiv r)$ unseres konoidalen Strahlenkomplexes (TH), dem im Raum der Punkt P^i zugeordnet ist. Die den Punkten P_r^i der Geraden p^i im (TH) Komplex zugeordneten Strahlen p_r^i müssen offensichtlich in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (Π_n) den gemeinsamen Punkt P^i haben, da diesen Punkt die Polarebenen aller Punkte P_r^i in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) enthalten. In einem nichthomothetischen Polarraumbüschel bilden derartige Strahlen p_r^i einen Kegel 2. Grades mit dem Scheitel P^i. Da in unserem homothetischen Fall diese Strahlen p_r^i auch die unendlich ferne Gerade o^n schneiden müssen, zerfällt dieser Strahlenkegel 2. Grades in die doppeltzählende Ebene $(P^i\, o^n)$, und seine Erzeugenden bilden das in dieser Ebene liegende Strahlenbüschel (P^i). Alle diese Betrachtungen können in folgenden Satz zusammengefasst werden:

Die den Punkten einer beliebig im Raum angenommenen Geraden r zugeordneten Strahlen im konoidalen linearen (TH) Komplex eines homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) bilden ein hyperbolisches Paraboloid, dessen eine unendlich ferne Erzeugende mit der unendlich fernen Geraden der Ebene des Grundkegelschnittes k des Inzidenzflächenbüschels Π_n zusamenfällt. Ist die gewählte Gerade r ein Strahl des dem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten konoidalen linearen Strahlenkomplexes (TH), dann zerfällt dieses hyperbolische Paraboloid in das Strahlenbüschel des dieser Gerader r zugeordneten Punktes als Scheitel in einer doppeltzählenden Ebene, die konjugiert ist zur Geraden o der Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n des Büschels (Π_n) in allen polaren Räumen dieses Büschels.

Auf Grund dieses Satzes kann z. B. leicht der geometrische Ort (eine Fläche) derjenigen Raumpunkte gefunden werden, die denjenigen Strahlen des (TH) Komplexes zugeordnet sind, die eine beliebige Gerade r des Raumes schneiden, also eine hyperbolische lineare konoidale Strahlenkongruenz des (TH) Komplexes bilden. Jedem Punkte R^n der Geraden r ist ein Strahl p^r im (TH) Komplex zugeordnet, und die den Punkten P^n der Geraden p^r im (TH) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie wir sahen, ein Strahlenbüschel (R^n) des Scheitels R^n in der Ebene ($R^n\, o^n$). Da die den Punkten R^n zugeordneten Strahlen p^r ein hyperbolisches Paraboloid bilden, sehen wir, dass die den Strahlen des (TH) Komplexes, die die erwähnte hyperbolische lineare Kongruenz bilden, zugeordneten Punkte ein hyperbolisches Paraboloid bilden.

Auf analoge Weise könnte man auch manche andere Probleme lösen, wie z. B.: Die denjenigen Strahlen des (TH) Komplexes zugeordneten Punkte, die einen Punkt enthalten, liegen auf dem diesem Punkt im (TH) Komplex zugeordneten Strahl. Oder: Die den in einer Ebene α liegenden Strahlen des (TH) Komplexes zugeordneten Punkte liegen auf einer Hyperbel, deren Ebene die Gerade o enthält, und in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (Π_n) der Ebene α konjugiert zugeordnet ist, usw.

2. *Der dem Majcenschen kubischen Komplex eines gewöhnlichen Polarraumbüschels analoge Komplex in einem homothetischen Polarraumbüschel.* Einen derartigen dem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten und durch ihn bestimmten Strahlenkomplex bezeichnen wir mit (MH). Es ist in der Einführung schon erwähnt, dass dem Majcenschen kubischen Strahlenkomplex folgende Geraden des Raumes bilden: *a)* Diejenigen Geraden des Raumes, die die Inzidenz-

flächen eines Polarraumbüschels in einer symmetrischen involutorischen Punktreihe (mit einem unendlich fernem Doppelpunkt) schneiden. Auf Grund dessen folgt, dass diese Geraden die Inzidenzflächen unendlich fern berühren. *b)* Alle Geraden der einzelnen Raumpunkte, die parallel sind zu den diesen Punkten in dem quadratischen (TH) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Strahlen, sind Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen Komplexes.

Es ist leicht zu bemerken, dass es sich hier in beiden Fällen um dieselben Geraden des Raumes handelt. Der endliche Doppelpunkt der in *a)* erwähnten involutorischen Punktreihe, und der in *b)* dem Strahl zugeordnete Punkt sind ein und derselbe Punkt auf dem Strahle des Majcenschen Komplexes, welcher Zentralpunkt dieses Strahles heisst. Im Weiterem werden wir zunächst auf Grund der Definition *a)* den erwähnten (MH) Komplex unseres homothetischen Pollarraumbüschels (Π_n) betrachten.

Die Ebenen der unendlich fernen Geraden o^n sind, wie bekannt, in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) der Geraden o konjugiert zugeordnet. Auf dieser Geraden o befinden sich, wie bekannt, die Mittelpunkte dieser polaren Räume. Jede dieser Ebenen schneidet die Inzidenzflächen (das Inzidenzflächenbüschel Π_n) des Polarraumbüschels in einem Büschel konzentrischer homothetischer Kegelschnitte. Man weiss aber, dass jede Gerade in der Ebene eines derartigen konzentrischen homothetischen Kegelschnittbüschels dieses Büschel in einer symmetrischen hyperbolischen involutorischen Punktreihe, also in einer hyperbolischen involutorischen Punktreihe mit einem unendlich fernen Doppelpunkt, schneidet. Alle Geraden des Raumes, die in den Ebenen der Geraden o^n liegen, resp. die diese Gerade schneiden, sind Strahlen des dem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten und durch ihn bestimmten (MH) Komplexes.

Da jede derartige Gerade in einer Ebene der Geraden o^n eine Fläche φ_n des homothetischen Inzidenzflächenbüschels Π_n berührt, u. zw. in dem endlichen Doppelpunkt der hyperbolischen involutorischen Schnittpunktreihe dieser Geraden mit dem erwähnten konzentrischen homothetischen Kegelschnittbüschel in dieser Ebene, sehen wir, dass der (MH) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) aus denjenigen Berührungsgeraden der Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n zusammengesetzt ist, die im Raum mit der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k parallel liegen. Nimmt man, im Sinne der darstellenden Geometrie, diese Ebene des Grundkegelschnittes k als Bildebene an, dann kann ein Teil des (MH) Komplexes des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) auch auf folgende Weise definiert werden: Die Hauptgeraden der Berührungsebenen der Inzidenzflächen des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) bezüglich der Ebene des Grundkegelschnittes k als Bildebene, die die Berührungspunkte dieser Berührungsebenen enthalten, sind Strahlen des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (MH) Komplexes.

Auf Grund der Definition *a)* bilden den (MH) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) auch diejenigen Geraden des Raumes, die die Inzidenzflächen φ_n des Büschels Π_n unendlich fern berühren. Da jede Gerade des Raumes in den Doppelpunkten ihrer involutorischen Schnittpunktreihe mit einem Flächenbüschel 2. Grades je eine Fläche dieses Büschels berührt, ist offensichtlich, dass die Strahlen des (MH) Komplexes auch unendlich fern eine Fläche φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n berühren.

Dass es sich in der Definition *b)* um dieselben Strahlen wie in der Definition *a)* handelt, kann auf folgende Weise geschlossen werden: Einem Raumpunkt D sei im (TH) Komplex des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) der Strahl d_t zugeordnet, und in diesem Raumpunkt D ziehe man die Parallele d_m zu der Geraden d_t. Da die Gerade d_m auch die unendlich ferne Gerade o^n schneidet, gehört sie auch als Strahl dem Komplex (TH) an. Wir sahen vorher in unseren Betrachtungen, dass die Ebene (oD) der Geraden d_t in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (Π_n) konjugiert zugeordnet ist. Der Geraden d_m ($\| d_t$), als einem Strahl des (TH) Komplexes, ist also jener Punkt D_1 zugeordnet, der sich im Schnittpunkt der Geraden d_t und der Ebene (oD) befindet. Das heisst also, dass die dem Punkt D_1 in den homothetischen polaren Räumen (Π_n) zugeordneten Polarebenen das durch die Achse d_m bestimmte Ebenenbüschel bilden, ebenso wie die derartig dem Punkt D auf dem Strahl d_m zugeordneten Polarebenen das Ebenenbüschel der Achse d_t bilden. Wird durch die Geraden d_t und o^n eine Ebene gelegt, dann schneidet sie, wie bekannt, die homothetischen Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n in einem konzentrischen homothetischen Kegelschnittbüschel, das den Strahl d_t in einer hyperbolischen symmetrischen involutorischen Punktreihe schneidet. Der endliche Doppelpunkt dieser involutorischen Punktreihe ist der Punkt D_1, in dem also dieser Strahl einen Kegelschnitt dieses konzentrischen homothetischen Kegelschnittbüschels in dieser Ebene berührt, und demnach auch eine Fläche φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n. Der zweite

Doppelpunkt, resp. Berührungspunkt mit einer anderen Fläche φ_n, befindet sich, wie bekannt, unendlich fern, also ist diese Gerade ein Strahl des erwähnten (MH) Komplexes, so wie er in $a)$ und $b)$ definiert wurde. Ganz das gleiche gilt auch für den Strahl d_m und den Punkt D_1. Die Punkte D, D_1 sind Zentralpunkte der Strahlen d_m, d_t im (MH) Komplex, und den Strahlen d_t, d_m zugeordnete Punkte im (TH) Komplex unseres homothetischen Polarraumbüschels. Die unendlich fernen Berührungspunkte dieser Strahlen befinden sich in ihren Schnittpunkten mit der Geraden o^n, da sie in diesen Schnittpunkten zwei unendlich nahe Punkte mit der in die Ebenen der Grundkegelschnitte k und k^n zerfallenen Fläche φ_n gemein hat. Diese zwei Ebenen schneiden sich in der Geraden o^n, also hat die zerfallene Fläche φ_n in deren Punkten lauter Doppelpunkte.

