VILIM NIČE

ÜBER DIE KÜRZESTEN TANGENTIALWEGE ZWISCHEN DEN FLÄCHEN EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

GEOMETRIJSKO MJESTO NAJKRAĆIH DIRNIH PUTOVA MEĐU PLOHAMA PRAMENA PLOHA 2. STUPNJA

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
ZAGREB

VILIM NIČE

ÜBER DIE KÜRZESTEN TANGENTIALWEGE ZWISCHEN DEN FLÄCHEN EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

EINLEITUNG: Durch das Flächenbüschel Π_n 2. Grades sei ein Polarraumbüschel (Π_n) bestimmt, dessen Flächen die Inzidenzflächen der Polarräume des Büschels (Π_n) sind. Die einem Punkt P als Pol zugeordneten Polarebenen bezüglich aller Flächen des Büschels Π_n bilden, wie bekannt, ein Ebenenbüschel, dessen Achse mit p bezeichnet sei. Die allen Raumpunkten derartig zugeordneten Geraden p bilden den bekannten quadratischen tetraedralen Strahlenkomplex, dessen Haupttetraeder das gemeinsame Polartetraeder aller Flächen 2. Grades des Büschels Π_n ist. Die Grundkurve 4. Ordnung I. Art des Büschels Π_n bezeichne man mit c^4, und die Scheitel des Haupttetraeders mit A, B, C, D. Die charakteristische Konstante dieses tetraedralen Strahlenkomplexes ist einem Doppelverhältnis der vier eine Tangente der Kurve c^4 und die vier Hauptpunkte A, B, C, D enthaltenden Ebenen gleich. Die durch einen Punkt P und durch die demselben Punkt zugeordnete Gerade p in dem erwähnten tetraedralen Komplex bestimmte Ebene α ist auch die Polarebene des Pols P bezüglich einer Fläche des Büschels Π_n, die aber diese Inzidenzfläche eines Polarraumes des Büschels (Π_n) in dem Punkt P berührt. Das Strahlenbüschel (P) des Punktes P in der Ebene α bilden die Tangenten dieser Inzidenzfläche 2. Grades im Berührungspunkt P.

Auf jedem Strahle des Strahlenbüschels (P) ist dem Punkt P der Schnittpunkt dieses Strahles und der Geraden p in allen Polarräumen des Büschels (Π_n) konjugiert zugeordnet. Jede Gerade des Raumes schneidet, wie bekannt, die Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades in Punktpaaren einer involutorischen Punktreihe. In den Doppelpunkten dieser involutorischen Punktreihe werden zwei Flächen dieses Flächenbüschels durch diese Gerade berührt. Im Punkt P berühren, wie wir sahen, alle Geraden des Strahlbüschels (P) dieselbe Fläche des Büschels Π_n, während die Strahlen dieses Büschels in ihren Schnittpunkten auf der Geraden p noch eine andere Fläche des Büschels Π_n berühren. Der Punkt P und diese Schnittpunkte auf der Geraden p sind nämlich die Doppelpunkte der involutorischen Punktreihen der Schnittpunktepaare dieser Strahlen des Büschels (P) und der Flächen des Büschels Π_n. Dies folgt aus der Tatsache, dass der Punkt P und der Schnittpunkt der Geraden p auf jedem Strahle des Büschels (P) mit allen Schnittpunkten dieser Geraden und der Flächen des Büschels Π_n einen harmonischen Punktquadrupel bilden. Ein Strahl des Büschels (P) liegt mit der Geraden p parallel, berührt also die Inzidenzfläche eines Polarraumes im Büschel (Π_n) unendlich fern. Alle derartig im Raum den Raumpunkten zugeordneten Geraden berühren also je eine Fläche des Inzidenzflächenbüschels unendlich fern, und bilden einen dem Flächenbüschel Π_n zugeordneten Majcenschen kubischen Strahlenkomplex.

Die in dem Büschel (P) aller Raumpunkte P auf die ihnen zugeordnete Gerade p senkrecht stehenden Strahlen o bilden eine dreidimensionale stetige Strahlenmenge, also einen Strahlkomplex. Dieser Strahlkomplex ist dem Polarraumbüschel (Π_n) ebenso zugeordnet, und durch ihn bestimmt, wie es der diesem Polarraumbüschel zugeordnete quadratische tetraedrale Strahlkomplex, ferner der kubische Majcensche Strahlkomplex und der Normalenkomplex der Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels sind. Wie es bei den drei erwähnten Strahlkomplexen der Fall ist, gilt dasselbe auch hier, nämlich dass jedem Raumpunkt ein Strahl dieses Strahlkomplexes zugeordnet ist. Aber wie wir später sehen werden, gilt nicht das Umgekehrte. In dieser Arbeit wird der Grad dieses Strahlkomplexes und mehrere seiner Eigenschaften bestimmt. Der Kürze halber soll dieser Strahlkomplex »Tangentialkurzwegekomplex« genannt werden:

I. Der Grad des Tangentialkurzwegekomplexes. Jedem Polarraumbüschel (Π_n), bzw. seinem Inzidenzflächenbüschel Π_n 2. Grades, ist ein quadratischer tetraedraler Strahlkomplex zugeordnet, dessen Strahlen, wie bekannt, den Raumpunkten so ein-eindeutig zugeordnet sind, dass jeder dieser Punkte mit allen Punkten des ihm zugeordneten Strahles im tetraedralen Komplex konjugierte Punktepaare in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) bildet. Diesen tetraedralen Strahlkomplex bezeichne man mit (TK). Hieraus folgt auch die schon in der Einleitung erwähnte Tatsache, dass die in jedem Punkt des Raumes mit dem in dem tetraedralen Komplex diesem Punkt zugeordneten Strahl parallelliegende Gerade ein Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen kubischen Komplexes ist, in dem dieser Punkt der Zentralpunkt ist. Diesen dem Büschel Π_n zugeordneten Majcenschen Strahlkomplex bezeichne man mit (MK). Auf Grund dieser Betrachtungen könnte man den Majcenschen kubischen Strahlkomplex eines Polarraumbüschels auch folgenderweise definieren: Zieht man in jedem Punkt des Raumes die Parallele mit dem diesem Punkt zugeordneten Strahl des einem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Strahlkomplexes, dann bilden alle derartigen Parallelen die Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen kubischen Strahlkomplexes.

In dem unserem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten tetraedralen Strahlkomplex (TK) sei einem Raumpunkt P ein Strahl p zugeordnet. Die Ebene des Punktes P und der Geraden p ist, wie bekannt, die Berührungsebene einer Inzidenzfläche des Büschels Π_n im Berührungspunkt P. Die in diesem Punkt auf diese Ebene errichtete Lotrechte ist also die Normale der diesen Punkt enthaltenden Inzidenzfläche 2. Grades des Büschels Π_n. Alle Normalen aller Inzidenzflächen Π_n unseres Polarraumbüschels (Π_n) bilden, wie bekannt, einen diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Normalenkomplex 8. Grades, den wir mit (NK) bezeichen. Jeder Punkt des Raumes ist also der Zentralpunkt eines Strahles des dem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen Komplexes (MK) und der Fusspunkt eines Strahles des diesem Büschel Π_n zugeordneten Normalenkomplexes (NK). Wird in einem Punkt P des Raumes auf die Ebene der zwei diesem Punkt zugeordneten Strahlen des Majcenschen (MK) und des Normalenkomplexes (NK) lotrecht eine Gerade gezogen, dann bilden alle derartigen auf diese Weise den Raumpunkten zugeordneten Geraden o unseren betrachteten Tangentialkurzwegekomplex. Da die dem Punkt P im (TK) Komplex zugeordnete Gerade p in der Berührungsebene der diesen Punkt enthaltenden Inzidenzfläche des Büschels (Π_n) liegt, deren Berührungspunkt dieser Punkt P ist, bilden alle den Raumpunkten zugeordneten Geraden p in dem (TK) Komplex und die ihnen zugeordneten Strahlen im (NK) Komplex Paare windschiefer Geraden, deren kürzeste Transversalen die Strahlen o unseres Tangentialkurzwegekomplexes sind.

Jedem Punkt P des Raumes ist also nur ein Strahl o dieses Komplexes zugeordnet, den wir analog wie die drei vorher mit (RK) bezeichnen werden. Den Tangentialkurzwegekomplex (RK) eines Polarraumbüschels (Π_n) könnte man also auch als den geometrischen Ort der kürzesten Transversalen der jedem Raumpunkt ein-eindeutig zugeordneten Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten (TK) Komplexes und des ihm zugeordneten (NK) Komplexes definieren. Man sieht also, dass jedem Raumpunkt je ein Strahl der Strahlkomplexe (TK), (MK), (NK) und (RK) eines Polarraumbüschels zugeordnet ist, und jedem Polarraumbüschel ist nicht nur ein (TK) Komplex, ein (MK) Komplex und ein (NK) Komplex zugeordnet und durch ihn bestimmt, sondern immer auch ein (RK) Komplex.

Es seien die einem Raumpunkt in den (TK), (MK), (NK) und (RK) Komplexen zugeordneten Strahlen mit p, m, n und r bezeichnet. Auf Grund unserer Betrachtungen gilt, dass $n \perp (pm)$, $r \perp (mn)$ und $m \perp (rn)$ ist. Durch die Bezeichnung (pm) ist die Ebene der Geraden p, m gemeint usw.

