Serija II T. 19. Zagreb 1964. Broj 3—4 POSEBNI OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO - FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO - PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Vilko Niče, Zagreb

Die Achsenkomplexe der in einem Büschel sich befindenden Polarräume

Osni kompleksi polarnih prostora u pramenu polarnih prostora

Zagreb 1964

Štamparski zavod „Ognjen Prica" Zagreb, Savska cesta 31, 1964

GLASNIK MAT. - FIZ. I ASTR.
Tom 19 — No. 3—4 — 1964.

DIE ACHSENKOMPLEXE DER IN EINEM BÜSCHEL SICH BEFINDENDEN POLARRÄUME

Vilko Niče, Zagreb

Einführung. Wird in einem Polarraum (Π) in jedem Punkt P des Raumes das Lot p auf seine Polarebene π gefällt, dann bilden alle ∞^3 derartigen Lote, wie bekannt, den Achsenkomplex dieses Polarraumes. Die einen beliebigen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Achsenkomplexes bilden einen gleichseitigen Kegel 2. Grades, und die diesen Strahlen zugeordneten Pole bilden eine kubische Raumhyperbel, die den Mittelpunkt und die unendlich fernen Punkte der Achsen des Polarraumes (Π) enthält ([2], S. 218). Die dem Strahl p konjugiert zugeordnete Gerade p_1 liegt in der Polarebene π des Pols P. Der den Strahl p enthaltenden und auf die Gerade p_1 senkrechten Ebene π_1 ist der Pol P_1 zugeordnet, der auf dieser Geraden p_1 liegt, und deswegen ist auch die Gerade p_1 ein Strahl des Achsenkomplexes des Polarraumes (Π). Die Inzidenzfläche 2. Grades dieses Polarraumes sei mit Π bezeichnet. Die Schnittpunkte F, F_1 der Strahlen p, p_1 und der diesen Strahlen zugeordneten Polarebenen π, π_1 heissen Fusspunkte dieser Strahlen. Durch einen Polarraum sind jedem Pol P, seinem Strahl p, seiner Polarebene π und seinen Fusspunkt F ein reziproker Pol P_1, dann der reziproke Strahl p_1, die reziproke Polarebene π_1 und der reziproke Fusspunkt F_1 zugeordnet. Die Verbindungsgeraden aller reziprok zugeordneten Polpaare P, P_1 bilden einen kubischen Strahlenkomplex, während die Schnittgeraden der Polarebenenpaare π, π_1, bzw. die Verbindungsgeraden der reziprok zugeordneten Fusspunktpaare F, F_1 einen zweiten derartigen Strahlenkomplex bilden ([2], S. 318). Dieser zweite Strahlenkomplex ist auch unter dem Namen »Fokalkomplex« der Inzidenzfläche Π des Polarraumes (Π) bekannt. In der bekannten Literatur (z. B. T. Reye, Die Geometrie der Lage, Bd. II) ist der Achsenkomplex eines Polarraumes ausführlich behandelt und es werden fast alle seine Eigenschaften, besonders die im Zusammenhang mit den reziproken Polen und die mit den reziproken Komplexstrahlen und Polarebenenpaaren, betrachtet. Die mit den reziproken Fusspunktepaaren verbundene Eigenschaften wurden erst später näher betrachtet [1].

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

In unserer Arbeit werden einige dieser Eigenschaften in den Achsenkomplexen der Polarräume eines Polarraumbüschels untersucht. Es werden durch den Zusammenhang dieser Eigenschaften in den Polarräumen eines Büschels neue Eigenschaften des Polarraumbüschels gefunden. In dieser Arbeit werden wir folgende Probleme betrachten und lösen:

1. Die Fusspunkte der einem Pol P zugeordneten Strahlen der Achsenkomplexe eines Polarraumbüschels.
2. Die Fusspunkte der einer Ebene zugeordneten Pole in einem Polarraumbüschel.
3. Die den Strahlen eines Pols in den Achsenkomplexen eines Polarraumbüschels reziprok zugeordneten Strahlen.
4. Der geometrische Ort der reziproken Fusspunkte der Achsenkomplexstrahlen eines Polarraumbüschels.
5. Der geometrische Ort der kürzesten Transversalen der einem Pol zugeordneten Strahlen und der ihnen reziprok zugeordneten Strahlen in den Achsenkomplexen eines Polarraumbüschels.
6. Die den Polarebenen eines Pols in einem Polarraumbüschel reziprok zugeordneten Polarebenen.
7. Der geometrische Ort der einem Pol in allen Polarräumen zugeordneten reziproken Pole.
8. Die den Strahlen eines Raumpunktes in allen Achsenkomplexen eines Polarraumbüschels zugeordneten Pole.
9. Die auf einer Geraden des Raumes sich befindende Pole zweier Achsenkomplexe eines Polarraumbüschels.
10. Die Fusspunkte der auf den Strahlen eines Punktes sich befindenden Polpaare.
11. Die zweiten Pole auf den Achsenkomplexstrahlen eines Poles im Polarraumbüschel.