Auf Grund dieser Betrachtungen ist es klar, dass der lineare singuläre konoidale Strahlenkomplex (TH) unseres homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) mit der Leitgeraden o^n mit einem Teil des kubischen (MH) Komplexes dieses Polarraumbüschels identisch ist. Mit einem Teil sagen wir deswegen, weil ebenso wie der (TH) Komplex im allgemeinen Fall quadratisch ist, ist auch der (MH) Komplex in diesem Fall kubisch. In unserem homothetischen Fall sahen wir, dass der ganze quadratische tetraedrale Komplex in den singulären linearen Strahlenkomplex (TH) der Leitgeraden o^n ausgeartet ist, in dem sich auch die Strahlfelder der Grundkegelschnitte k und k^n befinden. Der unserem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordnete kubische Majcensche Strahlenkomplex zerfiel also hier in den linearen singulären konoidalen Strahlenkomplex $(MH) \equiv (TH)$ als einen seiner Teile, und noch in einen quadratischen Teil, den wir in Weiteren finden werden.

Die Strahlen der Ebene des Grundkegelschnittes k können, ausser seinen Berührungsgeraden, keine Strahlen des zerfallenen Majcenschen kubischen Komplexes sein, da diese Strahlen keine Fläche φ_n des homothetischen Inzidenzflächenbüschels Π_n berühren, aber ganz auf der in die zwei Ebenen der Grundkegelschnitte k und k^n zerfallenen Fläche liegen. Wie bekannt, bilden den Majcenschen kubischen Strahlenkomplex diejenigen Geraden des Raumes, die unendlich fern die Inzidenzflächen der polaren Räume des diesem Strahlenkomplex zugeordneten Polarraumbüschels berühren. In unserem homothetischen Fall sind das diejenigen Geraden, die die Inzidenzflächen φ_n des Büschels Π_n in den Punkten des gemeinsamen unendlich fernen Grundkegelschnittes k^n berühren. Ein im Raum beliebig gewählter Punkt S sei der Scheitel eines

Kegels, der den unendlich fernen Kegelschnitt k^n enthält. Eine Berührungsebene dieses Kegels, die den Grundkegelschnitt k^n in einem ihrer Punkte T^n berührt, schneidet die Gerade o aller Mittelpunkte der homothetischen Flächen φ_n in dem Mittelpunkt O einer dieser Flächen, der der Scheitel des asymptotischen Kegels dieser Fläche ist. Diese Ebene τ berührt längs der Erzeugenden OT^n diesen asymptotischen Kegel ebenso, wie sie den ersten Strahlkegel des Scheitels S längs seiner Erzeugenden ST^n berührt. Die Erzeugende ST^n ist also eine Gerade des Raumes, die den Punkt S enthält und die Fläche φ_n des Mittelpunktes O in ihrem unendlich fernem Punkt T^n berührt. Was für die Erzeugende ST^n, resp. die Berührungsebene τ, gilt, gilt für jede Erzeugende des Kegels des Scheitels S und des unendlich fernen Kegelschnittes k^n, und was für den Raumpunkt S gilt, gilt selbstverständlich auch für alle anderen Raumpunkte, da wir den Raumpunkt S ganz beliebig im Raum gewählt haben. Da aber das Beschriebene für jeden Raumpunkt S gilt, sehen wir, dass die Berührungsgeraden aller homothetischen Inzidenzflächen φ_n des Büschels Π_n längs ihres gemeinsamen unendlich fernen Kegelschnittes k^n, den quadratischen Strahlenkomplex des unendlich fernen Leitkegelschnittes k^n bilden. Die Strahlen dieses Komplexes sind selbstverständlich nur dann reell, wenn der unendlich ferne Grundkegelschnitt k^n reell ist. Ist der Kegelschnitt k^n imaginär, dann besteht auch der ganze quadratische Teil des zerfallenen Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes aus lauter imaginären Strahlen.

Die Strahlen dieses zerfallenen Teiles des unserem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Majcenschen kubischen Komplexes haben keine endlichen Zentralpunkte, da sie nur eine Fläche des homothetischen Flächenbüschels Π_n in ihrem Punkt auf dem Kegelschnitt k^n berühren, und alle anderen Flächen dieses Büschels in diesem Punkt, und noch in einem weiteren endlichen Punkt, schneiden. Die Strahlen dieses zerfallenen quadratischen Komplexes haben demnach auch kein paralleles Paar, das ihm in dem zerfallenen quadratischen tetraedralen Komplex zugeordnet ist, wie es der Fall in einem derartigen Komplex eines gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel ist, wo dessen Inzidenzflächenbüschel eine nichtzerfallene Grundkurve 4. Ordnung I. Art hat.

In unserem bisherigen Betrachtungen haben wir gesehen, dass der einem Raumpunkt D im linearen konoidalen Strahlkomplex (TH) zugeordnete Strahl d_t ein in dem Strahlkomplex (MH) zugeordnetes Strahl-paar d_m hat, für das $d_m \parallel d_t$ gilt, und das den Punkt D als seinen Zentralpunkt enthält. Da aber beide Strahlen d_m und d_t, wie gesehen, als Strahlen des Komplexes (MH), auch Strahlen des Komplexes (TH) sind, hat der Strahl d_t im (TH) Komplex auch den ihm in diesem Komplex zugeordneten Zentralpunkt D_1, der sich, wie vorher gesehen, in der Ebene (oD) befindet. Jedem Raumpunkt D ist mittels des linearen singulären konoidalen Komplexes $(TH) \equiv (MH)$ auf diese Weise ein Raumpunkt D_1 involutorisch eineindeutig zugeordnet. Ebenso ist jedem Strahl d_t des Komplexes $(TH) \equiv (MH)$ ein Strahl d_m desselben Komplexes zugeordnet, und zwar so, dass der diesem Strahl d_m als dem Strahl e_t (also $d_m \equiv e_t$) zugeordnete Strahl e_m mit dem Strahl d_t zusammenfällt, also auch $d_t \equiv e_m$ gilt. Man sieht also, dass die Strahlen des singulären linearen konoidalen Komplexes $(TH) \equiv (MH)$ eines homothetischen Polarraumbüschels in Paaren eineindeutig involutorisch zugeordnet sind, und ebenso auch die diesen Strahlen durch diesen Strahlenkomplex zugeordneten Zentralpunkte.

Eine derartige involutorische eineindeutige Raumzuordnung durch die eine Raumtransformation bestimmt ist, besteht auch in einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel. In unserem homothetischen Fall besteht, selbstverständlich, auch eine, jedoch degenerierte Raumtransformation, die wir hier nicht betrachten werden. Auf Grund der Tatsache, dass die Punkte D, D_1 eines zugeordneten Punktepaares D, D_1 in einer Ebene der Geraden o liegen, folgt, dass die Verbindungsgeraden aller Punktepaare $D\,D_1$ die Gerade o schneiden. Aus dieser Tatsache folgt weiterhin, dass alle diese Verbindungsgeraden den singulären linearen Strahlenkomplex der Leitgeraden o bilden. Auf jedem Strahl dieses linearen singulären Komplexes liegt ein involutorisch zugeordnetes Punktepaar, für das schon vorher bewiesen wurde, dass die Punkte dieses Paares von der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k gleich entfernt liegen.

Auf Grund der Tatsache, dass zu den Strahlen des betrachteten singulären Komplexes, ganz gleich ob wir ihn als (TH) oder (MH) Komplex betrachten, die zugeordneten Punkte sich in den diesen Strahlen in allen homothetischen Räumen des Polarraumbüschels (Π_n) konjugierten Ebenen befinden, kann sehr leicht folgendes bewiesen werden:

a) Die den Strahlen des $(TH) \equiv (MH)$ Komplexes, die in einer Ebene liegen und einen Punkt enthalten, durch diesen Komplex zugeordneten Punkte liegen auf einem Kegelschnitt, der diesen Punkt enthält und die Gerade o schneidet. Diese Ebene enthält offensichtlich die Gerade o^n.

b) Auf Grund derselben Tatsachen liegen die den in einer beliebigen Ebene liegenden Strahlen des $(TH) \equiv (MH)$ Komplexes (ein Büschel paralleler Strahlen) zugeordneten Punkte auf einer Geraden, die die Gerade o schneidet.

c) Die denjenigen Strahlen des $(TH) \equiv (MH)$ Komplexes zugeordneten Punkte, die parallel zu einer Ebene im Raum liegen (ein Bündel paralleler Geraden), liegen in einer Ebene der Geraden o, die diesen parallelen Strahlen in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) konjugiert ist.