Man wähle beliebig im Raum einen Punkt T und im Inzidenzflächenbüschel 2. Grades Π_n des Polarraumbüschels (Π_n) eine Fläche φ. Die den Punkt T enthaltenden Berührungsebenen der Fläche φ hüllen einen Kegel 2. Grades λ ein, der diese Fläche längs ihres Schnittes l mit der Polarebene τ des Pols T, bezüglich dieser Fläche φ, berührt. Die den Punkten des Kegelschnittes l in dem (TK) Komplex unseres Polarraumbüschels (Π_n) zugeordneten Geraden bilden offensichtlich eine Regelfläche 4. Grades, was folgendermassen bewiesen werden kann: Die den Punkten der Polarebene τ im (TK) Komplex zugeordneten Geraden sind Strahlen der Bisekantenkongruenz (13) derjenigen Raumkurve k^3 3. Ordnung, die durch die Pole der Ebene τ bezüglich aller Inzidenzflächen des Polarraumbüschels (Π_n) gebildet ist. Auf dieser Raumkurve k^3 befindet sich selbstverständlich auch der Punkt T. Man wähle beliebig auf dem Kegelschnitt l in der Ebene τ zwei Punkte V_1 und V_2, die Scheitel zweier derartig projektiv zugeordneten Strahlbüschel $(V_1) \barwedge (V_2)$ sein sollen, deren Erzeugnis der Kegelschnitt l ist. Diesen zwei projektiv zugeordneten Strahlbüscheln (V_1) und (V_2) in der Ebene τ sind in der erwähnten Bisekantenkongruenz (13) der Raumkurve k^3 zwei projektiv zugeordnete Regelflächenbüschel 2. Grades zugeordnet, für welche die Raumkurve k^3 ein gemeinsamer Teil der beiden Grundkurven 4. Ordnung I. Art dieser beiden Regelflächenbüschel 2. Grades ist. Jede dieser zwei Raumkurven 4. Ordnung enthält also nur noch eine Gerade, die in dem (TK) Komplex den Scheiteln V_1, V_2 der Strahlbüschel (V_1), (V_2) zugeordnet sind. Den Punkten jedes Strahles des Strahlbüschels (V_1), bzw. (V_2) ist, wie bekannt, ein Erzeugendensystem der diesem Strahl zugeordneten Regelfläche zugeordnet. Wegen $(V_1) \overline{\wedge} (V_2)$ in der Ebene τ sind auch die diesen Strahlbüscheln zugeordneten Regelflächenbüschel projektiv zugeordnet, deren Erzeugnis also, wie bekannt, eine Fläche 4. Ordnung ist. Jedes Paar zugeordneter Regelflächen 2. Grades in diesen zwei projektiv zugeordneten Regelflächenbüscheln durchdringt sich in der Raumkurve k^3 3. Ordnung und noch in je einer Geraden, die sich auf der gesuchten Fläche 4. Ordnung befindet. Jede derartige Gerade ist auch eine Bisekante der Raumkurve k^3, da sie im (TK) Komplex, resp. in der Strahlenkongruenz (13), dem auf dem Kegelschnitt l sich befindenden Schnittpunkt zweier zugeordneten Strahlen der Strahlbüschel (V_1), (V_2) zugeordnet ist. Das Erzeugnis dieser zwei projektiv zugeordneten Regelflächenbüschel 2. Grades ist also eine Regelfläche 4. Grades.

Das Erzeugnis zweier projektiv zugeordneten Kurvenbüschel 2. Grades ist, wie bekannt, eine Kurve 4. Ordnung. Werden zwei in einer Ebene projektiv zugeordnete Kurvenbüschel 2. Grades so gegeben, dass sie einen, zwei oder drei gemeinsame Grundpunkte haben, wird das Erzeugnis derartiger zwei projektiv zugeordneter Kurvenbüschel 2. Grades eine Kurve 4. Ordnung, die in den gemeinsamen Grundpunkten Doppelpunkte hat.

Das Erzeugnis unserer zwei vorher beschriebenen projektiv zugeordneten Regelflächenbüschel 2. Grades, deren beide Grundkurven 4. Ordnung I. Art die Raumkurve k^3 3. Ordnung als einen Teil dieser Grundkurve 4. Ordnung enthalten, muss also eine Regelfläche 4. Grades mit doppelter Raumkurve k^3 3. Ordnung sein, da jeder Ebenenschnitt dieser Regelfläche, auf Grund des vorher bei Ebenenkurven 4. Ordnung Erwähnten, eine Kurve 4. Ordnung mit drei Doppelpunkten auf der Raumkurve k^3, also vom Geschlecht Null, ist. Zwei dieser Doppelpunkte können selbstverständlich auch konjugiert imaginär sein, während der dritte immer reell ist. Dass die den Punkten des Kegelschnittes l im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen in den Berührungsebenen des Berührungskegels (Tl) liegen, ist offensichtlich, da die Pole der Berührungsebenen einer Fläche 2. Grades bezüglich dieser Fläche deren Berührungspunkte sind. Es folgt also, dass der Berührungskegel (Tl) der Fläche auch gleichzeitig ein Berührungskegel der erzeugten Regelfläche 4. Grades ist, deren Erzeugende die den Punkten des Kegelschnittes l im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen sind. Man bezeichne diese Regelfläche 4. Grades mit K. Wird also in jedem Punkt des Kegelschnittes l auf die ihm im (TK) Komplex zugeordnete Gerade eine lotrechte Gerade o gezogen, die in der diesen Punkt enthaltenden Berührungsebene des Kegels (Tl), resp. der Regelfläche K 4. Grades, wie wir vorher sahen, liegt, so sind alle derartigen Geraden o Strahlen des betrachteten Tangentialkurzwegekomplexes unseres Polarraumbüschels (Π_n). Es fragt sich jetzt, wie viele dieser Geraden o den Punkt T enthalten?

Man ziehe auf die Erzeugenden der Regelfläche K, also auf die den Punkten des Kegelschnittes l im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen, die den Punkt T enthaltenden und diese Erzeugenden kreuzenden Normalen. Die Fusspunkte dieser den Punkt T enthaltenden Normalen liegen, wie bekannt, auf der bekannten Fusspunktkurve des Pols T auf der Regelfläche K, die 4. Grades ist. Diese Fusspunktkurve ist also eine Raumkurve 8. Ordnung. Alle derartigen den Punkt T enthaltenden Normalen bilden also einen Strahlkegel 8. Grades, wenn sich der Scheitel (Pol) T nicht auf der Regelfläche K, also auch nicht auf dieser Fusspunktkurve, befindet. Die gemeinsamen Erzeugenden dieses Kegels 8. Grades und des Kegels (Tl), der 2. Grades ist, also deren 16, sind diejenigen Strahlen des unserem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten und von uns betrachteten Kurzwegekomplexes, die den Punkten des Kegelschnittes l in der Ebene τ zugeordnet sind und den Punkt T enthalten. Der Berührungskegel (Tl) der Fläche φ ist indessen, wie schon erwähnt, auch Berührungskegel der Regelfläche K 4. Grades. Dieser Berührungskegel 2. Grades kann also den oben erwähnten Kegel 8. Grades mit demselben Scheitel nur höchstens längs 8 Erzeugenden berühren, da durch die Berührung in jeder dieser acht Erzeugenden zwei unendlich nahe Erzeugende dieser zwei Kegel zusammenfallen. Bei diesen Betrachtungen muss aber auch folgendes bemerkt werden. Der Punkt T befindet sich auf der Raumkurve k^3 3. Ordnung, die, wie wir sahen, Doppelkurve der Regelfläche K 4. Grades ist. Die Fusspunktkurve 8. Ordnung des Pols T bezüglich dieser Regelfläche läuft also zweimal durch diesen Punkt T, woraus offensichtlich folgt, dass dieser Punkt ein Doppelpunkt dieser Fusspunktkurve 8. Ordnung ist. Die Verbindungsgeraden des Punktes T und der anderen Punkte dieser Fusspunktkurve 8. Ordnung bilden also einen Kegel 6. Grades. Der oben erwähnte Berührungskegel (Tl) kann also den Kegel 6. Grades mit dem Scheitel T und der Fusspunktkurve 8. Ordnung höchstens in sechs Erzeugenden berühren. Der Punkt T kann also höchstens 6 Strahlen des Tangentialkurzwegekomplexes (RK) unseres Polarraumbüschels (Π_n) enthalten, die den auf dem Kegelschnitt l der Ebene liegenden Punkten zugeordnet sind.

Die dem Pol T bezüglich aller Inzidenzflächen des Büschels (Π_n) zugeordneten Polarebenen bilden das bekannte Ebenenbüschel, dessen Achse p die diesem Pol im (TK) Komplex zugeordnete Gerade ist. Was für die Ebene τ dieses Ebenenbüschels gilt, gilt für jede Ebene τ_n dieses Ebenenbüschels der Geraden p. Jede Ebene τ_n dieses Ebenenbüschels der Geraden p ist die Polarebene des Pols T bezüglich einer Fläche φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n, die durch einen Strahlkegel (Tl_n) 2. Grades mit dem Scheitel T längs ihrer Schnittkurve l_n mit ihrer dem Pol T zugeordneten Polarebene τ_n berührt wird. Auf jedem derartigen Strahlkegel (Tl_n) 2. Grades befinden sich also 6 Strahlen unseres (RK) Tangentialkurzwegekomplexes.

Innerhalb unserer Betrachtungen muss aber auf dieser Stelle folgendes hervorgehoben werden: Die in der Ebene (Tp) liegenden Strahlen des Punktes T berühren, wie bekannt, im Punkt T eine Inzidenzfläche 2. Grades des Büschels Π_n, und in ihren Schnittpunkten mit der Geraden p noch eine andere Fläche dieses Büschels, wobei die Gerade p die Polarebenen aller Flächen des Büschels Π_n bezüglich des Pols T enthält. Also auch der dem Punkt T zugeordnete und ihn enthaltende Strahl des dem Büschel Π_n zugeordneten (RK) Komplexes, der die Gerade p rechtwinklig schneidet, berührt in diesem Schnittpunkt eine weitere Fläche des Büschels Π_n. Den Punkt T bezeichne man als Ausgangspunkt des ihm in (RK) Komplex zugeordneten Strahles, und dessen Schnittpunkt auf der Geraden p sei dessen Endpunkt. In unseren bisherigen Betrachtungen sahen wir, dass die den den Punkt T enthaltenden Strahlen des (RK) Komplexes zugeordneten Punkte auf den Kegelschnitten l_n der Polarebenen τ_n die Ausgangspunkte aller dieser den Punkt T enthaltenden Strahlen sind. Die diesen Strahlen zugeordneten Endpunkte befinden sich auf den diesen Punkten der Kegelschnitte l_n zugeordneten Erzeugenden der erwähnten Regelflächen K 4. Grades.