I. Die einen Pol P in einem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Polarebenen bilden, wie bekannt, ein Ebenenbüschel. Die Achsen p der allen Raumpunkten derartig durch den Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Ebenenbüschel $[p]$ bilden den bekannten tetraedralen Komplex. Die den Punkt P enthaltenden und auf die Ebenen des ihm zugeordneten Ebenenbüschels $[p]$ gefällten Lote s_n bilden ein Strahlenbüschel 1. Ordnung und schneiden diese Ebenen in Fusspunkten F_n, die einen Kreis c bilden. Der Kreis c enthält offensichtlich den Punkt P, schneidet rechtwinklig die Achse p, und seine Ebene steht auf allen Ebenen des Ebenenbüschels $[p]$ senkrecht. Es gilt also folgender Satz:

Die Fusspunkte F_n der einem Pol zugeordneten Strahlen der Achsenkomplexe in allen Polarräumen des Büschels (Π_n) bilden einen Kreis, der den Punkt P enthält und die Achse p des Polarebenenbüschels $[p]$ senkrecht im Diametralpunkt des Punktes P schneidet.

Die Ebene dieses Kreises steht offensichtlich auf allen Ebenen des Büschels $[p]$ senkrecht.

II. Die einer Ebene α in den Polarräumen eines Büschels (Π_n) zugeordneten Pole bilden, wie bekannt, eine Raumkurve 3. Ordnung. Die aus diesen Polen auf diese Ebenen gefällten Lote sind Strahlen der diesen Polarräumen des Büschels (Π_n) zugeordneten Achsenkomplexe, und ihre Schnittpunkte in der Ebene α sind Fusspunkte dieser Strahlen, die in den Polarräumen des Büschels (Π_n) dieser Ebene α zugeordnet sind. Es ist offensichtlich, dass alle diese Fusspunkte auf einer Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht Null liegen. Es gilt daher auch folgender Satz:

Die Fusspunkte der einer Ebene α im Polarraumbüschel zugeordneten Pole bilden in dieser Ebene eine unikursale Kurve 3. *Ordnung.*

III. Alle einem Pol P in den Polarräumen eines Polarraumbüschels (Π_n) zugeordneten Polarebenen bilden, wie schon erwähnt, ein Ebenenbüschel $[p]$, dessen Achse mit p bezeichnet war. Die dem Pol P zugeordneten Strahlen s_n in den diesen Polarräumen zugeordneten Achsenkomplexen bilden das schon erwähnte Strahlbüschel (P), dessen Ebene Π auf der Achse p senkrecht steht. Jeder Strahl s_n des Büschels (P) ist ein Strahl des einem Polarraum des Büschels (Π_n) zugeordneten Achsenkomplexes. Jedem dieser Strahlen s_n ist in seinem Polarraum eine Gerade s_n^1 konjugiert zugeordnet, die, wie schon vorher erwähnt, ein Strahl des diesem Polarraum zugeordneten Achsenkomplexes ist. Die den Strahlen s_n des Büschels (P) auf die beschriebene Weise konjugiert zugeordneten Strahlen s_n^1 (reziproke Strahlen) bilden eine stetige eindimensionale Geradenmenge, also eine Regelfläche, deren Grad wir jetzt bestimmen möchten.

Da die Strahlen s_n des Büschels (P) den Punkt P enthalten, müssen die diesen Strahlen auf die beschriebene Weise reziprok zugeordneten Strahlen s_n^1 in der dem Pol P zugeordneten Polarebene liegen, also daher auch die Gerade p schneiden. Die in den polaren Räumen des Büschels (Π_n) der Ebene π des Strahlbüschels (P) zugeordneten Pole bilden, wie bekannt, eine Raumkurve k^3 3. Ordnung. Jedem Punkte dieser Ebene π ist eine Bisekante dieser Raumkurve 3. Ordnung zugeordnet, welche die diesen Punkten in den Polarräumen Π_n zugeordneten Polarebenen enthalten. Die dem Punkt P zugeordnete Gerade p ist also auch eine Bisekante dieser Raumkurve 3. Ordnung k^3. Die den der Ebene π zugeordneten Polen in der Ebene π zugeordneten Fusspunkte bilden also eine derartige Kurve 3. Ordnung, deren Doppelpunkt sich in dem Schnittpunkt der Geraden p und der Ebene π befindet.