3. *Der dem Tangentialkurzwegekomplex eines Flächenbüschels 2. Grades analoge Komplex in einem homothetischen Flächenbüschel 2. Grades.* Es sei dieser Komplex mit (RH) bezeichnet. Durch die Ausführungen in einer unlängst veröffentlichten Arbeit ist bekannt, dass die einem Raumpunkt P zugeordnete Gerade p_r dieses (RH) Komplexes, eines allgemeinen nichthomothetischen Polarraumbüschels, den diesem Punkt P im (TH) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Strahl p_t senkrecht schneidet. Offenbar schneidet dieser Strahl p_r auch den dem Punkt P im (MH) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Strahl p_m senkrecht, da $p_t \parallel p_m$ ist. Die Ebene (Pp_r) des Punktes P und der ihm zugeordneten Geraden p_t berührt in diesem Punkt P eine Fläche φ_p des homothetischen Flächenbüschels Π_n, da die Ebene (Pp_t) Polarebene des Pols P bezüglich der Fläche φ_p ist. Wie bekannt, berührt jede Gerade des Raumes zwei Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Die Berührungsgeraden der Fläche φ_p im Punkt P berühren je noch eine Fläche des Flächenbüschels Π_n in einem anderen Punkt, der sich auf dem diesem Punkt im (TH) Komplex zugeordnetem Strahl p_t befindet. Diesen Strahl enthalten, wie bekannt, die Polarebenen des Pols P in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n). Das aus dem Punkt P auf den Strahln p_t gefällte Lot ist, auf Grund des eben Erwähnten, offenbar derjenige dem Punkt P als Ausgangspunkt zugeordnete Tangentialweg, der innerhalb anderer Tangentialwege dieses Punktes, die ein Strahlenbüschel in der Berührungsebene (Pp_t) bilden, der kürzeste ist. In einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel, resp. in seinem Inzidenzflächenbüschel 2. Grades, ist dieser Tangentialkurzwegekomplex vom 3. Grade.[2] Wir wollen jetzt nachsehen, wie ein derartiger Tangentialkurzwegekomplex in unserem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n), als der ihm zugeordnete und durch ihm bestimmte (RH) Komplex, aussieht.

[2] Siehe [3] S. 152.

Der einem Punkt P des Raumes zugeordnete Strahl d_m im (MH) Komplex unseres homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) enthält diesen Punkt als seinen Zentralpunkt, und er ist die Berührungsgerade der diesen Punkt enthaltenden Inzidenzfläche φ des Büschels Π_n, die mit der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k parallel liegt. In der Berührungsebene dieser Fläche φ in diesem Punkt P ist die auf den Strahl p_m des (MH) Komplexes senkrecht gelegte Gerade, der diesem Punkt P in dem beschriebenen (RH) Komplex zugeordnete Strahl p_r. Von allen Berührungsgeraden der Fläche φ im Punkt P hat die Gerade p_r mit der Ebene des Grundkegelschnittes k den grössten Neigungswinkel, weil die Gerade p_m des Punktes P mit dieser Ebene im Raum parallel liegt. Man kann also den (RH) Komplex des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) auf folgende Weise definieren:

Alle diejenigen Berührungsgeraden der Inzidenzflächen eines homothetischen Polarraumbüschels, die im Raum mit der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes dieses Inzidenzflächenbüschels den grössten Neigungswinkel haben, sind Strahlen des diesem homothetischen Polarraumbüschel zugeordneten und durch ihn bestimmten (RH) Komplexes.

Wird auch hier, im Sinne der darstellenden Geometrie, die Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k als Bildebene angenommen, dann kann der (RH) Komplex als der geometrische Ort der die Berührungspunkte enthaltenden Fallinien der Berührungsebenen der Inzidenzflächen φ_n des Polarraumbüschels (Π_n) in allen ihren Punkten betrachtet werden.

Nun wollen wir den Grad dieses (RH) Komplexes bestimmen. Man wähle beliebig im Büschel Π_n der Inzidenzflächen φ_n eine Fläche φ_1, und im Raum einen beliebigen Punkt T. Die Polarebene des Pols T bezüglich der Fläche φ_1 sei mit τ_1 bezeichnet, und die gemeinsame Gerade der Polarebenen des Pols T bezüglich aller Flächen φ_n des Büschels (also der dem Punkt T im (TH) Komplex zugeordnete Strahl) sei t_t. Offenbar ist die Gerade t_t die Schnittgerade der Ebene τ_1 und der Berührungsebene der den Punkt T enthaltenden Inzidenzfläche φ_n in diesem Punkt. Der Schnittkegelschnitt der Fläche φ_1 und der Ebene τ_1 sei mit c_1 bezeichnet. In den Punkten des Kegelschnittes c_1 wird die Fläche φ_1 von ihren den Punkt T enthaltenden Berührungsebenen berührt, und diese Ebenen hüllen, wie bekannt, einen Kegel 2. Grades des Scheitels T ein, den wir mit (Tc_1) bezeichnen werden. Wir sahen vorher, dass die Pole der Ebene τ_1 sich bezüglich aller Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n in einer Ebene der Geraden o, also in der Ebene (oT) befinden, und dass sie eine Hyperbel v bilden, die die unendlich ferne Gerade o^n schneidet, und selbstverständlich den Punkt T enthält. Der jedem Punkt F des Kegelschnittes c_1 zugeordnete Strahl f_t im (TH) Komplex liegt in jener Berührungsebene des Kegels (Tc_1), die den Kegelschnitt c_1 in diesem Punkt F berührt, weil sie in diesem Punkt auch die Fläche φ_1 berührt. Alle derartigen den Punkten F_n des Kegelschnittes c_1 zugeordneten Geraden f_t^n bilden eine Regelfläche 4. Grades, was wir auf folgende Weise beweisen können: Jeder Strahl f_t, der in der diesem Strahl zugeordneten Berührungsebene des Kegels (Tc_1) liegt, schneidet die Hyperbel v und die unendlich ferne Gerade o^n. Da der Scheitel T sich in jeder Berührungsebene des Kegels (Tc_1) befindet, und die Hyperbel v diesen Scheitel enthält, schneidet jede dieser Berührungsebenen die Hyperbel v nur noch in einem weiteren Punkt. Da jeder Punkt der Geraden o^n und jeder Punkt der Hyperbel v zwei Berührungsebenen des Kegels (Tc_1) enthält, wird auch jeder Punkt der Geraden o^n und jeder Punkt der Hyperbel v zwei Erzeugenden der gesuchten Regelfläche enthalten. Diese Regelfläche kann also als das Erzeugnis einer Punktreihe erster Ordnung und einer Punktreihe zweiter Ordnung, die zweizweideutig zugeordnet sind, betrachtet werden. Wenn die unendlich ferne Gerade o^n und die Hyperbel v keinen gemeinsamen Punkt hätten, dann wäre der Grad dieser Regelfläche $(2.2 + 1.2) = 6$. Da aber alle Berührungsgeraden des Kegels (Tc_1), die den Schnittpunkt der Hyperbel v und der Geraden o^n enthalten und in zwei Ebenen liegen, auch Erzeugenden der gesuchten Regelfläche Γ sind, und wenn wir diese zwei Büschel paralleler Geraden ausser acht lassen, bleibt der Grad der gesuchten Regelfläche vier. Dieser Regelfläche gehört, wie gesehen, die Hyperbel v und die unendlich ferne Gerade o^n, als zerfallene Raumdoppelkurve 3. Ordnung an. Die Fusspunktkurve b dieser Regelfläche bezüglich des Punktes T ist eine Raumkurve 8. Ordnung, die in dem Punkt T einen Doppelpunkt hat, weil dieser Punkt sich auf der Doppellinie v dieser Regelfläche befindet. Der Bisekantenkegel (Tb) dieser räumlichen Fusspunktkurve, dessen Erzeugenden den Punkt T enthalten, ist vom 6-ten Grade, weil sich der Scheitel T auf der Doppellinie v der Regelfläche Γ befindet. Zieht man durch die Punkte F_n des Kegelschnittes c_1 lotrechte Geraden auf die diesen Punkten zugeordneten Strahlen des (TH) Komplexes, die Erzeugende der Regelfläche Γ sind, dann sind diese lotrechten Geraden die diesen Punkten zugeordnete Strahlen des (RH) Komplexes, die eine weitere Regelfläche Γ_t bilden. Wir haben also zwei jede Erzeugende der Regelfläche Γ senkrecht schneidende und im Raum parallel liegende Geraden. Eine dieser zwei Geraden ist Erzeugende des den aus den Bisekanten der Fusspunktkurve 8. Ordnung zusammengesetzten Kegels (Tb) 6. Grades, und die zweite ist eine Erzeugende der eben erwähnten Regelfläche Γ_t, die durch die den Punkten des Kegelschnittes c_1 zugeordneten Strahlen im (RH) Komplex gebildet ist. So viele derartige parallele Gerade, die die Erzeugenden der Regelfläche Γ senkrecht schneiden, in einem Strahl des (RH) Komplexes zusammenfallen, also mit einer Erzeugenden des Kegels (Tc_1) sich decken, in so vielen Strahlen (Erzeugenden) wird der Strahlenkegel (Tc_1) 2. Grades den Kegel der den Punkt T enthaltenden Strahlen des (RH) Komplexes durchdringen. Der Berührungskegel (Tb) des Scheitels T der Regelfläche Γ 4. Grades mit der Doppellinie (v, o^n), und der Berührungskegel der aus den den Punkten des Kegelschnittes c_1 zugeordneten Strahlen im (RH) Komplex zusammengesetzten Regelfläche Γ_t, mit demselben Scheitel T, sind mit dem Kegel (Tc_1) identisch, weil jedes Paar paralleler, auf die beschriebene Weise zugeordneter, Erzeugenden der Regelflächen Γ und Γ_t, in einer Berührungsebene des Kegels (Tc_1) liegen. Auf Grund dessen kann der Kegel (Tb), der 6. Grades ist und durch die Bisekanten der erwähnten Fusspunktkurve 8. Ordnung bestimmt ist, den Kegel (Tc_1), der 2. Grades ist, nicht in 12 gewöhnlichen Erzeugenden durchdringen, sondern nur in 6 dieser Erzeugenden berühren, da zwei Durchdringungserzeugende immer zusammenfallen. Es gibt also nur 6 Strahlen des (RH) Komplexes, die den Punkt T enthalten, und die den Punkten des Kegelschnittes c_1 zugeordnet sind, resp. auf dem Kegel (Tc_1) liegen. Der Kegel der den Punkt T enthaltenden Strahlen des (RH) Komplexes kann also den Kegel (Tc_1) 2. Grades nur in 6 Strahlen durchdringen. Nimmt man anstatt der Fläche φ_1 irgend eine andere Fläche φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n, so bekommt man offensichtlich wieder dasselbe. Jeder der Kegel (Tc_n), die alle 2. Grades sind, durchdringt also den Kegel der den Punkt T enthaltenden Strahlen des (RH) Komplexes in 6 Erzeugenden. Was für den Punkt T gilt, gilt selbstverständlich auch für alle andere Punkte des Raumes. Diejenigen Strahlen des (RH) Komplexes, die einen Raumpunkt enthalten, bilden also einen Kegel 3. Grades. Es folgt daher, dass der (RH) Komplex eines homothetischen Polarraumbüschels auch vom 3. Grade ist.