Für irgendeine Gerade g des Punktes T kann folgenderweise bewiesen werden, dass diese Gerade g als Erzeugende zu einem der Strahlenkegel (Tl_n) gehören muss. Die Gerade g berührt, wie alle anderen Geraden des Raumes, zwei Flächen des Inzidenzflächenbüschels Π_n. Durch einen dieser Berührungspunkte F sei in dem Büschel Π_n die Fläche ψ bestimmt. Die durch diesen Punkt und durch den im (TK) Komplex dem Punkt T zugeordneten Strahl p bestimmte Ebene ist die Polarebene des Pols T bezüglich der Fläche ψ, die sich in dem vorher beschriebenen Ebenenbüschel τ_n der Geraden p befindet. Die Gerade g gehört also als Erzeugende dem der Fläche ψ zugeordneten Kegel (Tl_n) 2. Grades an. Man sieht also, dass es keinen den Punkt T enthaltenden Strahl des (RK) Komplexes gibt, der nicht eine Erzeugende eines der Strahlenkegel (Tl_n) mit dem Scheitel T wäre.

Da alle Strahlkegel (Tl_n) zweiten Grades sind, kann der geometrische Ort aller den Punkt T enthaltenden Strahlen des betrachteten (RK) Komplexes nur ein Kegel 3. Grades sein. Für unseren (RK) Tangentialkurzwegekomplex gilt daher folgender Satz:

Der einem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordnete (RK) Tangentialkurzwegekomplex hat den Grad drei.

Dieser Satz kann auch auf folgende Weise ausgesprochen werden:

In jedem Polarraumbüschel ist jedem Punkt des Raumes ein Strahl des durch dieses Büschel bestimmten tetraedralen quadratischen Komplexes und ein Strahl des Komplexes der Normalen der Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels zugeordnet. Die ∞^3 kürzesten Transversalen aller derartigen den Raumpunkten zugeordneten Strahlpaare der zwei erwähnten Strahlkomplexe, bilden einen neuen diesem Polarraumbüschel zugeordneten und durch ihn bestimmten Strahlkomplex 3. Grades.

Diejenigen Tangenten der Inzidenzflächen in jedem Raumpunkt, die den diesem Punkt zugeordneten Strahl des neuen (RK) Strahlkomplexes senkrecht schneiden, bilden den dem Polarraumbüschel zugeordneten und durch ihn bestimmten Majcenschen kubischen Strahlkomplex.

Jeder Strahl der Hauptpunkte des Polarraumbüschels (Π_n) ist ein diesem Punkt zugeordneter Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Komplexes (TK), und ein Strahl des diesem Büschel zugeordneten Normalenkomplexes (NK). Es folgt also, dass alle Strahlen dieser Hauptpunkte auch diesen Punkten zugeordnete Strahlen des (RK) Komplexes sind. Hieraus folgt ferner, dass alle ∞^3 Kegel 3. Grades der die Raumpunkte enthaltenden Strahlen dieses (RK) Tangentialkurzwegekomplexes die vier Hauptpunkte des Polarraumbüschels (Π_n) enthalten.

II. Eine besondere Strahlkongruenz im (RK) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n). Es sei eine Fläche φ im Inzidenzflächenbüschel Π_n eine Regelfläche 2. Grades. Die den Punkten einer ihrer Erzeugenden i zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex des Büschels (Π_n) bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem einer Regelfläche ε 2. Grades. Da die Berührungsebenen der Regelfläche φ in den Punkten der Erzeugenden i diese Erzeugende enthalten, befindet sich die Erzeugende i auch auf der Regelfläche ε, und gehört zu ihrem zweiten Erzeugendensystem, da die den Punkten der Erzeugenden i zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex in den Berührungsebenen der Fläche φ in diesen Punkten liegen. Jedem Punkt der Erzeugenden i, die zu dem zweiten Erzeugendensystem der Regelfläche ε gehört, isto also eine Erzeugende dieser Regelfläche in ihrem ersten Erzeugendensystem ein-eindeutig zugeordnet. Die aus diesen Punkten der Erzeugenden i auf die derartig ihnen zugeordneten Erzeugenden des ersten Erzeugendensystems gefällten und sie schneidenden Lote sind Strahlen unseres (RK) Komplexes.

Man betrachte jetzt den asymptotischen Kegel 2. Grades der Regelfläche ε. Eine Erzeugende dieses Kegels ist, offensichtlich, mit der Erzeugenden i parallel. Legt man durch den Scheitel dieses asymptotischen Kegels eine auf die Erzeugende i senkrechte Ebene, so wird diese Ebene diesen Kegel in zwei seinen Erzeugenden schneiden, die auch zusammenfallen können, oder konjugiert imaginär sind. Es folgt also, dass im ersten Erzeugendensystem der Regelfläche ε zwei Erzeugende bestehen, die die Erzeugende i des zweiten Systems senkrecht schneiden. Hieraus folgt ferner, dass auf der Erzeugenden i zwei Ausgangspunkte bestehen, deren zugeordnete Strahlen im (RK) Komplex in diese Erzeugende i fallen. Man sieht also, dass die Erzeugenden aller in einem Flächenbüschel Π_n 2. Grades sich befindenden Regelflächen Strahlen des diesem Flächenbüschel Π_n zugeordneten (RK) Komplexes sind. Da jeden Punkt des Raumes nur eine Fläche eines Flächenbüschels 2. Grades enthält, also dieser Punkt nur zwei Erzeugende enthält, und da jede Ebene des Raumes drei Flächen dieses Büschels berührt, also 6 Erzeugende dieser Flächen enthält, ist es klar, dass es sich hier um die bekannte Kongruenz der Bisekanten der Grundkurve c^4 des Büschels Π_n handelt, die 2. Ordnung und 6. Klasse ist.

In unseren bisherigen Betrachtungen sahen wir, dass jedem Punkt P des Raumes ein Strahl o des (RK) Komplexes zugeordnet ist. Dieser Strahl berührt in diesem Punkt die diesem Punkt zugeordnete Fläche φ des Inzidenzflächenbüschels Π_n und schneidet den diesem Punkt im (TK) Komplex des Büschels Π_n zugeordneten Strahl p senkrecht. Im Schnittpunkt P_1 dieser zwei Strahlen berührt, wie bekannt, dieser Strahl o noch eine Fläche φ_1 des Büschels Π_n. In unseren Ausführungen muss also Rücksicht auf die Tatsache genommen werden, dass jedem Strahl o des (RK) Komplexes zwei Punkte P, P_1 zugeordnet sind. Den Punkt P haben wir schon als Ausgangspunkt des Strahles o bezeichnet, während der Punkt P_1 sein Endpunkt ist. Offensichtlich befinden sich auf jeder Raumgeraden zwei derartige Punkte, da jede Gerade des Raumes zwei Flächen des Büschels Π_n berührt. In unseren eben ausgeführten Betrachtungen sahen wir auch, dass auch auf jedem der zwei den Punkt P enthaltenden Strahlen der Bisekantenkongruenz der Grundraumkurve c^4 des Büschels Π_n sich zwei diesen Strahlen des (RK) Komplexes zugeordnete Punkte befinden.

III. Die Kurve der Punkte, die den einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des (RK) *Komplexes zugeordnet sind.* In unseren bisherigen Betrachtungen sahen wir, dass die Strahlen des einem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (RK) Komplexes diejenigen Tangenten der Inzidenzflächen des Büschels (Π_n) sind, welche die den Berührungspunkten dieser Tangenten zugeordneten Strahlen in dem (TK) Komplex des Büschels (Π_n) rechtwinklig schneiden. Jeder Raumpunkt ist der Berührungspunkt der Berührungsebene nur einer Inzidenzfläche des Polarraumbüschels (Π_n) und der diesem Berührungspunkt als Ausgangspunkt zugeordnete Strahl des (TK) Komplexes des Büschels (Π_n) liegt in der Berührungsebene dieses Berührungspunktes. Jedem Raumpunkt als Ausgangspunkt ist also tatsächlich nur ein Strahl des (RK) Komplexes zugeordnet.

Die Berührungspunkte aller einen Raumpunkt T enthaltenden Tangenten aller Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades bilden, wie bekannt, eine Fläche 3. Ordnung, die auch diesen Punkt enthält, und die durch dieses Flächenbüschel Π_n 2. Grades und das ihm projektiv zugeordnete Ebenenbüschel der Polarebenen τ_n des Pols T bezüglich der Flächen 2. Grades im Büschel Π_n erzeugt ist. Da die in diesem Polarraumbüschel den Punkt T enthaltende Ebene τ die Polarebene dieses Punktes bezüglich derjenigen Fläche φ des Büschels Π_n ist, die diesen Punkt T enthält, berührt diese Ebene τ die Fläche φ in diesem Punkt T. Wie bekannt, schneidet jede Berührungsebene einer Fläche 2. Grades diese Fläche in einem Paar reeller oder konjugiert imaginärer Erzeugenden. Da die Berührungsebenen einer Regelfläche 2. Grades in den Punkten einer ihrer Erzeugenden diese Erzeugende enthalten, enthält die dem Punkt T auf die eben erwähnte Weise zugeordnete Fläche 3. Ordnung die zwei den Punkt T enthaltenden Erzeugenden der Fläche φ, die, wie gesagt, den Punkt T enthalten und im Inzidenzflächenbüschel Π_n sich befinden.