Die den Strahlen s_n des Büschels (P) durch die Polarräume Π_n des Büschels (Π_n) reziprok zugeordneten Strahlen s_n^1 sind also Geraden, welche die Gerade p und die Raumkurve k^3 schneiden.

Die den Raumpunkten P_n auf die bisher mehrmals beschriebene Weise zugeordneten Geraden p_n bilden den bekannten, dem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten tetraedralen quadratischen Strahlenkomplex. Es sei dieser Strahlkomplex mit (TK) bezeichnet. Die den Punkten jedes Strahles s_n des Strahlbüschels (P) zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades. Die Erzeugenden des zweiten Systems sind die dem Strahl s_n in den zugehörigen Polarräumen des Büschels (Π_n) konjugiert zugeordneten Geraden. Die auf diese Weise den Strahlen s_n des Büschels (P) zugeordneten Regelflächen 2. Grades bilden ein Flächenbüschel 2. Grades, dessen Grundkurve 4. Ordnung in die Gerade p und in die kubische Raumkurve k^3 zerfällt. Dieses Regelflächenbüschel 2. Grades ist dem Strahlbüschel (P) projektiv zugeordnet, und durch die zueinander senkrechte Lage der Strahlen s_n und der ihnen in dem Ebenenbüschel $[p]$ zugeordneten Polarebenen sind auch die Büschel (P) und $[p]$ projektiv zugeordnet. Es folgt also, dass auch dieses Regelflächenbüschel 2. Grades dem Ebenenbüschel $[p]$ projektiv zugeordnet ist. Das Erzeugnis dieser zwei projektiv zugeordneten Büschel ist also eine Fläche 3. Ordnung.

Jede Ebene des Büschels $[p]$ schneidet die ihr in dem Regelflächenbüschel 2. Grades zugeordnete Fläche in der Geraden p und in noch einer Geraden, nämlich der konjugiert zugeordneten Geraden s_n^1 des dieser Ebene des Büschels $[p]$ zugeordneten Strahlen s_n im Strahlbüschel (P). Die erzeugte Fläche 3. Ordnung ist also eine Regelfläche 3. Grades, in der die Gerade p eine Doppelgerade ist. Auf Grund dieser Ausführungen gilt also auch folgender Satz:

Die den Strahlen eines Pols in den Achsenkomplexen eines Polarraumbüschels reziprok zugeordneten Strahlen bilden eine Regelfläche 3. Grades, deren Doppelgerade die Polarebenen dieses Pols in den Polarräumen des Polarraumbüschels enthält.

Diese Regelfläche sei mit R_1 bezeichnet.

IV. Jedem Strahl s_n des Pols P ist in seinem Polarraum, resp. in seinem Achsenkomplex, ein ihm reziprok zugeordneter Strahl s_n^1 (die ihm konjugiert zugeordnete Gerade) zugeordnet. Der Strahl s_n^1 ist, wie wir sahen, eine Erzeugende der vorher betrachteten Regelfläche R_1 3. Grades. Die dem Pol P_1 dieses reziproken Strahles s_n^1 zugeordnete Polarebene enthält den Pol P und steht auf diesem Strahl s_n^1 senkrecht. Der Schnittpunkt dieser Polarebene des Pols P_1 und des diesem Pol P zugeordneten Strahles s_n^1 ist bekanntlich der diesem Pol P_1 und seinem Achsenkomplexstrahl zugeordnete Fusspunkt F_n^1. Alle derartigen Fusspunkte F_n^1 auf den Erzeugenden s_n^1 der vorher beschriebenen Regelflächen R_1 3. Grades, die reziproke Strahlen der Strahlen s_n des Pols P sind, bilden also die Fusspunktkurve dieser Regelfläche R_1 3. Grades bezüglich des Pols P. Da normalerweise diese Regelfläche 3. Grades keine unendlich ferne Erzeugende haben muss, ist diese Fusspunktkurve offensichtlich eine Raumkurve 6. Ordnung. Es gilt daher folgender Satz:

Durch die Polarräume eines Polarraumbüschels ist einem Raumpunkt P in den Achsenkomplexen dieser Polarräume eine eindimensionale stetige Reihe reziproker Pole P_n^1 zugeordnet. Die *diesen reziproken Polen P_n^1 in den Achsenkomplexen des Polarraumbüschels zugeordneten Fusspunkte bilden eine Raumkurve* 6. *Ordnung.*

Die Fusspunkte der in den Achsenkomplexen der Polarräume des Büschels (Π_n) dem Punkt P zugeordneten Strahlen liegen, wie vorher bewiesen wurde, auf dem Kreis der den Punkt P enthält und die Achse p des Polarebenenbüschels $[p]$ in dem Diametralpunkt des Punktes P senkrecht schneidet.