Dieser Grad ist also dem Grad eines derartigen Komplexes in einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel gleich,[3] aber die

[3] Siehe [3] S. 152.

betreffenden Komplexe unterscheiden sich durch mehrere Eigenschaften und Vereinfachungen.

Die mit den Strahlen und mit den diesen Strahlen zugeordneten Punkten verbundenen Eigenschaften des (RH) Komplexes können auf dieselbe Weise bestimmt werden, wie es in einem nichthomothetischen Polarraumbüschel getan wurde.[4]

4. *Der Normalenkomplex der Inzidenzflächen eines homothetischen Polarraumbüschels.* Wir bezeichnen diesen Normalenkomplex mit (NH). In einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel ist dieser Strahlkomplex 8. Grades.[5] Die Fusspunkte der Strahlen eines derartigen Strahlkomplexes 8. Grades, die im Raum parallel mit einer Ebene sind, liegen auf einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung.[6] Wegen dieser Tatsache bilden die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen dieses Strahlkomplexes eine Kurve 3. Ordnung. Bei den gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel wird diese Tatsache mittels derjenigen Fläche 3. Ordnung bestimmt, die durch die Berührungspunkte der Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels mit den mit einer Geraden parallelen Ebenen gebildet ist. In unserem Fall des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n), befindet sich jeder unendlich ferne Punkt in der Ebene des unendlich fernen Grundkegelschnittes k^n des Inzidenzflächenbüschels Π_n. Werden jetzt an die Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n die einen unendlich fernen Punkt enthaltenden Berührungsebenen gelegt, also solche Berührungsebenen, die im Raum parallel mit einer Geraden sind, so liegen die Berührungspunkte derartiger Berührungsebenen auf einer Fläche 2. Grades, die den endlichen Grundkegelschnitt k enthält, da in diesem Fall die oben erwähnte Fläche 3. Ordnung in die unendlich ferne Ebene und eine Fläche 2. Grades zerfällt. Es folgt also, dass in unserem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (NH) Komplexes auf einer Kurve 2. Grades liegen.

In der unendlich fernen Ebene des Grundkegelschnittes k^n sei eine Gerade m^n gegeben, durch die ein Büschel paralleler Ebenen bestimmt ist. Die diesen Ebenen α_n in dem Inzidenzflächenbüschel Π_n gemeinsame konjugiert zugeordnete Ebene β enthält die Gerade o, und ent-

[4] Siehe [3] S. 159–163.
[5] Siehe [4] S. 258.
[6] Siehe [4] S. 256.

hält offenbar auch den unendlich fernen Pol M^n der Polare m^n bezüglich des unendlich fernen Kegelschnittes k^n. Wie bekannt, liegen in der Ebene β die Pole der Ebenen α_n in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n). Jede dieser parallelen Ebenen α^n berührt einige Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n, und dem Erwähnten nach müssen diese Berührungspunkte in der Ebene β liegen. Diese Berührungspunkte in der Ebene β fallen also mit den Berührungspunkten der Schnittgeraden a^n der Ebene β und der Ebenen α_n mit den Kegelschnitten des Schnittkegelschnittbüschels der Ebene β mit den homothetischen Inzidenzflächen des Polarraumbüschels (Π_n), zusammen. Da die Ebene β das Flächenbüschel Π_n in einem Kurvenbüschel 2. Grades schneidet, das zwei unendlich ferne Grundpunkte auf dem Grundkegelschnitt k^n hat, und da die parallelen Schnittgeraden a^n in der Ebene β einen Punkt der unendlich fernen Verbindungsgeraden dieser zwei Grundpunkte enthalten, liegen die Berührungspunkte der Geraden a^n und der Kurven des erwähnten Schnittkegelschnittbüschels in der Ebene β aus einer Kurve 2. Grades. Die Kurve 3. Ordnung der Berührungspunkte zerfällt also hier in die unendlich ferne Gerade und in eine Kurve 2. Grades. Die den Punkten dieser Kurve 2. Grades zugeordneten Normalen der Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n enthalten den Pol M_n der Geraden m^n bezüglich des absoluten Kegelschnittes in der unendlich fernen Ebene. Es ist klar, dass wir zuerst den Pol M_n beliebig wählen können, durch den dann die Polare m^n und der Pol M^n bestimmt wären. Auf Grund dieser Betrachtungen sieht man, dass die einen unendlich fernen Punkt enthaltenden Strahlen des (NH) Komplexes eines homothetischen Polarraumbüschels (Π_n), einen Zylinder 2. Grades bilden. In je einer Ebene γ des Raumes liegen ∞^1 derartige Strahlen des (NH) Komplexes, die eine Kurve folgender Art umhüllen: Die Fusspunkte der in der Ebene γ liegenden Strahlen des (NH) Komplexes liegen, wie wir sahen, auf einer Kurve 2. Grades, und jeden unendlich fernen Punkt dieser Ebene γ enthalten zwei Strahlen dieses Komplexes, die in dieser Ebene liegen. Man hat also das Erzeugnis einer linearen und einer konischen Punktreihe, die einzweideutig derartig zugeordnet sind, dass jedem Punkt der konischen Punktreihe ein Punkt der unendlich fernen Geraden, und einem unendlich fernem Punkt zwei Punkte der konischen Punktreihe zugeordnet sind. Die Klasse der erzeugten Einhüllenden muss also $(1.2 + 2.1) = 4$ sein. Die in einer Ebene des Raumes liegenden Strahlen des (NH) Komplexes hüllen also eine Kurve 4. Klasse um, und durch diese Tatsache ist auch bewiesen, dass der Normalenkomplex der Inzidenzflächen φ_n eines homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) 4. Klasse, also demnach auch 4. Grades ist.

Der Normalenkomplex der Inzidenzflächen eines gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschels ist, wie bekannt, vom 8. Grade. In unserem homothetischen Fall hat dieser Normalenkomplex den Grad 4 deswegen, weil eine Hälfte (k^n) der zerfallenen Grundkurve 4. Ordnung I. Art des Inzidenzflächenbüschels Π_n in der unendlich fernen Ebene des absoluten Kegelschnittes liegt. Also, der absolute Kegelschnitt befindet sich auf der in die Ebenen der Grundkegelschnitte k *und* k^n zerfallenen Inzidenzfläche des Büschels Π_n.

Auf die gleiche Weise, wie wir es bei dem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel ausgeführt haben, können auch hier in unserem homothetischen Fall einige Eigenschaften des (NH) Komplexes ausgeführt und betrachtet werden. Z. B.: Jeder Strahl des (NH) Komplexes hat einen ihm zugeordneten Fusspunkt. Der geometrische Ort der Fusspunkte derjenigen Strahlen des (NH) Komplexes, die einen Punkt T im Raum enthalten und einen Kegel (T_n) 4. Grades bilden, liegen im gewöhnlichen nichthomothetischen Fall, wo dieser Kegel 8. Grades ist, auf einer Raumkurve 9. Ordnung. Da in unserem homothetischen Fall eine derartige Raumkurve jede Inzidenzfläche φ_n des Büschels Π_n in 6 Fusspunkten der den Punkt T enthaltenden Normalen dieser Fläche schneiden, und weiterhin auch in den 4 Fusspunkten der den Punkt T enthaltenden Normalen der Grundkegelschnitte k *und* k^n des Inzidenzflächenbüschels Π_n, muss die Ordnung dieser Kurve $^1/_2$ $(6 + 4) = 5$ sein. Also, die Fusspunkte der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des (NH) Komplexes eines homothetischen Polarraumbüschels, die einen Kegel 4. Grades bilden, liegen auf einer Raumkurve 5. Ordnung. Der Scheitel T ist ein gewöhnlicher Punkt dieser Raumkurve, und auf jeder Erzeugenden des Kegels (T_n) befindet sich, ausser dem Scheitel T, nur noch ein Punkt dieser Raumkurve.

Da sich auf jeder derartigen Raumkurve auch der ihr zugeordnete Punkt T befindet, sehen wir, dass diese Eigenschaft des (NH) Komplexes ganz mit seinem Grad zusammenpasst, weil die den Punkt T enthaltenden Bisekanten dieser Raumkurve einen Strahlenkegel 4. Grades bilden, und auf jeden Erzeugenden dieses Kegels sich, ausser dem Punkt T, nur noch ein Punkt dieser Raumkurve befindet.

Auf Grund dieser Tatsache, und der Tatsache dass die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des (NH) Komplexes eine Kurve

2. Grades bilden, gillt auch folgendes: *Die den Punkten einer Ebene als Fusspunkten zugeordneten Strahlen des (NH) Komplexes bilden eine Kongruenz 5. Ordnung und 2. Klasse,*

Auf ähnliche Weise können auch weitere Eigenschaften des (NH) Komplexes, bezüglich seiner Strahlen und ihrer Fusspunkte, bestimmt und betrachtet werden.