Jede Gerade des Punktes T berührt, wie bekannt, zwei Flächen des Inzidenzflächenbüschels Π_n in den Doppelpunkten der involutorischen Punktreihe, in deren Punktepaaren die Flächen dieses Büschels jede dieser Geraden schneiden. Die Berührungspunktepaare der den Punkt enthaltenden Strahlen des (RK) Komplexes, die, wie bekannt, einen Strahlkegel 3. Grades bilden, bilden also einen geometrischen Ort, der sich auf diesem Kegel 3. Grades und auf der dem Punkt T zugeordneten Berührungspunktefläche 3. Ordnung befinden muss. Die erwähnten Berührungspunktepaare auf den Erzeugenden des (RK) Komplexstrahlkegels 3. Grades müssen also auf der Durchdringungskurve k^9 9. Ordnung dieses Kegels und der erwähnten Fläche 3. Ordnung liegen. Wir sahen aber vorher, dass auf dieser dem Punkt T auf die beschriebene Weise zugeordneten Fläche 3. Ordnung zwei den Punkt T enthaltende Gerade liegen, die Erzeugende der den Punkt T enthaltenden Fläche φ 2. Grades im Büschel Π_n sind. Vorher aber in der Abt. II. dieser Arbeit sahen wir, dass diese zwei Erzeugenden auch Strahlen des dem Inzidenzflächenbüschel Π_n zugeordneten (RK) Komplexes sind, also dadurch auch Erzeugende des Kegels (Tk) 3. Grades, der durch die den Punkt T enthaltenden Strahlen des (RK) Komplexes gebildet wird. Die eben erwähnte Durchdringungskurve k^9 zerfällt also in diese zwei Erzeugenden, und in eine Raumkurve k^7 7. Ordnung. Da dem Punkt T als Ausgangspunkt ein Strahl o des (RK) Komplexes zugeordnet ist, liegt offensichtlich der Punkt T auf dieser Raumkurve.

Die Ebene τ dieser zwei den Punkt T enthaltenden Erzeugenden ist, wie schon erwähnt, die Berührungsebene der Fläche φ im Punkt T, in der sich auch der dem Punkt T im (TK) Komplex zugeordnete Strahl p befindet. Dieser Strahl p befindet sich aber auch auf der oben erwähnten dem Punkt T zugeordneten Fläche 3. Ordnung. Der dem Ausgangspunkt T zugeordnete und ihn enthaltende Strahl o des (RK) Komplexes schneidet, wie schon mehrmals erwähnt, den Strahl p senkrecht, und in diesem Schnittpunkt berührt er, wie bekannt, noch eine Fläche des Büschels Π_n. Da der Punkt T der Scheitel des kubischen Kegels (Tk) ist, ist er ein dreifacher Punkt der gesamten Durchdringungskurve k^9 9. Ordnung dieses Kegels mit der dem Punkt T zugeordneten Fläche 3. Ordnung. Da aber diese Raumkurve 9. Ordnung in zwei den Punkt T enthaltende Gerade und eine Raumkurve k^7 7. Ordnung zerfällt, bleibt dieser Punkt T auf dieser Raumkurve k^7 nur als einer ihrer einfachen Punkte. Auf jeder Erzeugenden des Kegels (Tk) 3. Grades, die ein Strahl des dem Büschel Π_n zugeordneten (RK) Komplexes ist, befindet sich ihr Ausgangspunkt und ihr Endpunkt, die beide auf der Raumkurve k^7 liegen müssen, da in diesen zwei Punkten dieser Strahl zwei Flächen des Büschels Π_n berührt. Die Erzeugenden des Kegels (Tk) sind also Trisekanten der Raumkurve k^7, die alle deren Punkt T enthalten. Die Trisekanten einer Raumkurve 7. Ordnung, die einen ihrer Punkte enthalten, bilden einen Kegel 3. Grades, was auch, wir sahen, in unserem Fall stimmt.

In unseren in Abt. I. durchgeführten Betrachtungen sahen wir, dass in jeder Ebene τ_n des Ebenenbüschels der Geraden p, die als Strahl im (TK) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) einem Raumpunkt T zugeordnet ist, sich sechs Punkte befinden, deren im (RK) Komplex zugeordnete Strahlen den Punkt T enthalten, und diese Punkte die Ausgangspunkte dieser Strahlen sind. Alle diese Punkte sind Berührungspunkte auf den Flächen des Büschels Π_n mit den diesen Punkten zugeordneten, eben besprochenen Strahlen des (RK) Komplexes, die den Punkt T enthalten und den bekannten (RK) Komplexstrahlkegel (Tk) 3. Grades bilden. Alle diese in den Ebenen τ_n sich befindenden Punktsextupel liegen also auf der vorher ausgeführten und auf diesem kubischen Kegel sich befindenden Raumkurve k^7, die, wie bekannt, 7. Ordnung ist. Der siebente Schnittpunkt aller dieser Ebenen τ_n mit dieser Raumkurve k^7 ist der Fusspunkt des dem Punkt T zugeordneten (RK) Komplexstrahles o auf dem dem Punkt T im (TK) Komplex zugeordneten Strahl p, der alle diese τ_n Ebenen enthält. Es ist offensichtlich, dass jeder Punkt der Raumkurve k^7 in einer Ebene τ_n der Geraden p sich befindet, also jeder Punkt dieser Raumkurve k^7 der Ausgangspunkt des diesem Punkt zugeordneten (RK) Komplexstrahles ist. Da aber jeder Ausgangspunkt auf jedem (RK) Komplexstrahl auf diesem Strahl den diesem Ausgangspunkt zugeordneten Endpunkt hat, und alle diese Endpunkte sich auch auf der Raumkurve k^7 befinden, folgt, dass jeder Punkt der Raumkurve k^7 der Ausgangspunkt und der Endpunkt des diesem Punktepaar zugeordneten (RK) Komplexstrahles ist. Alle derartigen Ausgangs- und End-Punktepaare auf der Raumkurve k^7 des (TK) Strahlkegels 3. Ordnung sind also involutorisch zugeordnet. Was für den Punkt T gilt, gilt selbstverständlich für jeden Punkt des Raumes. Für unseren (RK) Komplex ist also folgender Satz gültig:

Jedem Punkt des Raumes ist nur ein Strahl des einem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (RK) Komplexes zugeordnet, während sich auf jedem Strahl dieses Komplexes zwei diesem Strahl durch diesen (RK) Komplex zugeordnete Punkte befinden.

Der Punkt T und der Fusspunkt seines (RK) Komplexstrahles o auf der Geraden p, wie auch die zwei vorher in Abt. II. erwähnten Fusspunkte auf den Erzeugenden der den Punkt T enthaltenden Inzidenzfläche φ sind offensichtlich auch involutorisch zugeordnet.

Auf Grund aller dieser Betrachtungen und Schlüsse gilt also folgender Satz:

Die einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des (RK) Komplexes eines Polarraumbüschels (Π_n) bilden, wie bekannt, einen Kegel 3. Grades. Alle diesen (RK) Komplexstrahlen durch den (RK) Komplex zugeordneten Punktepaare bilden eine Raumkurve 7. Ordnung, die auch diesen Raumpunkt als einfachen Punkt enthält.

Da jeder (*RK*) Komplexstrahlkegel und jede dem Scheitel dieses Kegels in bekannter Weise zugeordnete Fläche 3. Ordnung die vier Hauptpunkte A, B, C, D des Polarraumbüschels (Π_n) enthalten, enthält jede der ∞^3 den Raumpunkten auf die beschriebene Weise zugeordnete Raumkurve k^7 alle diese vier Hauptpunkte des Büschels Π_n.

Im Laufe unserer Betrachtungen konnte leicht bemerkt werden, dass durch den (*RK*) Strahlkomplex eines Polarraumbüschels im Raum eine ein-eindeutige Punktverwandschaft bestimmt ist. Durch diese ein-eindeutige Raumpunktverwandschaft wird weiterhin eine Raumtransformation gebildet, die wir späterhin etwas näher betrachten werden.

IV. Der geometrische Ort der den Punkten einer Geraden zugeordneten Strahlen im (RK) Komplex. Die den Punkten einer Geraden p zugeordneten Strahlen im (*TK*) Komplex unseres Polarraumbüschels (Π_n) bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades. Die in den Punkten einer Geraden p auf die diesen Punkten zugeordneten Erzeugenden dieser Regelfläche 2. Grades gezogenen Lotrechten sind Strahlen des dem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (*RK*) Komplexes, und bilden den gesuchten geometrischen Geradenort, also eine Regelfläche. Das eben erwähnte, den Punkten der Geraden p zugeordnete Erzeugendensystem wird durch die unendlich ferne Ebene in einer unendlich fernen Punktreihe 2. Ordnung geschnitten. Die den Punkten dieser unendlich fernen Punktreihe 2. Ordnung zugeordneten unendlich fernen Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden ein Geradenbüschel 2. Klasse. Jedem Punkt der Geraden p ist auf diese Weise ein-eindeutig eine Gerade dieses unendlich fernen Geradenbüschels 2. Klasse zugeordnet. Jede Ebene eines derartigen Punkt-Geradenpaares steht auf derjenigen Ebene senkrecht, die durch denselben Punkt und durch die ihm in dem erwähnten Erzeugendensystem zugeordnete Erzeugende, die sein zugeordneter Strahl im (*TK*) Komplex ist, bestimmt ist. Jedes derartig jedem Punkt der Geraden p zugeordnete Paar senkrechter Ebenen schneidet sich in einem Strahl des (*RK*) Komplexes unseres Polarraumbüschels (Π_n), der diesen Punkt der Geraden p enthält. Alle solchen, den Punkten der Geraden p als Ausgangspunkten zugeordneten Schnittgeraden bilden die gesuchte Regelfläche. Die durch die Punkte der Geraden p

und die diesen Punkten zugeordneten Strahlen des *(TK)* Komplexes, resp. Erzeugenden in dem erwähnten Erzeugendensystem bestimmten Ebenen bilden, wie bekannt, ein kubisches Ebenengewinde. Die durch dieselben Punkte der Geraden p und durch die diesen Punkten auf die vorher beschriebene Weise zugeordneten unendlich fernen Geraden des unendlich fernen Geradenbüschels 2. Klasse bestimmten Ebenen, bilden ein zweites kubisches Ebenengewinde. Wir haben also zwei Torsen 3. Klasse mit eineindeutig zugeordneten Ebenenpaaren, deren Erzeugnis eine Regelfläche 6. Grades ist. Den Ebenen dieser zweiten Torse sind ein-eindeutig die Erzeugenden des erwähnten Erzeugendensystems der Regelfläche 2. Grades zugeordnet, deren Erzeugnis also eine Raumkurve $(1.2 + 3.1) = 5$. Ordnung ist. Jedem Punkte dieser Raumkurve ist ein-eindeutig ein Punkt der Geraden p zugeordnet, und das Erzeugnis dieser ein-eindeutig zugeordneten Punktreihen ist die gesuchte und schon erwähnte Regelfläche 6. Grades. Es gilt also folgender Satz:

Diejenigen Strahlen des einem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (RK) Komplexes, deren ein Punkt des ihnen zugeordneten Punktepaares auf einer Geraden p liegt, bilden eine Regelfläche 6. Grades, auf der die Gerade p eine einfache Gerade ist. Die zweiten zugeordneten Punkte dieser Strahlen bilden eine Raumkurve 5. Ordnung.

Wenn die Gerade p ein Strahl des *(RK)* Komplexes ist, dann wird sie eine Doppel- und Torsalgerade dieser Regelfläche, die der bekannten Doppelgeraden auf einer Cayleyschen Regelfläche 3. Grades entspricht.

V. Der geometrische Ort der den in einer Ebene liegenden Strahlen des (RK) Komplexes zugeordneten Punktepaare. Man wähle beliebig im Raum eine Ebene α und in ihr eine Gerade a. Den in der Ebene α liegenden Punkten sind in dem *(TK)* Komplex unseres Polarraumbüschels (Π_n) die Bisekanten derjenigen Raumkurve 3. Ordnung zugeordnet, die durch die Pole der Ebene α bezüglich aller Flächen des Inzidenzflächenbüschels Π_n gebildet wird. Den Punkten der Geraden a ist in dieser Bisekantenkongruenz (13) ein Erzeugendensystem *(S)* einer Regelfläche 2. Grades zugeordnet. Die aus den Punkten der Geraden a auf die ihnen zugeordneten Strahlen dieses Erzeugendensystems gefällten Senkrechten sind, wie wir schon vorher sahen, Strahlen des *(RK)* Komplexes. Wie viele dieser Strahlen in der Ebene α liegen, in so vielen Punkten wird die Gerade a den gesuchten geometrischen Ort der zugeordneten Ausgangspunkte der in der Ebene α liegenden Strahlen des *(RK)* Komplexes schneiden. Diese Strahlen hüllen in der Ebene α, wie bekannt, eine Kurve 3. Klasse ein. Im vorigen Abschnitt dieser Arbeit sahen wir, dass die aus den Punkten der Geraden *a* auf die ihnen zugeordneten Erzeugenden des Erzeugendensystems (*S*) gefällten Lote eine Regelfläche 6. Grades bilden. Die Fusspunkte dieser Lote auf den betreffenden Erzeugenden dieser Regelfläche, welche die Endpunkte dieser Lote als (*RK*) Komplexstrahlen sind, bilden, wie schon erwähnt, eine Raumkurve 5. Ordnung. Durch die Ebene α wird diese Raumkurve in 5 Punkten geschnitten, also liegen in dieser Ebene 5 Strahlen des (*RK*) Komplexes, deren zugeordnete Punkte auf der Geraden *a* liegen. Was für die Gerade *a* gilt, gilt selbstverständlich für jede Gerade der Ebene α. Es folgt also, dass jede Gerade der Ebene α mit dem geometrischen Ort der zugeordneten Punktepaare der in dieser Ebene liegenden Strahlen des (*RK*) Komplexes 5 gemeinsame Punkte hat. Der gesuchte geometrische Ort ist also eine Kurve 5. Ordnung, und es gilt folgender Satz:

Die den in einer Ebene liegenden und eine Kurve 3. Klasse umhüllenden Strahlen des (RK) Komplexes eines Polarraumbüschels (Π_n) zugeordneten Punktepaare bilden eine Kurve 5. Ordnung.

Auf Grund der Tatsache, dass die den einen Punkt des Raumes enthaltenden Strahlen des (*RK*) Komplexes zugeordneten Punktepaare auf einer Raumkurve 7. Ordnung liegen, und dass die den in einer Ebene liegenden Strahlen dieses Komplexes zugeordneten Punktepaare eine Kurve 5. Ordnung in dieser Ebene bilden, folgt offenbar folgender Satz:

Diejenigen Strahlen des (RK) Komplexes eines Polarraumbüschels, deren ein Punkt des ihnen zugeordneten Punktepaares in einer Ebene liegt, bilden eine Strahlenkongruenz 7. Ordnung und 5. Klasse.

VI. Der geometrische Ort der zugeordneten Punktepaare der eine Gerade p schneidenden Strahlen des (RK) Komplexes. Die eine Gerade *p* schneidenden Strahlen des (*RK*) Komplexes bilden eine Kongruenz 3. Grades. Auf dieser zweidimensionalen stetigen Menge der Strahlen des (*RK*) Komplexes befindet sich die zweidimensionale stetige Punktmenge der diesen Strahlen zugeordneten Punktepaare, die also eine Fläche bilden. Welcher Ordnung ist diese Fläche?

In jeder Ebene der Geraden *p* hüllen, wie bekannt, die Strahlen des (*RK*) Komplexes eine Kurve 3. Klasse ein, und die diesen Strahlen durch diesen Komplex in dieser Ebene zugeordneten Punkte bilden eine Kurve 5. Ordnung. Alle in diesen Ebenen liegenden Strahlen des (*RK*) Komplexes schneiden selbstverständlich die Gerade *p*. Man weiss ferner, dass jedem Punkt der Geraden *p* ein Strahl des (*RK*) Komplexes zugeordnet ist, der diesen Punkt enthält, also diese Gerade *p* auch schneidet. Da jeder Punkt des Raumes nur einem Strahl des (*RK*) Komplexes zugeordnet ist, folgt ferner, dass die Gerade p eine einfache Gerade der gesuchten Fläche ist, und dass jede Ebene dieser Geraden die gesuchte Fläche in einer Kurve 5. Ordnung schneidet. Jede die Gerade p schneidende Gerade schneidet also die gesuchte Fläche in 6 Punkten. Es gilt daher auch folgender Satz:

Die den eine Gerade p schneidenden Strahlen des (*RK*) *Komplexes eines Polarraumbüschels durch diesen Komplex zugeordneten Punktepaare bilden eine Fläche 6. Ordnung, auf der diese Gerade p eine einfache Gerade ist.*

Die in jeder Ebene der Geraden p liegende Kurve 5. Ordnung dieser Fläche 6. Ordnung schneidet diese Gerade in denjenigen Punkten, deren zugeordnete Strahlen im (*RK*) Komplex Erzeugende der vorher gefundenen Regelfläche 6. Grades sind, auf der die Gerade p auch eine einfache Gerade ist.

Wenn die Gerade p ein Strahl des (*RK*) Komplexes ist, enthalten die in allen Ebenen dieser Geraden liegenden Kurven 5. Ordnung das dieser Geraden zugeordnete und auf ihr liegende Punktepaar. Alle Geraden dieser zwei Punkte schneiden deswegen eine derartige Fläche 6. Ordnung nur noch in vier weiteren Punkten. Diese Punkte sind also Doppelpunkte dieser dem Strahl p zugeordneten Fläche.

VII. Über die durch ein Polarraumbüschel (Π_n) *bestimmte Raumtransformation.* Durch den (*RK*) Komplex eines Polarraumbüschels ist jedem Punkt des Raumes ein Strahl dieses Komplexes zugeordnet, aber auf jedem seiner Strahlen befinden sich, wie bekannt, zwei ihm durch diesen (*RK*) Komplex zugeordnete Punkte. Durch derartige ∞^3, auf den Strahlen des (*RK*) Komplexes sich befindende Punktepaare ist eine Raumtransformation bestimmt, die wir hier etwas eingehender betrachten möchten. In der Abt. IV dieser Arbeit haben wir gesehen, dass die den Punkten einer Geraden p zugeordneten Strahlen des (*RK*) Komplexes eine Regelfläche 6. Grades bilden, und die diesen Punkten der Geraden p auf den Erzeugenden dieser Regelfläche zugeordneten Punkte liegen auf einer Raumkurve 5. Ordnung.

Man betrachte jetzt eine Ebene α. Jedem Punkte dieser Ebene ist ein Strahl des (*RK*) Komplexes zugeordnet, und auf diesem Strahl befindet sich auch der seinem in der Ebene α sich befindenden Punkte zugeordnete Punkt. Alle derartig der Ebene α zugeordneten Strahlen des (*RK*) Komplexes bilden, wie wir sahen, eine Strahlkongruenz 7. Ordnung und

5. Klasse. Die Punktmenge der ∞^2 beschriebenen und ausserhalb der Ebene α sich befindenden Punkte auf den Strahlen dieser Kongruenz bildet eine Fläche, deren Ordnung wir auf folgende Weise bestimmen werden. Die den Punkten einer beliebigen Geraden a des Raumes durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte bilden, wie bekannt, eine Raumkurve 5. Ordnung, die die Ebene α in 5 Punkten schneidet. Auf der Geraden a befinden sich also 5 Punkte, deren durch den (RK) Komplex zugeordnete Punkte in der Ebene α liegen. Die Gerade a schneidet also die gesuchte Fläche in 5 Punkten, und kann deswegen nur 5-ter Ordnung sein. Durch die durch die Punktepaare auf den (RK) Komplexstrahlen bestimmte Raumtransformation wird also die Ebene α in eine Fläche 5. Ordnung transformiert. Es gilt also der Satz:

Durch die Paare der auf den Strahlen des (RK) Komplexes sich befindenden und durch diesen Komplex einander zugeordneten Punkte ist eine Raumtransformation 5. Ordnung bestimmt.