V. Wir sahen, dass durch die Polarräume eines Polarraumbüschels (Π_n) einem Raumpunkt P als Pol ein Büschel (P) der diesem Punkt zugeordneten Strahlen s_n in den Achsenkomplexen dieser Polarräume zugeordnet ist. Jedem Strahle s_n des Büschels (P) ist in seinem Polarraum, bzw. Achsenkomplex, ein reziproker Strahl s_n^1 zugeordnet. Alle derartigen und derartig dem Punkt P zugeordneten Strahlen s_n^1 bilden, wie wir sahen, eine Regelfläche R_1 3. Grades, und auf jeder Erzeugenden dieser Fläche liegt der Pol P_n^1 dieser Erzeugenden, der ihr als dem Strahl des ihm angehörenden Achsenkomplexes zugeordnet ist. Wir sahen ferner, dass alle derartig einem Raumpunkt P zugeordneten reziproken Fusspunkte eine Raumkurve 6. Ordnung bilden. Es ist weiters auch bekannt, dass die Paare zugeordneter Strahlen s_n, s_n^1 in jedem Polarraum des Büschels (Π_n) ein sich rechtwinklig kreuzendes Geradenpaar bilden, und die Verbindungsgeraden t^n der zugeordneten Fusspunkte F_n, F_n^1 dieser Strahlpaare s_n, s_n^1 sind deren kürzeste Transversalen. Alle derartige einem Raumpunkt P zugeordneten Transversalen t_n bilden also eine eindimensionale stetige Geradenmenge, die wir als eine Regelfläche betrachten können. Es soll der Grad dieser Regelfläche, die mit R_2 bezeichnet sei, bestimmt werden.

Die Fusspunkte F_n bilden, wie bekannt, einen Kreis, und die diesen Fusspunkten reziprok zugeordneten Fusspunkte F_n^1 bilden, wie wir sahen, eine Raumkurve 6. Ordnung. Die gesuchte Regelfläche R_2 kann also als Erzeugnis einer Punktreihe 2. Ordnung und einer Punktreihe 6. Ordnung, die eineindeutig zugeordnet sind, betrachtet werden. Wenn diese zwei Kurven keinen gemeinsamen Punkt haben, der sich selbst zugeordnet wäre, muss es sich hier um eine Regelfläche R_2 8. Grades handeln, die selbstverständlich den Kreis der Fusspunkte F_n enthält. Da bei unserer eineindeutigen Zuordnung nicht der Fall eintritt, dass die zwei Kurven einen gemeinsamen und sich selbst zugeordneten Punkt haben, gilt offensichtlich folgender Satz:

Die kürzesten Transversalen der einem Raumpunkt zugeordneten Strahlen und der diesen Strahlen reziprok zugeordneten Strahlen in den Achsenkomplexen eines Polarraumbüschels bilden eine Regelfläche 8. *Grades.*

Da sich in jeder Ebene der Geraden p nur eine Erzeugende dieser Regelfläche 8. Grades befindet, muss diese Gerade p eine 7-fache Gerade dieser Regelfläche R_2 sein.

VI. In jedem Polarraum des Büschels (Π_n) hat die Polarebene des Pols P eine dieser Ebene reziprok zugeordnete Polarebene, die den Pol P enthält und auf der ersten Polarebene, so wie auch auf dem in dieser Ebene liegenden und ihr zugeordneten Strahl s_n^1, senkrecht steht. Was hüllen alle derartig dem Pol P reziprok zugeordneten Polarebenen ein?

Jede dieser reziprok zugeordneten Polarebenen steht auf dem ihr zugeordneten Strahl s_n^1 senkrecht, und alle Strahlen s_n^1 sind, wie bekannt, die Erzeugenden der vorher betrachteten Regelfläche R_1 3. Grades. Da alle reziprok zugeordneten Polarebenen den Pol P enthalten, hüllen alle diese Ebenen einen Kegel 3. Klasse um. Es gilt daher folgender Satz:

Die den Polarebenen eines Punktes in einem Polarraumbüschel, die ein Ebenenbüschel bilden, reziprok zugeordneten Polarebenen hüllen einen Kegel 3. Klasse ein.