5. *Die Achsenkomplexe der homothetischen Polarraumbüschel.* Die Fusspunkte der einem Punkt T zugeordneten Strahlen in den quadratischen Achsenkomplexen der polaren Räume eines Polarraumbüschels liegen auf einem Kreis, der den Punkt enthält und den diesen Punkt zugeordneten Strahl in dem bekannten tetraedralen (TK) Komplex dieses Polarraumbüschels senkrecht schneidet [5]. Dasselbe gilt offenbar auch in unserem homothetischen Polarraumbüschel, wo ein derartiger einem Punkt T zugeordneter Kreis den diesem Punkt zugeordneten Strahl t_t im (TH) Komplex dieses Polarraumbüschels senkrecht schneidet. Da aber jeder derartige Strahl t_t, wie bekannt, mit der Ebene des Grundkegelschnittes k parallel liegt, und von dieser Ebene auf der anderen Seite gleich entfernt ist wie der dieser Geraden zugeordnete Punkt T, so folgt, dass die Mittelpunkte aller derartigen Kreise in der Ebene des Grundkegelschnittes k liegen, und dass die Ebenen dieser Kreise auf dieser Ebene senkrecht stehen.

Auf Grund der Tatsache, dass die einer Ebene in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) zugeordneten Pole in einer Ebene liegen und eine Hyperbel bilden, folgt, dass die Fusspunkte der den Punkten einer Ebene zugeordneten Strahlen, in den Achsenkomplexen der polaren Räume des Büschels (Π_n), in dieser Ebene eine Hyperbel bilden, und nicht eine Kurve 3. Ordnung, wie es im nichthomothetischen Fall ist. Diese Kurve zerfällt in unserem homothetischen Fall in die erwähnte Hyperbel und die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene.

Jedem Punkt des Raumes, als dem Pol in dem Achsenkomplex jedes polaren Raumes, ist auch in unserem homothetischen Fall sein Strahl, der Fusspunkt dieses Strahles, die Polarebene, der reziproke Strahl, der Fusspunkt dieses Strahles, der reziproke Pol und die diesem Pol zugeordnete reziproke Polarebene zugeordnet. Diese einem Raumpunkt zugeordneten Elemente in den Achsenkomplexen der polaren Räume des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) bilden den stetigen Punktreihen zugeordnete stetige eindimensionale Mengen von

Punkten, Geraden und Ebenen, also Kurven, Regelflächen und Torsen, die im gewöhnlichen nichthomothetischen Fall allgemein bestimmt und betrachtet wurden.[7] In unserem homothetischen Fall können diese eindimensionalen geometrischen Örter auf die gleiche Weise wie im nichthomothetischen Fall bestimmt und betrachtet werden, nur wären hier die Resultate dieser Betrachtungen etwas verschieden von denjenigen im nichthomothetischen Fall, weil ihre Ordnungen, Klassen und Grade reduziert wären, und dadurch oft viel einfacher hergeleitet werden könnten, als es bei den gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüscheln der Fall ist. In dieser Arbeit haben wir nicht die Absicht, uns auch mit derartigen geometrischen Örtern des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) zu befassen.

6. Wenn ein homothetisches Polarraumbüschel (Π_n) so gegeben wäre, dass seine Inzidenzflächen φ_n eine gemeinsame Symmetrieebene haben, in der offenbar die Gerade o liegen müsste, oder wenn sie eine gemeinsame Achse haben, die mit der Geraden o identisch ist, und dadurch auch zwei gemeinsame Symmetrieebene haben, könnte man alle bisher ausgeführten Betrachtungen auch in diesen speziellen Fällen durchführen, aber mit sehr reduzierten und vereinfachten Resultaten. Offenbar wäre die Symmetrie die Haupteigenschaft aller gewonnenen Erzeugnisse.

B) DAS BÜNDEL HOMOTHETISCHER POLARER RÄUME

7. Es sei durch drei homothetische Flächen φ_1, φ_2, φ_3 2. Grades, von denen keine sich in dem durch die zwei anderen bestimmten Flächenbüschel befindet, ein Flächenbündel 2. Grades bestimmt und gegeben. Alle Flächen 2. Grades des durch die homothetischen Flächen φ_1, φ_2, gebildeten Flächenbüschels $(\varphi_1 \varphi_2)$ sind zu diese zwei Flächen homothetisch, und jede Fläche eines durch die Fläche φ_3 und je eine Fläche des Büschels $(\varphi_1 \varphi_2)$ bestimmten Flächenbüschels ist offenbar zu diesen drei Flächen φ_1, φ_2, φ_3 homothetisch, da alle ∞^2 auf diese Weise bestimmten Flächen des durch die Flächen φ_1, φ_2, φ_3 bestimmten Flächenbündels Π_n^2 einen gemeinsamen unendlich fernen Kegelschnitt k^n haben. Die durch die homothetischen Flächen des Bündels Π_n^2 als Inzidenzflächen bestimmten polaren Räume bilden ein homothetisches Polarraumbündel (Π_n^2). Alle Inzidenzflächen des Bündels Π_n^2 haben

[7] Siehe [5] S. 244–254.

ausser dem unendlich fernem Kegelschnitt k^n noch zwei endliche reelle oder konjugiert imaginäre Punkte M, N gemeinsam, in denen der endliche gemeinsame Kegelschnitt der homothetischen Flächen φ_1, φ_2 die Fläche φ_3 schneidet. Die zwei weiteren Schnittpunkte befinden sich auf dem unendlich fernen gemeinsamen Kegelschnitt k^n. Also, anstatt durch die bekannten 8 assoziierten Punkte ist in unserem Fall das homothetische Inzidenzflächenbündel Π_n^2 durch zwei endliche Punkte M, N und durch den erwähnten unendlich fernen Kegelschnitt k^n bestimmt. Das Punktepaar M, N und der Grundkegelschnitt k^n können offenbar auch imaginär sein, und der unendlich ferne Grundkegelschnitt k^n kann auch in zwei reelle oder konjugiert imaginäre Geraden zerfallen.

Die Mittelpunkte der homothetischen Inzidenzflächen φ_1, φ_2, φ_3 seien mit O_1, O_2, O_3 bezeichnet. Die Mittelpunkte aller Inzidenzflächen des homothetischen Polarraumbündels (Π_n^2) liegen offenbar in der Ebene σ dieser drei Mittelpunkte O_1, O_2, O_3, da die Mittelpunkte O_n des vorher erwähnten Inzidenzflächenbüschels $(\varphi_1\,\varphi_2)$ auf der Verbindungsgeraden $O_1\,O_2$ liegen, und die Mittelpunkte aller anderen Inzidenzflächen des Bündels Π_n^2 auf den Verbindungsgeraden des Mittelpunktes O_3 und der auf der Verbindungsgeraden $O_1\,O_2$ befindlichen Mittelpunkte liegen. Man sieht also, dass die Ebene $\sigma \equiv (O_1\,O_2\,O_3)$ eine gemeinsame Diametralebene aller Inzidenzflächen des homothetischen Polarraumbündels (Π_n^2) ist, die das Flächenbündel Π_n^2 bilden. Die dieser Ebene σ, in allen polaren Räumen des homothetischen Bündels (Π_n^2) konjugiert zugeordneten Geraden sind im Raum parallel, da alle diese Geraden den unendlich fernen Pol S^n der unendlich fernen Geraden s^n der Ebene σ, bezüglich des unendlich fernen Kegelschnittes k^n, enthalten. Dies gilt, selbstverständlich, auch für jede Ebene des Raumes und für die mit dieser Ebene parallelen Ebenen. Die Ebene der endlichen Durchdringungskurve 2. Grades zweier homothetischer Flächen 2. Grades ist, wie wir sahen, immer der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte dieser zwei Flächen, bezüglich dieser zwei Flächen, konjugiert zugeordnet. Dies gilt selbstverständlich auch für die homothetischen Flächenpaare $\varphi_1\,\varphi_2$ und $\varphi_1\,\varphi_3$, die sich in endlichen Kegelschnitten k_{12} und k_{13} durchdringen, und die, wie wir sahen, die Grundpunkte M, N des Flächenbündels Π_n^2 enthalten. Es foglt also, dass die Verbindungsgerade der Punkte M, N, als Schnittgerade der Ebenen der Kegelschnitte k_{12} und k_{13}, zu der Ebene σ konjugiert zugeordnet ist. Die Flächen des durch die Flächen φ_1, φ_2 bestimmten Flächenbüschels

2. Grades, resp. des Flächenbüschels mit dem endlichen Grundkegelschnitt k_{12}, durchdringen die zu ihnen homothetische Fläche φ_3 in endlichen Kegelschnitten $k_3{}^i$, die alle die Punkte M, N enthalten. Durch jeden Kegelschnitt $k_3{}^i$ ist, wie schon erwähnt, ein Büschel der Inzidenzflächen des Polarraumbündels $(\Pi_n{}^2)$ bestimmt. Durch jede Berührungsgerade der Fläche φ_3 im Punkt M, resp. N, ist einer dieser Kegelschnitte $k_3{}^i$ bestimmt, da durch diese Berührungsgeraden die Ebene dieses Kegelschnittes $k_3{}^i$, der die Punkte M, N enthält, bestimmt ist. Jede Ebene α des Punktes M, resp. N, schneidet die Berührungsebene der Fläche φ_3 im Punkt M, resp. N, in einer Berührungsgeraden dieser Fläche, durch die eines der vorher erwähnten Flächenbüschel der Inzidenzflächen des Bündels $\Pi_n{}^2$ bestimmt ist, und durch diese Ebene α ist weiterhin in diesem Büschel eine Fläche, resp. in dem Polarraumbündel $(\Pi_n{}^2)$ ein polarer Raum dieser Inzidenzfläche, bestimmt. Durch jede Ebene des Punktes M, resp. N, ist also in unserem homothetischen Polarraumbündel $(\Pi_n{}^2)$ ein polarer Raum bestimmt.