VIII. Der (RK) Tangentialkurzwegekomplex. Man nehme zwei Flächen A, B zweiten Grades, und auf der Fläche A einen Punkt P. Zwei Tangenten der Fläche A im Punkt P berühren auch die Fläche B. Diese zwei gemeinsamen Tangenten der Flächen A, B werden wir Tangentialwege der Flächen A, B für den Ausgangspunkt P nennen.

Man betrachte wieder das Inzidenzflächenbüschel Π_n 2. Grades eines Polarraumbüschels (Π_n). Jeder Punkt des Raumes liegt auf einer Fläche φ des Büschels Π_n und die Berührungsebene τ dieser Fläche in diesem Punkt P schneidet das Flächenbüschel Π_n in einem Kurvenbüschel 2. Grades. Die dem Punkt P zugeordnete Gerade p im (TK) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) liegt, wie bekannt, in der Berührungsebene τ. Jede Verbindungsgerade des Punktes P und eines Punktes der Geraden p ist eine derartige Gerade, die im Punkt P die Fläche φ berührt und in ihrem Punkt auf der Geraden p noch je eine weitere Fläche des Flächenbüschels Π_n, da die Gerade p die Polarebenen des Pols P bezüglich aller Flächen 2. Grades des Büschels Π_n enthält. Auf jeder dieser Verbindungsgeraden sind deren Schnittpunkt auf der Geraden p und der Punkt P Doppelpunkte der auf dieser Verbindungsgeraden liegenden, und durch die Schnittpunktepaare dieser Verbindungsgeraden und der Flächen des Büschels Π_n gebildeten involutorischen Punktreihen. Jede dieser Verbindungsgeraden des Punktes P berührt, wie bekannt, in diesen Doppelpunkten die Fläche φ und, wie schon erwähnt, noch eine Fläche des Büschels Π_n. Jede dieser Verbindungsgeraden ist also ein Tangentialweg der Fläche φ und noch einer Fläche des Büschels Π_n für den Ausgangspunkt P. Auf einer dieser Verbindungsgeraden liegt selbstverständlich der kürzeste Abstand dieser zwei Berührungspunkte, und das ist die in der Ebene τ auf die Gerade p senkrecht liegende Gerade, die den Punkt P enthält. Von allen ∞^1 Tangentialwegen des Ausgangspunktes P ist sicher dieser Senkrechte der kürzeste. Da man in jedem Punkt P des Raumes nur eine senkrechte Gerade auf die ihm zugeordnete Gerade p im (TK) Komplex ziehen kann, die diese Gerade p schneidet, folgt, dass jeder Raumpunkt als Ausgangspunkt einen kürzesten Tangentialweg enthält, und dass alle derartigen den Raumpunkten zugeordneten kürzesten Tangentialwege in einem Flächenbüschel 2. Grades unseren betrachteten (RK) Tangentialkurzwegekomplex bilden.

In unseren in dieser Arbeit durchgeführten Betrachtungen sahen wir aber, dass jeder Ausgangspunkt auf dem ihm zugeordneten Strahle des (RK) Komplexes auch Endpunkt des dem erwähnten Ausgangspunkte zugeordneten Endpunktes ist, da dieser Endpunkt auch als Ausgangspunkt des diesem Punktepaar zugeordneten (RK) Komplexstrahles betrachtet werden kann. Jede Gerade des Raumes ist Tangentialweg zweier Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Der geometrische Ort der kürzesten dieser Wege in diesem Flächenbüschel ist sein (RK) Komplex.

Der schon vorher angegebene Satz über den (RK) Komplex kann also auch auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Der (RK) Tangentialkurzwegekomplex 3. Grades eines Flächenbüschels 2. Grades, resp. eines Polarraumbüschels, ist der geometrische Ort der kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen dieses Flächenbüschels.

Auf Grund dieser Eigenschaften des betrachteten (RK) Komplexes könnte man in allen unseren bisherigen Sätzen anstatt »der Strahl des (RK) Komplexes« schreiben: »der kürzeste Tangentialweg zwischen den Flächen des Flächenbüschels Π_n«, und wir bekämen eine neue Form dieser Sätze, aber mit demselben Inhalt. Z. B. folgenden Satz:

Die Grenzpunkte aller kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, die im Raum eine Gerade schneiden, liegen auf einer Fläche 6. Ordnung.

Oder diesen Satz:

Die Endpunkte aller kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, deren Ausgangspunkte in einer Ebene liegen, liegen auf einer Fläche 5. Ordnung. Usw.

IX. Der (MK) Majcensche kubische Strahlkomplex als Komplex der Tangentialwege eines Flächenbüschels 2. Grades. Wie bekannt, berührt jeder Strahl des einem Flächenbüschel 2. Grades zugeordneten Majcenschen kubischen Komplexes eine Fläche dieses Flächenbüschels in seinem Zentralpunkt, und eine andere unendlich fern. Alle derartigen Tangentialwege sind also unendlich lang, und der Majcensche Komplex eines Flächenbüschels, resp. Polarraumbüschels, kann also auch auf folgende Weise definiert werden:

Die Geraden der unendlich langen Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, sind Strahlen des diesem Flächenbüschel 2. Grades zugeordneten Majcenschen kubischen Komplexes.

Mathematisches Institut
der Universität in Zagreb

Angenommen zur Veröffentlichung am 9. X. 1964. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

VILIM NIČE

GEOMETRIJSKO MJESTO NAJKRAĆIH DIRNIH PUTOVA MEĐU PLOHAMA PRAMENA PLOHA 2. STUPNJA

UVOD: Pramenom Π_n ploha 2. stupnja neka je zadan pramen polarnih prostora (Π_n) kojima su plohe Π_n incidentne. Polarne ravnine neke tačke P s obzirom na plohe pramena Π_n čine, kao što znamo, pramen ravnina, čiju os označimo s p. Svim tačkama prostora na taj način pridruženi pravci p čine poznati kvadratni tetraedralni komples, kojemu je glavni tetraedar zajednički autopolarni tetraedar svih ploha pramena Π_n. Ovaj komples označimo s (TK).

Nekom tačkom P i njoj pridruženim pravcem p položena ravnina α je također polarna ravnina pola P za jednu plohu pramena Π_n, ali koju ona dira u tački P. Budući da spojnica tačke P s bilo kojom tačkom na pravcu p probada plohe pramena Π_n u parovima tačaka (involutoran niz), kod kojih svaki takav par s tačkom P i sa sjecištem na pravcu p čine harmonijsku četvorku, to svaka takva spojnica dira jednu plohu pramena Π_n u tački P, a drugu njegovu plohu u njenu sjecištu s pravcem p, jer su te dvije tačke dvostruke tačke involutornih nizova, u kojima pravci p sijeku plohe pramena Π_n.

Spojnica tačke P s neizmjerno dalekom tačkom pravca p dira jednu plohu pramena Π_n neizmjerno daleko, dakle se tu radi o jednoj zraci Majcenova kubičnog kompleksa, koji je pridružen pramenu (Π_n) polarnih prostora. Majcenov kubični kompleks možemo prema tome definirati i ovako: Tačkama prostora položene usporednice s njima pridruženim zrakama tetraedralnog kompleksa jednog pramena polarnih prostora su zrake tom pramenu pridruženog Majcenova kubičnog kompleksa.

Tački P pridružen pravac p nalazi se, kao što je već spomenuto, u dirnoj ravnini jedne plohe pramena Π_n, za tu tačku kao diralište. U toj ravnini spuštena okomica o iz tačke P na pravac p dira u sjecištu s pravcem p jednu plohu pramena Π_n tako da je udaljenost između dva spomenuta dirališta na takvoj okomici najkraća. Svakoj tački prostora pridružena je jedna ovakva okomica. Neprekinuti trodimenzionalni skup svih ovakvih, tačkama prostora pridruženih okomica o čini jedan kompleks, kojemu ćemo odrediti stupanj i neke njegove osobine. Ovakav kompleks pridružen pramenu polarnih prostora (Π_n) označimo s (RK) dok smo tom pramenu pridružen tetraedralni kompleks već označili s (TK). Tačku P nazvat ćemo izlaznom tačkom zrake o.

1. Stupanj (RK) *kompleksa.* Svakoj tački prostora pridružena je, kao što znamo, jedna zraka p tetraedralnog kompleksa (TK) pridruženog pramenu (Π_n) polarnih prostora. Tačkom P prolazi jedna ploha φ pramena Π_n, koju u tački P dira ravnina (Pp) te tačke i pravca p. Okomica postavljena u tački P na tu ravninu je normala plohe φ, dakle zraka kompleksa (NK) normala ploha pramena Π_n. Tačkom P u spomenutoj ravnini postavljena okomica na pravac p, dakle zraka kompleksa (RK), okomita je na spomenutu normalu plohe φ u tački P. Svakoj tački prostora pridružena je, dakle, jedna zraka kompleksa (TK), jedna zraka kompleksa (NK) i jedna zraka kompleksa (RK), koji su pridruženi pramenu (Π_n) polarnih prostora. Jednoj tački P prostora pridružena zraka (RK) kompleksa je prema tome najkraća transverzala toj tački pridruženih zraka u kompleksima (NK) i (TK) pramena (Π_n). Očito je da u tom smislu možemo izreći i novu definiciju kompleksa (RK) pridruženog jednom pramenu (Π_n) polarnih prostora.