Da die erwähnte Regelfläche R_1 3. Grades zwei mit ihrer Doppelgeraden parallele Erzeugende hat, hat dieser Strahlkegel 3. Klasse offensichtlich eine auf der Doppelgeraden dieser Regelfläche senkrecht stehende Doppelberührungsebene.

VII. In jedem Polarraum Π_n des Büschels (Π_n), bzw. in seinem Achsenkomplex, ist dem Pol P ein reziproker Pol P_n^1 zugeordnet. Alle derartig dem Pol P zugeordneten reziproken Pole P_n^1 bilden eine eindimensionale stetige Punktmenge, also eine Raumkurve, deren Ordnung wir jetzt bestimmen möchten. Die dem Pol P in den Polarräumen Π_n des Büschels (Π_n) zugeordneten Strahlen s_n bilden das bekannte Strahlbüschel (P). Jeder Strahl s_n dieses Büschels befindet sich in einem Polarraum des Büschels (Π_n), bzw. in seinem Achsenkomplex, und die diesen Strahlen s_n in ihren Polarräumen reziprok zugeordneten Strahlen s_n^1 bilden, wie bekannt, die Regelfläche R_1 3. Grades. Die Geradenpaare s_n, s_n^1 sind in ihren Polarräumen Paare konjugiert zugeordneter Geraden, also liegen die dem Pol P reziprok zugeordneten Pole P_n^1 auf den Strahlen s_n^1, resp. auf den Erzeugenden der Regelflächen R_1. In jeder Ebene π_n der Geraden p befindet sich ein Strahl (eine Erzeugende) s_n^1 und auf ihm nur ein dem Punkt P reziprok zugeordneter Punkt P_n^1. Die den Polen P_n^1 in ihren Polarräumen zugeordneten Polarebenen ϱ_1^n hüllen, wie vorher bewiesen wurde, einen Kegel (ϱ_1^n) 3. Klasse ein. Da alle Ebenen ϱ_1^n den Punkt P enthalten, liegen die allen diesen Ebenen in jedem Polarraum des Büschels (Π_n) zugeordneten Pole in der dem Pol P in diesem Polarraum Π_n zugeordneten Polarebene π_n und bilden selbstverständlich eine ebene Kurve 3. Ordnung. Die eindimensionale stetige Menge derartiger Kurven 3. Ordnung in den Ebenen π_n des Ebenenbüschels [p] bildet also eine Fläche, die jede Ebene der Geraden p in einer Kurve 3. Ordnung schneidet. Alle derartigen die Gerade p schneidenden Kurven bilden eine Fläche R_3, auf der sich auch der geometrische Ort der dem Punkt P reziprok zugeordneten Pole P_n^1 befindet. Der geometrische Ort der

Punkte P_n^1 ist also die Durchdringungskurve dieser Fläche R_3 und der vorher erwähnten Regelfläche R_1, die 3. Grades ist und deren Doppelgerade die Gerade p ist.

Die jedem Punkt Q der Geraden p in den Polarräumen Π_n zugeordneten Polarebenen bilden ein Ebenenbüschel, dessen Achse den Punkt P enthält und mit q bezeichnet sei. Wie bekannt, bilden die allen Punkten Q_n der Geraden p zugeordneten Achsen q_n einen Strahlenkegel 2. Grades mit dem Scheitel P ([3], S. 29). Jede Erzeugende dieses Kegels 2. Grades enthält 3 Berührungsebenen des vorher erwähnten Kegels 3. Klasse, also liegt jeder Punkt der Geraden p auf drei Kurven 3. Ordnung der Fläche R_3 deren Ebenen die Gerade p enthalten. Die Gerade p ist also eine dreifache Gerade der Fläche R_3. Es folgt hieraus, dass die Fläche R_3 6. Ordnung sein muss. Da die Gerade p eine zweifache Gerade der Fläche R_1 und eine dreifache der Fläche R_3 ist, zerfällt also die Durchdringungskurve 18. Ordnung der Flächen R_1 und R_3 in die sechsfache Gerade p, und eine Raumkurve 12. Ordnung.