Es ist bei einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbündel bekannt, dass die einem Raumpunkt P in allen polaren Räumen dieses Bündels zugeordneten Polarebenen einen gemeinsamen Punkt P_1 haben.[8] Alle derartigen ∞^3 Raumpunktpaare P, P_1 sind mittels dieses Polarraumbündels involutorisch eineindeutig zugeordnet, und die Verbindungsgeraden dieser Punktepaare bilden einen kubischen Strahlkomplex. Durch diese eineindeutige involutorische Zuordnung ist auch eine kubische Raumtransformation bestimmt.[9]

In einem Büschel homothetischer polarer Räume, dessen Inzidenzflächen den gemeinsamen endlichen Grundkegelschnitt k haben, hat man gesehen, dass die einem Raumpunkt P in dem (TH) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordnete Gerade p_t mit der Ebene des Kegelschnittes k parallel ist, und auf der dem Punkt P gegenüber liegenden Seite dieser Ebene gleich so wie dieser Punkt entfernt ist. Dies gilt offenbar für jeden Raumpunkt in allen Polarraumbüscheln (Π_n) des Polarraumbündels $(\Pi_n{}^2)$, also auch für diejenigen, die durch die Grundkegelschnitte $k_3{}^i$ auf der Fläche φ_3 bestimmt sind. Da die Polarebenen eines Raumpunktes P in allen polaren Räumen des homothetischen Bündels $(\Pi_n{}^2)$ einen Punkt P_1 enthalten, müssen also auch die dem Punkt P zugeordneten Strahlen p_t in den (TH) Komplexen der homothetischen Polarraumbüschel deren die Kegelschnitte $k_3{}^i$ enthaltenden Inzidenz-

[8] Siehe [1] S. 136.
[9] Siehe [1] S. 137.

flächen diesen Punkt P_1 enthalten. Der jedem Raumpunkt P derartig zugeordnete Punkt P_1 befindet sich also gleich weit wie der Punkt P auf der anderen Seite der Ebene eines jeden der Kegelschnitte k_3^i. Die Punkte P, P_1 befinden sich daher in einer Ebene der Verbindungsgeraden MN und sind von dieser Geraden gleich entfernt. Die Verbindungsgeraden aller Punktepaare P, P_1 in unserem homothetischen Fall eines Polarraumbündels schneiden also die Verbindungsgerade der Grundpunkte M, N. Es gilt daher folgender Satz:

Die Verbindungsgeraden der durch ein homothetisches Polarraumbündel bestimmten ∞^3 *eineindeutig involutorisch zugeordneten Punktepaare bilden einen singulären linearen Komplex, dessen Leitgerade die Verbindungsgerade der zwei endlichen Grundpunkte dieses Polarraumbündels ist.*

Da die den Punkten der Ebene σ zugeordneten Polarebenen in allen polaren Räumen des Polarraumbündels (Π_n^2) den vorher erwähnten unendlich fernen Punkt S^n enthalten, ist dieser Punkt S^n in der beschriebenen involutorischen Raumzuordnung allen Punkten der Ebene σ zugeordnet.

Dass die Verbindungsgeraden der zugeordneten Raumpunkte P, P_1 die Verbindungsgerade MN schneiden müssen, kann auch auf folgende Weise erkannt werden: Jeder Punkt P des Raumes befindet sich in der Ebene eines Grundkegelschnittes k_3^i. Die diesem Punkt P zugeordneten Polarebenen in den polaren Räumen des durch den in dieser Ebene liegenden Kegelschnitt k_3^i bestimmten Polarraumbüschels, enthalten die Polare p_t des Pols P bezüglich des Kegelschnittes k_3^i in dieser Ebene. Da auf dieser Geraden p_t der dem Punkt P zugeordnete Punkt P_1 liegt, und diese Gerade p_t in der Ebene des Kegelschnittes k_3^i, die den Punkt P enthält, sich befindet, liegen also beide diese Punkte in dieser Ebene der Geraden MN. Da ferner alle Kegelschnitte k_3^i die Punkte M, N enthalten, schneiden die Verbindungsgeraden aller derartigen Punktepaare P, P_1 die Verbindungsgerade MN.

Wie bekannt, schneiden sich die einem Punkt P des Raumes in drei polaren Räumen des Polarraumbündels (Π_n^2) zugeordneten Polarebenen in demjenigen Punkt P_1 des Raumes, der die Polarebenen des Pols P auch in allen anderen polaren Räumen des Polarraumbündels (Π_n^2) enthält. Es sei im Raum eine Gerade m gegeben. Die den Punkten M^n dieser Geraden zugeordneten Polarebenen bezüglich der Inzidenzflächen φ_1, φ_2 schneiden sich in Geraden m_t^n, die, wie wir in der Abt. 1. dieser Arbeit sahen, ein System von Erzeugenden eines hyperbolischen

Paraboloides bilden. Die Polarebenen der Punkte M^n auf der Geraden m bilden im Polarraum der Inzidenzfläche φ_3, wie bekannt, ein Ebenenbüschel, für welches die Achse m_3 die der Geraden m in dem polaren Raum der Inzidenzfläche φ_3 konjugiert zugeordnete Gerade ist. Dieses Ebenenbüschel $[m_3]$ und das eben erwähnte Erzeugendensystem des hyperbolischen Paraboloides sind projektiv der Punktreihe M^n auf der Geraden m zugeordnet, und dadurch sind sie offenbar auch untereinander projektiv zugeordnet. Das Erzeugnis dieses dem Ebenenbüschel $[m_3]$ projektiv zugeordneten Erzeugendensystems ist, wie bekannt, eine Raumkurve 3. Ordnung, die mit l^3 bezeichnet sei. Da eine Erzeugende des erwähnten Erzeugendensystems immer unendlich fern liegt, so muss auf dieser unendlich fernen Erzeugenden auch der immer reelle Punkt der Raumkurve l^3 liegen. Dieser unendlich ferne Punkt ist der schon bekannte Punkt S^n, da er dem Schnittpunkt der Geraden m und der Ebene σ, in unserer vorher erwähnten involutorischen Raumzuordnung in allen polaren Räumen des Polarraumbündels (Π_n^2) zugeordnet ist. Da die Gerade m beliebig im Raum angenommen wurde, gilt folgender Satz:

Durch die Punktepaare P, P_1 der in einem Polarraumbündel (Π_n^2) homothetischer polarer Räume bestimmten involutorischen Raumzuordnung ist eine kubische Raumtransformation gegeben. Die jeder Geraden des Raumes in dieser Raumtransformation zugeordnete Raumkurve 3. Ordnung enthält den unendlich fernen Pol S^n der gemeinsamen Diametralebene der Inzidenzflächen in allen polaren Räumen dieses homothetischen Polarraumbündels.

Offenbar enthält auch die jeder Ebene des Raumes in dieser Raumtransformation zugeordnete Fläche 3. Ordnung diesen unendlich fernen Punkt S^n.

Man betrachte jetzt eine Ebene α und alle ∞^2 in dieser Ebene liegenden Geraden. Alle ∞^2 diesen Geraden zugeordneten Raumkurven l^3 3. Ordnung befinden sich selbstverständlich auf der dieser Ebene zugeordneten Fläche 3. Ordnung, und alle enthalten den vorher erwähnten unendlich fernen Punkt S^n. Man betrachte eine Gerade n, die den unendlich fernen Punkt S^n enthält, also im Raum $n \parallel MN$ liegt. Auf dieser Geraden n befindet sich nur ein endlicher Punkt der erwähnten Fläche 3. Ordnung, und zwar derjenige, der dem Schnittpunkt der Ebene α und derjenigen Geraden $n_1 \parallel MN$ zugeordnet ist, die in der Ebene (nMN) liegt, und so wie die Gerade n, aber auf der anderen Seite der Geraden MN, von dieser gleich entfernt ist. Es folgt also, dass die einer Ebene α im Raum zugeordnete Fläche 3. Ordnung im unendlich fernem Punkt S^n einen Doppelpunkt hat. Da die Ebene α irgendwelche Ebene des Raumes sein kann, gilt auch dieser Satz:

Die allen Ebenen des Raumes in der durch ein homothetisches Polarraumbündel bestimmten kubischen Raumtransformation zugeordneten Flächen 3. Ordnung haben einen gemeinsamen unendlich fernen Doppelpunkt, der der Pol der gemeinsamen Diametralebene der Inzidenzflächen in allen polaren Räumen dieses Polarraumbündels ist.

LITERATUR

[1] *Th. Reye:* Die Geometrie der Lage, Abt. III (1910), S. 1–32.

[2] *V. Niče:* Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex, Rad Jug. akad., knj. 325 (1962), S. 107–125.

[3] *V. Niče:* Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad Jug. akad., knj. 331 (1965), S. 145–172.

[4] *V. Niče:* Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik mat. fiz. i astr. T. 18 (1963), No. 4, S. 255–268.

[5] *V. Niče:* Die Achsenkomplexe der in einem Büschel sich befindenden Polarräume, Glasnik mat. fiz. i astr. T. 19, (1964), No. 3–4, S. 244.

Institut für Mathematik der Universität in Zagreb

Angenommen zur Veröffentlichung am 15. II. 1966. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

VILIM NIČE

HOMOTETIČNI POLARNI PROSTORI

UVOD: Dvjema homotetičnim plohama 2. stupnja određen je pramen takvih ploha, kojemu se temeljna prostorna krivulja 4. reda I vrste raspala u jednu konačnu i jednu neizmjerno daleku koniku. Uzmemo li svaku plohu takva pramena kao incidentnu plohu jednog polarnog prostora, tada je tim pramenom homotetičnih incidentnih ploha zadan homotetični pramen polarnih prostora.