Odaberimo po volji u prostoru tačku T i jednu plohu φ u pramenu Π_n incidentnih ploha pramena (Π_n). Dirne ravnine plohe φ položene tačkom T omataju stožac 2. stupnja, koji tu plohu dira duž njena presjeka l s polarnom ravninom τ pola T s obzirom na tu plohu. Tačkama ravnine τ pridružene zrake u kompleksu (TK) čine, kao što je poznato, kongruenciju (13) bisekanata jedne prostorne krivulje k^3 3. reda. Tačkama čunjosječnice l pridružene zrake u toj kongruenciji čine neku pravčastu plohu, vjerojatno 4. stupnja, o čemu se možemo uvjeriti ovako: neka je čunjosječnica l proizvod dvaju projektivnih pramenova $(V_1) \overline{\wedge} (V_2)$ pravaca. Zrakama pramena (V_1) pridružene pravčaste plohe 2. stupnja u kongruenciji (13) čine pramen, kojemu se temeljna prostorna krivulja raspala u krivulju k^3 i onu zraku (bisekantu te krivulje), koja je pridružena vrhu V_1. Takav pramen ploha pridružen pramenu pravaca (V_2) ima također raspadnutu temeljnu krivulju, i to opet u krivulju k^3 i zraku pridruženu na isti način vrhu V_2. Tačkama čunjosječnice l pridružene zrake u kongruenciji (13) su prema tome izvodnice pravčaste plohe 4. stupnja, koja nastaje kao proizvod opisanih pramenova pravčastih ploha 2. stupnja. Radi $(V_1) \overline{\wedge} (V_2)$ su i ta dva pramena pridružena projektivno. Budući da je prostorna krivulja k^3 dio temeljne krivulje 4. reda jednog i drugog pramena ploha 2. stupnja, bit će krivulja k^3 dvostruka prostorna krivulja 3. reda te pravčaste plohe 4. stupnja. Da tačkama čunjosječnice l pridružene zrake u kompleksu (TK) leže u dirnim ravninama stošca (Tl) koje prolaze tim tačkama je evidentno, budući da je diralište na plohi 2. stupnja pol svoje dirne ravnine. Vidimo, dakle, da je dirni stožac (Tl) plohe φ istovremeno i dirni stožac opisane pravčaste plohe 4. stupnja, čije su izvodnice zrake kompleksa (TK) pridružene tačkama čunjosječnice l. Povučemo li prema tome svakom tačkom krivulje l okomicu na toj tački pridruženu zraku u kompleksu (TK), bit će sve te okomice zrake našeg istraživanog kompleksa (RK). Potražimo koliko ovih okomica prolazi tačkom T?

Iz tačke T spuštene okomice na izvodnice naše pravčaste plohe 4. stupnja imat će svoja nožišta, kao što je poznato, na prostornoj krivulji 8. reda. Sve te okomice položene tačkom T čine prema tome stožac 8. reda, ako tačka T nije na toj plohi, odnosno na toj nožišnoj krivulji 8. reda. Zajedničke izvodnice tog stošca 8. stupnja i stošca 2. stupnja (Tl), vrha T i čunjosječnice l bit će one zrake kompleksa (RK) koje prolaze tačkom T, budući da je stožac (Tl), kao što znamo, i dirni stožac naše pravčaste plohe 4. stupnja. Taj će stožac, međutim, moći samo dirati spomenuti stožac 8. reda, i to najviše u osam izvodnica, budući da u svakoj toj izvodnici dvije neizmjerno blize padaju skupa.

Ovdje treba, međutim, uočiti još i ovo: poznato je da se tačka T nalazi na prostornoj krivulji k^3 3. reda, koja je, kao što smo vidjeli, dvostruka krivulja spomenute pravčaste plohe 4. stupnja. Nožišna krivulja 8. reda ove plohe za pol T prolazit će prema tome dva puta tom tačkom, odnosno ta je tačka dvostruka na toj nožišnoj krivulji. Stožac spojnica te tačke s ostalim tačkama te nožišne krivulje bit će prema tome stožac 6. stupnja. Ovaj stožac i stožac (Tl) mogu prema tome imati najviše šest realnih zajedničkih dirnih izvodnica. Vidimo, dakle, da tačkom T prolazi najviše šest zraka kompleksa (RK), kojima pridružene tačke leže na čunjosječnici l.

Što vrijedi za krivulju l u ravnini τ, vrijedi za sve takve krivulje l_n u ravninama τ_n koje prolaze pravcem p, a polarne su ravnine pola T za sve plohe pramena Π_n. Na svakom ovakvom stošcu (Tl_n) tačke T nalazi se prema tome šest zraka našeg kompleksa (RK). Budući da su svi stošci

(Tl_n) 2. stupnja, mora geometrijsko mjesto zraka kompleksa (RK), koje prolaze tačkom T, biti stožac 3. stupnja. Odnosno kompleks (RK) ima stupanj tri.

U ovim našim razmatranjima lako se vidi da su tačke na čunjosječnicama l_n u ravninama τ_n izlazne tačke njima pridruženih zraka u (RK) kompleksu, tj. te zrake su okomice spuštene iz tih tačaka na njima pridružene zrake u (TK) kompleksu pramena (Π_n). Nožišta tih zraka su očito na tim zrakama (TK) kompleksa.

Također se lako može dokazati da su zrake svih četiriju glavnih tačaka pramena Π_n incidentnih ploha također i zrake (RK) kompleksa. Stošci zraka kompleksa (RK) svih tačaka prostora prolaze dakle glavnim tačkama pramena incidentnih ploha 2. stupnja našeg pramena (Π_n) polarnih prostora.

2. *Jedna osobita kongruencija u kompleksu* (RK). U pramenu Π_n incidentnih ploha 2. stupnja neka je ploha φ pravčasta. Tačkama jedne izvodnice i te plohe pridružene zrake u (TK) kompleksu čine sistem izvodnica jedne pravčaste plohe 2. stupnja, tako da izvodnica i spada u njen drugi sistem. Lako se može dokazati da u jednom sistemu izvodnica neke pravčaste plohe 2. stupnja mogu postojati najviše dvije takve izvodnice, koje su okomite na jednu izvodnicu drugog sistema te plohe. Te okomite izvodnice mogu pasti skupa, a mogu biti i konjugirano imaginarne. Odavde izlazi da su sve izvodnice jednog i drugog sistema svih pravčastih ploha 2. stupnja u jednom pramenu Π_n takvih ploha zrake tom pramenu Π_n pridruženog (RK) kompleksa. Naime, na svakoj takvoj izvodnici postoje dvije tačke iz kojih spuštene okomice na tim tačkama pridružene zrake u (TK) kompleksu padaju u te izvodnice. Budući da svakom tačkom prostora prolaze dvije takve izvodnice, a u svakoj ravnini ih ima šest, to sve izvodnice ploha 2. stupnja koje su u jednom pramenu čine kongruenciju 2. reda i 6. razreda. To je poznata kongruencija bisekanata temeljne prostorne krivulje 4. reda I vrste pramena Π_n incidentnih ploha našeg pramena polarnih prostora. Vidimo, dakle, da su bisekante temeljne prostorne krivulje pramena incidentnih ploha jednog pramena polarnih prostora zrake (RK) kompleksa tog pramena polarnih prostora.

3. *Geometrijsko mjesto pridruženih tačaka zrakama* (RK) *kompleksa koje prolaze jednom tačkom* T *prostora.* Povučemo li iz neke tačke T prostora sve tangente na sve plohe 2. stupnja u jednom pramenu Π_n takvih ploha, ležat će dirališta svih tih tangenata, kao što je poznato, na

jednoj općoj plohi 3. reda. Kao što znamo, tačkom T prolazi samo jedna ploha φ pramena Π_n, dakle i dvije njene izvodnice, koje neka budu realne. Dirne ravnine plohe φ u svim tačkama tih dviju izvodnica prolaze tačkom T, dakle i obje ove izvodnice leže na spomenutoj, ovoj tački, pridruženoj općoj plohi 3. reda. Posredstvom jednog pramena Π_n ploha 2. stupnja pridružena je svakoj tački prostora po jedna ovakva opća ploha 3. reda. Znamo da svaka zraka kompleksa (RK) nekog pramena ploha 2. stupnja dira dvije plohe tog pramena. Jedno diralište je sprijeda spomenuta izlazna tačka te zrake, a drugo je diralište već spominjano nožište te zrake, koje bismo mogli nazvati i njenom završnom tačkom. Geometrijsko mjesto izlaznih i završnih tačaka na zrakama kompleksa (RK), koje prolaze jednom tačkom T prostora i čine stožac 3. stupnja roda prvoga, mora prema tome biti prodorna krivulja ovog stošca s toj tački pridruženom opisanom općom plohom 3. reda. Izvodnice one plohe φ koja prolazi tom tačkom T, a koje sadržavaju tu tačku, međutim su i zrake kompleksa (RK), dakle izvodnice spomenutog stošca 3. stupnja, kao i pravci te tački T pridružene opće plohe 3. reda. Prodorna se krivulja tih dviju ploha raspada prema tome u ta dva pravca i jednu prostornu krivulju k^7 7. reda, kojoj su zrake kompleksa (RK) koje prolaze tačkom T trisekante. Vidimo, dakle, da je traženo geometrijsko mjesto prostorna krivulja 7. reda, na kojoj je tačka T obična tačka.