Es muss aber hier auch auf folgendes Rücksicht genommen werden. Auf jeder Regelfläche 3. Grades befinden sich zwei reelle oder zwei konjugiert imaginäre mit deren Doppelgeraden parallele Erzeugende. Zwei derartige Erzeugende hat selbstverständlich auch unsere Regelfläche R_1. Die den Punkt P enthaltende und auf die Erzeugenden der Regelfläche R_1 normalen Ebenen hüllen, wie schon erwähnt, den Kegel $(\varrho_1{}^n)$ 3. Klasse ein, desen Doppelberührungsebene mit der Ebene π des Strahlbüschels (P) identisch ist. Die in allen Polarräumen des Büschels (Π_n) den Berührungsebenen des Kegels $(\varrho_1{}^n)$ zugeordneten Pole bilden die eben erwähnte Fläche R_3 6. Ordnung mit der dreifachen Geraden p. Die diesen Berührungsebenen in einem Polarraum des Büschels (Π_n) zugeordneten Pole liegen in der dem Pol P in diesem Polarraum zugeordneten und die Gerade p enthaltenden Polarebene und bilden, wie wir sahen, eine Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht Null. Dem Doppelpunkt dieser Kurve ist die Doppelberührungsebene π des Kegels $(\varrho_1{}^n)$ zugeordnet. In jeder Ebene der Geraden p liegt eine derartige Kurve und alle diese Kurven bilden, wie bemerkt, die Fläche R_3. Die der Ebene π in allen Polarräumen des Büschels (Π_n) zugeordneten Pole bilden die Doppelkurve der Fläche R_3 und liegen, wie bekannt, auf einer Raumkurve 3. Ordnung. Diese Raumkurve 3. Ordnung der Pole der Ebene π liegt aber, wie wir vorher sahen, auch auf der Fläche R_1. Sie ist also ein doppelter Teil der Durchdringungskurve der Flächen R_1 und R_3. Die Durchdringungskurve 18. Ordnung der Flächen R_1 und R_3 zerfällt also in die sechsfache Gerade p, dann in die eben erwähnte Doppelraumkurve 3. Ordnung und endlich noch in eine Raumkurve 6. Ordnung. Es gilt daher folgender Satz:

Die einem Pol P in allen Polarräumen eines Polarraumbüschels (Π_n) zugeordneten reziproken Pole P_n^1 bilden eine Raumkurve 6. Ordnung.

Da in jeder Ebene der Geraden p ausserhalb dieser Geraden nur ein Punkt der Raumkurve liegt, ist die Gerade p offensichtlich eine fünffache Sekante dieser Raumkurve.

VIII. Die einen Punkt P enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes eines Polarraumes bilden, wie bekannt, einen gleichseitigen Strahlenkegel 2. Grades, auf dem die Pole dieser Strahlen eine gleichseitige Raumhyperbel bilden. Der Punkt P ist Scheitel eines derartigen gleichseitigen Strahlenkegels 2. Grades in jedem Polarraum eines Polarraumbüschels (Π_n). Auf jedem derartigen gleichseitigen Strahlenkegel mit dem Scheitel P liegt die ihm in seinem Polarraum des Büschels (Π_n) zugeordnete gleichseitige Raumhyperbel. Alle diese, auf diese Weise dem Punkt P zugeordneten Raumhyperbeln bilden also eine stetige eindimensionale Raumkurvenmenge, durch die eine Fläche gebildet wird. In unseren weiteren Betrachtungen werden wir die Ordnung dieser Fläche finden.

Die den Punkten einer Geraden m im (TK)-Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, ein sich zwei Erzeugende die auf der Geraden m senkrecht stehen, da die unendlich ferne Polare des unendlich fernen Punktes der Geraden m bezüglich des absoluten Kegelschnittes den unendlich fernen Kegelschnitt des erwähnten Hyperboloides in zwei Punkten schneidet. Es ist offensichtlich, dass diese zwei Erzeugenden auch zusammenfallen, oder konjugiert imaginär sein können. Man bezeichne diese zwei Erzeugenden mit i_1, i_2 und die ihnen zugeordneten Punkte auf der Geraden m mit I_1, I_2. Durch die die Erzeugende i_1 enthaltende und auf der Geraden m senkrechte Ebene α_1, und deren Pol I_1 ist in dem Polarraumbüschel (Π_n) ein Polarraum bestimmt, in dem die Gerade m ein Strahl seines Achsenkomplexes ist, da sie den Pol I_1 enthält und auf dessen Polarebene senkrecht steht. Der Punkt I_2 ist ebenfalls der Pol einer derartigen die Erzeugende i_2 enthaltenden Polarebene α_2, die auf der Geraden m senkrecht steht, und durch die und dessen Pol I_2 ein weiterer Polarraum Π_n im Polarraumbüschel (Π_n) bestimmt ist. Die Gerade m ist auch hier ein Strahl des diesem Polarraum zugeordneten Achsenkomplexes. Man sieht also, dass jede Gerade des Raumes ein Strahl der Achsenkomplexe zweier Polarräume eines Polarraumbüschels ist.