Poznato je da je svakom pramenu polarnih prostora pridružen i njime određen a) tetraedralni kvadratni kompleks osi pramenova polarnih ravnina pridruženih tačkama prostora kao polovima, b) Majcenov kubični kompleks pravaca, koji neizmjerno daleko diraju incidentne plohe pramena polarnih prostora, c) kubični kompleks najkraćih dirnih putova između incidentnih ploha takvog pramena i d) kompleks normala incidentnih ploha tog pramena, koji je 8. stupnja. Svakoj tački prostora pridružena je po jedna zraka svakog ovog kompleksa, ali u sva četiri kompleksa ne vrijedi i obrat. U ovoj je radnji razmatran i pramen osnih kompleksa, pridruženih polarnim prostorima homotetičnog pramena, a na kraju radnje razmatran je i svežanj homotetičnih polarnih prostora.

A) HOMOTETIČAN PRAMEN POLARNIH PROSTORA

1. *Tetraedralni kvadratni kompleks homotetičnog pramena polarnih prostora.* Homotetičnim plohama φ_1, φ_2, koje se sijeku u konačnoj konici k i neizmjerno dalekoj konici k^n, određen je pramen Π_n takvih ploha φ_n 2. stupnja, a tim pramenom Π_n određen je dalje homotetičan pramen (Π_n) polarnih prostora. Konike k, k^n mogu biti ili realne, ili

imaginarne. Središta ploha φ_1, φ_2 označimo s O_1, O_2, a njihovu spojnicu sa o. Konjugirani pravci spojnici o, s obzirom na plohe φ_1, φ_2, nalaze se u neizmjerno dalekoj ravnini i oni su polare neizmjerno daleke tačke pravca o s obzirom na zajedničku neizmjerno daleku koniku k^n. Označimo taj pravac sa o^n, koji je konjugiran spojnici o u svim polarnim prostorima našeg homotetičnog pramena (Π_n). Konike k, k^n nalaze se na svakoj plohi φ_n pramena Π_n, dakle se sijeku u dvjema neizmjerno dalekim tačkama A_1^n, A_2^n, koje, naravski, mogu biti ili realne, ili konjugirano imaginarne. Spojnici $A_1^n A_2^n$ konjugirani pravci u svim polarnim prostorima pramena (Π_n) prolaze središtima O_n incidentnih ploha φ_n tih prostora, te polom polare $A_1^n A_2^n$ s obzirom na koniku k^n u neizmjerno dalekoj ravnini. Ovaj konačan konjugiran pravac prolazi i središtima O_1, O_2 ploha φ_1, φ_2, dakle se podudara sa spojnicom o, odnosno izlazi da je $o^n \equiv A_1^n A_2^n$, a odavle dalje da se središta svih ploha φ_n nalaze na spojnici o. Sve plohe φ_n pramena Π_n diraju u tačkama A_{1n}, A_{2n} dvije ravnine pravca o, koje su, naravski, ili realne, ili konjugirano imaginarne, kao i tačke A_1^n, A_2^n.

Potražimo sada zrake tetraedralnog kompleksa pridruženog ovakvom pramenu (Π_n) polarnih prostora. Zrake ovakvog kompleksa su, kao što znamo, osi pramenova polarnih ravnina pridruženih tačkama prostora kao polovima u svim polarnim prostorima pramena (Π_n). Zajedničkim dijametralnim ravninama incidentnih ploha φ_n pridruženi polovi nalaze se na pravcu $o^n \equiv A_1^n A_2^n$, a ti polovi i sjecišta s opisanim njima pridruženim polarnim ravninama na tom pravcu čine involutorni niz s dvostrukim tačkama A_1^n, A_2^n. Budući da svaka tačka prostora P leži u jednoj ravnini pravca o, prolaze njene polarne ravnine u pramenu (Π_n) jednom tačkom P^n na pravcu o^n. A jer sve te ravnine prolaze jednim pravcem p, mora taj pravac u konačnosti biti usporedan s ravninom konačne temeljne konike k. U svakoj ravnini pravca o nalazi se ∞^2 tačaka P, a svim tim tačkama pridruženi pravci p, dakle njih ∞^2, prolaze neizmjerno dalekom tačkom P^n, dakle su to svi pravci te tačke. Vidimo, dakle, da su svi oni pravci prostora – koji su usporedni s ravninom konačne temeljne konike k – zrake tetraedralnog kompleksa pridruženog na opisani način homotetičnom pramenu polarnih prostora.

Poznato je da je takav tetraedralni kompleks kod običnog pramena polarnih prostora kvadratan. Malo prije opisane zrake takva kompleksa u našem homotetičnom pramenu čine, međutim, samo singularan linearni kompleks neizmjerno daleke ravnalice o^n. Svakoj tački P ravnine konačne temeljne konike k, pridružene polarne ravnine u svim polarnim prostorima pramena (Π_n), prolaze polarom p pola P u toj ravnini s obzirom na koniku k. Vidimo dakle da su i svi pravci ravnine konike k zrake našeg raspadnutog tetraedralnog kompleksa. Isto ovo vrijedi i za neizmjerno daleku ravninu konike k^n. Budući da smo na ovaj način odredili zrake tetraedralnog kompleksa pridružene svim tačkama prostora, očito vrijedi ovaj stavak:

a) *Tetraedralni kompleks pramena polarnih prostora, koji se sastoji iz osi pramenova polarnih ravnina pridruženih u tim prostorima svim tačkama prostora, raspada se u slučaju homotetičnog pramena polarnih prostora u linearni singularni kompleks neizmjerno daleke presječnice ravnina temeljnih konika kao ravnalice. Polja pravaca u ravninama tih konika nalaze se također u tom kompleksu.*

Označimo sa (TH) takav singularni linearni kompleks pridružen homotetičnom pramenu (Π_n) polarnih prostora. Iz činjenice da ravnine konika k i k^n možemo smatrati raspadnutom plohom φ homotetičnog pramena Π_n, izlazi da su svaka tačka prostora P i njoj pridružena zraka p u (TH) kompleksu jednako udaljeni od ravnine konike k, ali na različitim njenim stranama.

Iz pojednostavnjenih osobina ovakvog (TH) kompleksa može se jednostavnim zaključivanjem doći do ovih stavaka:

b) *Tačkama po volji odabrane ravnine, kao polovima pridružene polarne ravnine u polarnim prostorima jednog homotetičnog pramena, čine za svaku takvu tačku pramen ravnina, a osi svih tih pramenova, kao zrake (TH) kompleksa, čine konoidalnu kongruenciju 1. reda 2. razreda, kojoj je ravnalica jedna hiperbola i jedan neizmjerno daleki pravac koji tu hiperbolu siječe.*

c) *Tačkama po volji odabranog pravca u prostoru pridružene zrake u singularnom linearnom kompleksu (TH) čine hiperbolički paraboloid, kojemu se jedna izvodnica nalazi u neizmjerno dalekom pravcu o^n ravnine temeljne konike k. Ako je taj pravac zraka (TH) kompleksa, prelazi taj hiperbolički paraboloid u pramen pravaca s vrhom u tački pridruženoj toj zraci, a u ravnini usporednoj s ravninom konačne temeljne konike k.*

2. *Kompleks analogan Majcenovom kubičnom kompleksu.* Takav kompleks homotetičnog pramena polarnih prostora nazovimo (MH) kompleks. Iz činjenice da su zraka (MH) kompleksa i zraka (TH) kompleksa, pridružene jednoj tački prostora, međusobno usporedne, dakle su i sve zrake (TH) kompleksa usporedne sa zrakama (MH) kompleksa,

te iz činjenice da svaki pravac usporedan s ravninom konike k dira u konačnosti samu jednu plohu φ_n pramena Π_n izlazi da su oni pravci prostora koji su usporedni s ravninom konike k zrake (MH) kompleksa. Uzmemo li ravninu konike k kao ravninu slike, tada su zrake (MH) kompleksa sutražnice dirnih ravnina incidentnih ploha φ_n pramena Π_n, koje prolaze njihovim diralištima.

Sve zrake kompleksa (MH), koje su i zrake kompleksa (TH), sijeku neizmjerno daleku presječnicu o^n ravnina konika k i k^n, koje čine jednu raspadnutu incidentnu plohu φ pramena Π. Svaka zraka ovog kompleksa $(TH) \equiv (MH)$ »dira« prema tome u njenom sjecištu s presječnicom o^n, dakle neizmjerno daleko, ovu raspadnutu plohu φ homotetičnog pramena Π_n.

Kao što znamo, zrake Majcenova kubičnog kompleksa pridruženog pramenu polarnih prostora jesu oni pravci prostora koji neizmjerno daleko diraju incidentne plohe polarnih prostora tog pramena. Sve incidentne plohe φ_n našeg homotetičnog pramena (Π_n) prolaze neizmjerno dalekom konikom k^n. Svaki pravac prostora koji siječe koniku k^n leži u jednoj dirnoj ravnini jedne incidentne plohe φ_n, dakle je zraka (MH) kompleksa. Za homotetičan pramen polarnih prostora vrijedi prema tome i ovaj stavak:

d) *Majcenov kubični kompleks, pridružen homotetičnom pramenu polarnih prostora, raspada se u singularan linearni kompleks konoidalnog oblika, kojemu je direkciona ravnina ravnina konačne temeljne konike k, te u kvadratni kompleks neizmjerno daleke ravnalice k^n.*

Iz identičnosti konoidalnih linearnih singularnih kompleksa $(TH) \equiv (MH)$ proizlazi jednojednoznačna prostorna pridruženost parova zraka u takvu kompleksu, kao i njima pridruženih tačaka, čime je pak određena jedna prostorna transformacija, koja u ovoj radnji nije pobliže razmatrana. U slučaju običnog pramena polarnih prostora ta je prostorna transformacija 5. reda.