Vidjeli smo u t. 1 ove radnje da u svakoj ravnini τ_n pravca p leži šest tačaka naše malo prije spomenute prostorne krivulje k^7, koja je 7. reda. Sedma tačka te krivulje u svim tim ravninama τ_n je u nožištu okomice spuštene iz tačke T na njoj pridružen pravac p u (TK) kompleksu. Budući da se u svakoj ravnini τ_n pravca p nalazi 7 tačaka krivulje k^7, to su time obuhvaćene sve tačke te krivulje, a mi smo vidjeli da su sve te tačke izlazne tačke zraka (RK) kompleksa koje prolaze tačkom T. Međutim, svaka izlazna tačka na ovakvoj zraci ima i svoju završnu tačku (nožište), koja je također na toj zraci, jer ta zraka u toj tački dira jednu plohu pramena Π_n. Ali budući da na svakom pravcu prostora postoje samo dvije takve tačke u kojima on dira plohe pramena Π_n, to izlazi da su te dvije tačke na svakoj zraci (RK) kompleksa i izlazne i završne, odnosno da su one međusobno involutorno pridružene. Očito je da su ovako involutorno pridružene i one dvije tačke na izvodnicama pravčastih ploha pramena Π_n.

4. Pravčasta ploha zraka kompleksa (RK) koje su pridružene tačkama jednog pravca. Zadajmo neki pravac p u prostoru. Tačkama ovog pravca pridružene zrake u kompleksu (TK) pramena polarnih prostora (Π_n) čine kao što je poznato, sistem izvodnica jedne pravčaste plohe 2. stupnja. Iz svake tačke pravca p spuštena okomica na sebi pridruženu zraku kompleksa (TK) je zraka našeg kompleksa (RK), a sve takve zrake čine traženo geometrijsko mjesto, budući da im pridružene tačke leže na pravcu p. Izvodnice spomenutog sistema sijeku neizmjerno daleku ravninu u nizu tačaka 2. reda. Preslikamo li u neizmjerno dalekoj ravnini ovaj niz polarno s obzirom na apsolutnu čunjosječnicu, dobit ćemo tamo pramen pravaca 2. razreda. Svakom pravcu ovog neizmjerno dalekog pramena 2. razreda pridružena je jedna tačka pravca p, a spojne ravnine svih tih tačaka sa sebi pridruženim pravcima u onom pramenu 2. razreda daju jednu kubnu omotaljku. Tačkama pravca p i njima pridruženim izvodnicama u onom sistemu spomenute plohe 2. stupnja dane su ravnine druge kubne omotaljke. Proizvod tih dviju kubnih omotaljki je tražena pravčasta ploha, koja je prema tome 6. stupnja. Vidimo, dakle, da tačkama nekog pravca p pridružene zrake u kompleksu (RK) čine pravčastu plohu 6. stupnja, kojoj je taj pravac jednostruk.

Ako je pravac p zraka kompleksa (RK), dobiva se pravčasta ploha 6. stupnja kojoj je pravac p dvostruk i torzalan. Geometrijsko mjesto nožišta izvodnica ovakve pravčaste plohe 6. stupnja, kao zraka (RK) kompleksa, na izvodnicama spomenute pravčaste plohe 2. stupnja, prostorna je krivulja 5. reda.

5. Geometrijsko mjesto pridruženih tačaka zrakama kompleksa (RK), *koje leže u jednoj ravnini.* Odaberimo po volji ravninu α i u njoj neki pravac a. Tačkama ravnine α pridružene zrake u kompleksu (TK) čine, kao što je poznato, kongruenciju (13) bisekanata jedne prostorne krivulje 3. reda. Tačkama pravca a pridružene zrake u toj kongruenciji čine sistem izvodnica jedne pravčaste plohe 2. stupnja. Iz tačaka pravca a spuštene okomice na njima pridružene izvodnice tog sistema su zrake kompleksa (RK) pridružene tim tačkama na pravcu a. Koliko od ovih zraka kompleksa (RK) leži u ravnini α, u toliko tačaka će pravac a sjeći traženo geometrijsko mjesto.

Vidjeli smo malo prije da sve takve okomice spuštene iz tačaka pravca a na njima pridružene izvodnice u spomenutom sistemu čine pravčastu plohu 6. stupnja. Nožišta na tim izvodnicama čine prostornu krivulju 5. reda, koja nastaje kao proizvod jedno-jednoznačno pridruženih izvodnica spomenutog sistema i ravnina one prvospomenute kubne omotaljke. Ovu prostornu krivulju siječe ravnina α u pet tačaka, dakle se u toj ravnini nalazi pet zraka kompleksa (RK), kojima pridružene tačke leže na pravcu a. Traženo geometrijsko mjesto u ravnini α je prema tome krivulja 5. reda. Ili, tačke pridružene zrakama kompleksa (RK) koje u jednoj ravnini omataju krivulju 3. razreda leže na krivulji 5. reda.

Iz dosad navedenih činjenica da pridružene tačke onim zrakama kompleksa (RK) koje prolaze jednom tačkom čine prostornu krivulju 7. reda i da zrakama kompleksa (RK) koje leže u jednoj ravnini pridružene tačke leže na krivulji 5. reda izlazi da one zrake kompleksa (RK) kojima pridružene tačke leže u jednoj ravnini čine kongruenciju 7. reda 5. razreda.

6. *Geometrijsko mjesto pridruženih tačaka onim zrakama kompleksa (RK) koje sijeku neki pravac.* Neki pravac p u prostoru siječe ∞^2 zraka kompleksa (RK), koje čine kongruenciju 3. stupnja. Skup pridruženih tačaka zrakama ove kongruencije čini jednu opću plohu, koju svaka ravnina pravca p siječe u krivulji 5. reda, kao što smo to malo prije vidjeli. Međutim, i svakoj tački pravca p pridružena je jedna zraka te kongruencije, jer ona siječe taj pravac. Vidimo, dakle, da je pravac p jednostruki pravac te plohe. Svaka ravnina pravca p siječe traženu plohu u krivulji 5. reda i u tom pravcu koji je na toj plohi jednostruk. Geometrijsko mjesto pridruženih tačaka onim zrakama kompleksa (RK) koje sijeku neki pravac u prostoru je prema tome opća ploha 6. reda.

Ako je pravac p zraka kompleksa (RK) bit će on opet jednostruk pravac opisane plohe 6. reda, samo će ta ploha imati u tačkama pridruženim tom pravcu dvostruke tačke.

7. *Prostorna transformacija 5. reda.* Na svakoj zraci (RK) kompleksa nalaze se, kao što smo vidjeli, dvije njoj pridružene tačke. Uzmemo li tačke jednog pravca, onda njima pridružene zrake (RK) kompleksa čine pravčastu plohu 6. stupnja, a tačkama na pravcu pridružene tačke na izvodnicama te plohe čine, kao što smo vidjeli, prostornu krivulju 5. reda. Uzmimo u prostoru neku ravninu α i izvan nje bilo koji pravac a. Svim tačkama ravnine α pridružene zrake kompleksa (RK) čine kongruenciju 7. reda 5. razreda, a tačkama ravnine pridružene tačke na zrakama ove kongruencije čine neku plohu. Tačkama pravca a pridružene tačke leže na prostornoj krivulji 5. reda, koja ravninu α siječe u pet tačaka. Dakle, na svakom pravcu prostora nalazi se 5 tačaka, kojima pridružene tačke leže u ravnini α, odnosno pravac a siječe traženu plohu u 5 tačaka. Dakle je ta ploha 5. reda. Vidimo, prema tome, da je parovima pridruženih tačaka na zrakama kompleksa (RK) jednog pramena polarnih prostora određena prostorna transformacija 5. reda.

8. Kompleks najkraćih dirnih staza među plohama jednog pramena plohá 2. stupnja. Zadamo li dvije plohe 2. stupnja A, B i na plohi A tačku P, onda će dvije tangente plohe A u tački P dirati i plohu B. Ove dvije tangente nazvat ćemo dirnim stazama (ili putovima) između ploha A i B za tačku P kao izlazište. Svaka tačka P prostora ima u kompleksu (TK) jednog pramena (Π_n) polarnih prostora sebi pridruženu zraku p. Svakom tačkom prostora prolazi nadalje i jedna ploha pramena Π_n incidentnih ploha pramena (Π_n) polarnih prostora. Svaka tangenta ovakve plohe u tački P dira još jednu plohu pramena Π_n, dakle je ona opisana dirna staza, a ta druga dirališta tog pramena (P) dirnih staza izlazišta P nalaze se, kao što znamo, na toj tački P pridruženom pravcu p u kompleksu (TK) pramena (Π_n). Iz tačke P spuštena okomica na pravac p je najkraća takva dirna staza izlazišta P, a takve okomice svih tačaka prostora čine, kao što smo dosad vidjeli, naš poznati kompleks (RK) u pramenu (Π_n) polarnih prostora, koji je zadan pramenom Π_n njihovih incidentnih ploha 2. stupnja. Vidimo, dakle, da je geometrijsko mjesto najkraćih dirnih staza među plohama 2. stupnja jednog pramena takvih ploha pravčasti kompleks 3. stupnja, koji je identičan s našim kompleksom (RK) pramena (Π_n). U našim razmatranjima vidjeli smo da na svakoj zraci (RK) kompleksa postoje dvije tačke, koje su svaka za svaku i izlazna i zalazna tačka te zrake.

U svim dosadanjim našim razmatranjima i zaključcima mogli bismo prema tome namjesto »zrake kompleksa (RK) pramena Π_n ploha 2. stupnja« pisati »najkraće dirne staze između ploha 2. stupnja pramena Π_n«.

9. Još o Majcenovu kubičnom kompleksu. Iz poznatih osobina Majcenova kubičnog kompleksa, pridruženog pramenu Π_n ploha 2. stupnja, očito izlazi da su zrake tog kompleksa neizmjerno duge dirne staze među plohama tog pramena. Taj se kompleks može prema tome definirati i ovako:

Majcenov kubični kompleks nekog pramena ploha 2. stupnja je geometrijsko mjesto neizmjerno dugih dirnih staza između ploha ovog pramena.

Institut za matematiku Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 9. listopada 1964. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.