Na temelju činjenice da zrakama $(TH) \equiv (MH)$ kompleksa pridružene tačke leže u ravnini, koja je konjugirana toj zraci u svim polarnim prostorima homotetičnog pramena, mogu se izvesti i ovi stavci:

e) *Zrakama kompleksa $(TH) \equiv (MH)$, koje prolaze jednom tačkom prostora, a leže kao što znamo u jednoj ravnini, pridružene tačke nalaze se na jednoj konici koja prolazi tom tačkom i siječe pravac središta incidentnih ploha.*

f) *Zrakama $(TH) \equiv (MH)$ kompleksa, koje leže u jednoj ravnini, pridružene tačke nalaze se na jednom pravcu koji siječe pravac središta incidentnih ploha.*

g) *Pridružene tačke onim zrakama $(TH) \equiv (TM)$ kompleksa, koje su u prostoru usporedne s jednom ravninom, dakle čine snop usporednih pravaca, nalaze se u jednoj ravnini središta svih incidentnih ploha, koja je u svim polarnim prostorima homotètičnog pramena konjugirana smjeru tih pravaca.*

3. *Analogan kompleks kompleksu najkraćih dirnih putova.* Označimo ovakav kompleks sa (RH). Poznato je da su zraka Majcenova kompleksa i zraka kompleksa najkraćih dirnih putova, pridružene jednoj tački prostora, međusobno okomite, prolaze tom tačkom i leže u dirnoj ravnini incidentne plohe koja prolazi tom tačkom. U našem homotetičnom slučaju pramena polarnih prostora može se uz pomoć ove činjenice lako izvesti ovaj stavak:

h) *Sve tangente incidentnih ploha homotetičnog pramena polarnih prostora, koje s ravninom konačne temeljne konike zatvaraju najveći kut, jesu zrake (RH) kompleksa pridruženog ovom pramenu polarnih prostora.*

Stepen (RH) kompleksa homotetičnog pramena polarnih prostora, koji je kubičan kao i kod običnog pramena, može se ovdje izvesti analognim postupkom kao kod običnog pramena. Međutim (RH) kompleks se dosta razlikuje po nekim svojim osobinama od takvog kompleksa kod običnog pramena polarnih prostora, ali one se mogu dobiti analognim postupkom kao tamo.

4. *Kompleks normala incidentnih ploha.* Ovakav kompleks u pramenu homotetičnih polarnih prostora označimo sa (NH). Kod običnog pramena polarnih prostora takav je kompleks 8. stupnja. Iz činjenice da dirališta dirnih ravnina usporednih s jednim pravcem sa svim plohama jednog pramena ploha 2. stupnja čine plohu 3. reda izlazi da nožišta normala incidentnih ploha jednog pramena polarnih prostora, okomitih na jednom pravcu, dakle usporednih s jednom ravninom, čine opću plohu 3. reda. U slučaju homotetičnog pramena polarnih prostora takva se ploha raspada u plohu 2. stupnja i neizmjerno daleku ravninu, jer je ta ravnina dio jedne incidentne plohe tog pramena u kojoj se nalazi apsolutna čunosječnica. Nožišta zraka našeg kompleksa (NH), koje leže u jednoj ravnini, čine prema tome krivulju 2. stupnja. Sve normale te krivulje, kao zrake (NH) kompleksa, omataju krivulju 4. raz-

reda, koja nastaje kao proizvod jednog neizmjerno dalekog linearnog niza i jednog konačnog niza 2. reda, koji su jednodvoznačno pridruženi. Iz činjenice da zrake (NH) kompleksa u jednoj ravnini omataju krivulju 4. razreda proizlazi dalje ovo:

i) *Normale incidentnih ploha homotetičnog pramena polarnih prostora čine kompleks* (NH) *četvrtog stupnja.*

Raspadanje ovog kompleksa u stepen manji od osmog, proizlazi iz činjenice da sve incidentne plohe prolaze konikama k i k^n, kao i iz činjenice da su ravnine tih konika jedna raspadnuta incidentna ploha.

Zrake (NH) kompleksa koje prolaze jednom tačkom prostora čine prema tome stožac 4. stupnja. Krivulja nožišta tih zraka probada svaku incidentnu plohu u šest tačaka, jer je kongruencija normala plohe 2. stupnja 6. reda 2. razreda. Osim toga, možemo svakom tačkom prostora postaviti na konačnu temeljnu koniku k po četiri okomice, koje su također u tim nožištima na konici k normale neke incidentne plohe φ_n pramena Π_n. Krivulja nožišta zraka (NH) kompleksa, koje prolaze jednom tačkom prostora i čine stožac 4. stupnja, probada svaku incidentnu plohu našeg homotetičnog pramena u 10 tačaka, osim onih koje imaju takva nožišta na temeljnoj konici k. Izlazi, prema tome, da je takva prostorna krivulja 5. reda, što u ostalom mora i biti, jer je vrh tog stošca njena jednostruka tačka. Iz ove činjenice, kao i one da nožišta zraka (NH) kompleksa, koje leže u jednoj ravnini, čine krivulju 2. stupnja, proizlazi ovaj stavak:

j) *Tačkama neke ravnine, kao nožištima pridružene normale incidentnih ploha jednog homotetičnog pramena polarnih prostora, čine kongruenciju 5. reda 2. razreda.*

Na sličan način mogu se odrediti i neke dalje osobine kompleksa normala incidentnih ploha homotetičnog pramena polarnih prostora.

5. *Kvadratični osni kompleksi homotetičnog pramena polarnih prostora.* Zrake osnih kompleksa polarnih prostora jednog pramena takvih prostora, koje su pridružene jednoj tački prostora kao polu, čine pramen pravaca. Ravnina tog pramena okomita je na zraci tetraedralnog kompleksa pridruženog tom pramenu polarnih prostora, koja je pridružena toj tački, a nožišta tih zraka su na kružnici koja prolazi tom tačkom i okomito siječe tu zraku tetraedralnog kompleksa u njenom najbližem mjestu toj tački. Iz svojstava homotetičnog pramena polarnih prostora izlazi da su središta svih takvih kružnica, pridruženih tačkama

prostora, u ravnini konačne temeljne konike k i da su im ravnine na ravnini konike k okomite. Osobine homotetičnog pramena polarnih prostora u vezi s njihovim osnim kompleksima, mogle bi se izvesti analogno kao kod običnog takvog pramena, samo bi se te osobine ovdje pojavile u pojednostavnjenim i raspadnutim oblicima.

6. *Pramen homotetičnih polarnih prostora* može biti zadan tako, da sve njegove incidentne plohe imaju jednu zajedničku simetralnu ravninu, u kojoj tada leži pravac o središta incidentnih ploha. Ako sve te incidentne plohe imaju dvije zajedničke simetralne ravnine, bit će njihova presječnica pravac o. Osobine ovakvih homotetičnih pramenova polarnih prostora se očito i dalje veoma pojednostavnjuju.

B) SVEŽANJ HOMOTETIČNIH POLARNIH PROSTORA

7. Trima homotetičnim plohama 2. stupnja φ_1, φ_2, φ_3, od kojih se nijedna ne nalazi u pramenu ploha određenom s ostale dvije, određen je svežanj Π_n^2 homotetičnih ploha 2. stupnja. Uzmemo li plohe tog svežnja kao incidentne plohe polarnih prostora, bit će tim svežnjem ploha 2. stupnja određen svežanj (Π_n^2) homotetičnih polarnih prostora. Lako se vidi da se središta svih incidentnih ploha tog svežnja nalaze u ravnini σ središta O_1, O_2, O_3 ploha φ_1, φ_2, φ_3. Sve plohe svežnja Π_n^2 imaju očito zajedničku neizmjerno daleku koniku k^n, dok u konačnosti prolaze parom realnih, ili konjugirano imaginarnih tačaka M, N. Ove su tačke sjecišta zajedničke konačne konike ploha φ_1, φ_2 s plohom φ_3. Svežanj Π_n^2 incidentnih ploha određen je dakle tačkama M, N i neizmjerno dalekom konikom k^n. Ravnina σ svih središta konjugirana je smjeru spojnice MN u svim polarnim prostorima homotetičnog svežnja (Π_n^2).

Poznato je kod svežnja polarnih prostora da polarne ravnine jedne tačke P prostora, u svim polarnim prostorima tog svežnja, prolaze jednom tačkom $\overline{P}$. Spojnice tako involutorno pridruženih ∞^3 parova tačaka u prostoru čine kubični kompleks. U našem homotetičnom svežnju prelazi taj kompleks u singularni linearni kompleks spojnice MN kao ravnalice. Budući da je spojnica MN konjugirana ravnini σ u svim polarnim prostorima svežnja (Π_n^2), bit će svim tačkama ravnine σ pridružena, u spomenutoj involutornoj pridruženosti, ista tačka S^n, koja je neizmjerno daleko na spojnici MN. Involutornom pridruženošću parova tačaka P, $\overline{P}$ u prostoru, određena je jedna prostorna transformacija 3. reda. U našem homotetičnom svežnju polarnih prostora dobiva ova kubna transformacija ovu osobinu:

Parovima pridruženih tačaka P, $\overline{P}$ jednog homotetičnog svežnja polarnih prostora određena kubna prostorna transformacija ima tu osobinu, da tačkama svakog pravca u prostoru pridružena prostorna krivulja 3. reda prolazi neizmjerno dalekom tačkom spojnice temeljnih tačaka M, N, a svakoj ravnini na taj način pridružena ploha 3. reda ima u toj neizmjerno dalekoj tački dvostruku tačku.

Institut za matematiku Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 15. veljače 1966. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.