Man nehme im Raum beliebig einen Punkt P an. Jede Gerade dieses Punktes ist ein Strahl der Strahlkomplexe zweier im Büschel (Π_n) sich befindender Polarräume. Die in den Polarräumen des Büschels (Π_n) dem Pol P zugeordneten Achsenkomplexstrahlen bilden, wie wir es in Abt. I sahen, ein Strahlbüschel (P), dessen Ebene π auf dem dem Punkt P zugeordneten Strahl im (TK)-Komplex des Büschels (Π_n) senkrecht steht. Da der einem Punkt P als Pol zugeordnete Strahl im Achsenkomplex eines polaren Raumes die kubische Raumhyperbel der Pole aller den Punkt P enthaltenden Strahlen dieses Komplexes berührt, berühren alle derartigen Raumhyperbeln, die in den Achsenkomplexen der polaren Räume des Büschels (Π_n) dem Punkt P zugeordnet sind, die eben erwähnte Ebene in diesem Punkt P. Die Ebene π berührt also den gesuchten geometrischen Ort im Punkt P, der damit ein einfacher Punkt dieser gesuchten Fläche ist. Da sich auf jeder Geraden des Punktes P, ausserhalb des Strahlbüschels (P), die, wie wir es sahen, ein Achsenkomplexstrahl zweier polarer Räume des Büschels (Π_n) ist, zwei diesem Strahl in diesen polaren Räumen zugeordnete Pole befinden, während sich auf den Strahlen des Büschels (P) nebst dem Pol P nur noch ein Pol dieser Strahlen in einem zweiten Polarraum dieses Strahles befindet, kann der gesuchte geometrische Ort nur eine Fläche 3. Ordnung sein. Es gilt also folgender Satz:

Jeder Punkt P des Raumes ist Scheitel der ∞^1 gleichseitigen Kegel 2. Grades, die durch die Achsenkomplexstrahlen der ∞^1 Achsenkomplexe eines Polarraumbüschels gebildet werden. Alle diesen Strahlen des Punktes P zugeordneten Pole bilden eine Fläche 3. Ordnung.

Jeder der gleichseitigen Strahlkegel des Scheitels P durchdringt diese Fläche in der bekannten Raumhyperbel der Pole in seinem Polarraum und noch in einer Raumkurve 3. Ordnung, deren Punkte als Pole auf jeder Erzeugenden dieses Kegels einem anderen Polarraum zugeordnet sind.

Die Grundkurve k^4 des Inzidenzflächenbüschels 2. Grades des Polarraumbüschels (Π_n) ist, wie bekannt, 4. Ordnung I Art. Jede Normale dieser Raumkurve ist gleichzeitig auch Normale einer Fläche dieses Flächenbüschels (Π_n). Jede Normale einer Fläche 2. Grades ist aber auch ein Strahl des dem Polarraum dieser Inzidenzfläche zugeordneten Achsenkomplexes. Die Fusspunkte der einen Raumpunkt P enthaltenden Normalen der Grundraumkurve k^4 befinden sich also auf der eben gefundenen und dem Punkt P zugeordneten Fläche 3. Ordnung. Die Normalenkongruenz der Raumkurve k^4 ist, wie bekannt, 12. Ordnung und 4. Klasse. Die Fusspunkte der 12 den Punkt P enthaltenden Normalen der Raumkurve k^4 sind also Schnittpunkte der erwähnten Fläche 3. Ordnung und der Grundkurve k^4.

Jedem Punkt P des Raumes ist eine Ebene π zugeordnet, in der sich das Büschel (P) der dem Pol P zugeordneten Strahlen in den Achsenkomplexen des Polarraumbüschels (Π_n) befindet. Da die Ebene π eine Berührungsebene der vorher gefundenen Fläche 3. Ordnung ist, wird diese Fläche durch die Ebene in einer unikursalen Kurve 3. Ordnung geschnitten, die im Punkt P einen Doppelpunkt hat. Auf jedem Strahl des Büschels (P) in der Ebene π befindet sich ein Punkt dieser Kurve 3. Ordnung, welcher der Pol dieses Strahles in einem anderen Achsenkomplex des Büschels (Π) ist. Es gilt daher auch folgender Satz:

Die einem Raumpunkt P als Pol zugeordneten Strahlen in den Achsenkomplexen eines Polarraumbüschels bilden ein Strahlbüschel (P) 1. Ordnung. Auf jedem Strahl dieses Büschels (P), der ein Strahl *noch eines anderen Achsenkomplexes des Büschels (Π_n) ist, befindet sich auch der durch diesen anderen Achsenkomplex diesem Strahl zugeordnete Pol. Alle diese zweiten auf den Strahlen des Büschels (P) sich befindenden Pole bilden eine Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht Null, deren Doppelpunkt der Pol P ist.*

In unseren letzten Betrachtungen sahen wir, dass jede Gerade des Raumes ein Strahl zweier in einem Polarraumbüschel (Π_n) sich befindenden Achsenkomplexe ist. Die zweiten Pole der einem Pol P in den erwähnten Achsenkomplexen zugeordneten Strahlen bilden, wie eben erwähnt, eine Kurve 3. Ordnung mit dem Doppelpunkt P. Jede der Berührungsgeraden dieser Kurve im Doppelpunkt P ist also Achsenkomplexstrahl zweier Achsenkomplexe unseres Polarrraumbüschels mit demselben Pol. Es gilt also auch folgender Satz:

Jeder Raumpunkt P enthält zwei Gerade, die Strahlen der Achsenkomplexe zweier Polarräume eines Polarraumbüschels sind, und dem Punkt P so zugeordnet sind, dass dieser Punkt P Pol in beiden Achsenkomplexen jedes dieser Doppelstrahlen ist.

IX. Auf jedem Strahl eines Achsenkomplexes befindet sich der diesem Strahl zugeordnete Pol und der diesem Pol, bzw. seinem Achsenkomplexstrahl zugeordnete Fusspunkt. In einer kürzlich veröffentlichen Arbeit über die Fusspunkte der Strahlen eines Achsenkomplexes bewiesen wir, dass die Fusspunkte der einen Raumpunkt P enthaltenden Strahlen eines Achsenkomplexes, die einen gleichseitigen Kegel 2. Grades bilden, auf einer Raumkurve 5. Ordnung liegen [1]. Der Punkt P ist ein dreifacher Punkt dieser Raumkurve.

In jedem Achsenkomplex des Büschels (Π_n) ist dem Punkt P eine derartige Raumkurve 5. Ordnung zugeordnet, und alle diese ∞^1 Raumkurven haben in diesem Punkt P einen dreifachen Punkt. Alle derartigen in den Polarräumen des Büschels (Π_n) einem Punkt P zugeordneten Raumkurven 5. Ordnung bilden also eine stetige Raumkurvenmenge, die eine Fläche bildet, welche im Punkt P einen dreifachen Punkt hat. Da sich auf jeder Geraden des Punktes P die Pole zweier Polarräume des Büschels (Π_n) befinden, denen diese Geraden als Achsenkomplexstrahlen zugeordnet sind, bilden die diesen Polen zugeordneten Fusspunktpaare, die auf diesen Geraden des Punktes P liegen, eine Fläche, die, wie schon erwähnt, im Punkt P einen dreifachen Punkt hat, und die von jeder Geraden dieses dreifachen Punktes noch in zwei weiteren Punkten geschnitten wird. Es ist offensichtlich, dass es sich hier um eine Fläche 5. Ordnung handelt. Es gilt daher folgender Satz:

Jede Gerade eines Punktes P ist Achsenkomplexstrahl zweier in einem Büschel (Π_n) sich befindender polaren Räume. Die den zwei Polen auf allen Geraden des Punktes P zugeordneten Fusspunkte bilden eine Fläche 5. Ordnung, auf der dieser Punkt P ein dreifacher Punkt ist.

Die dem Pol P in den Achsenkomplexen des Büschels (Π_n) zugeordneten Strahlen bilden das bekannte Strahlbüschel (P) in der Ebene π, die auf dem dem Punkt P im (TK)-Komplex des Büschels (Π_n) zugeordneten Strahl senkrecht steht. Nebst dem Pol P bilden die zweiten Pole auf den Strahlen des Büschels (P) eine Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht Null. Was bilden die Fusspunkte des Pols P so wie auch die jenigen der zweiten Pole auf der erwähnten Kurve 3. Ordnung? Der geometrische Ort dieser Fusspunkte liegt offensichtlich in der Ebene π und auf der eben gefundenen Fläche 5. Ordnung. Es handelt sich also hier um eine ebene Kurve 5. Ordnung mit einem dreifachen Punkt im Punkt P. Nun sahen wir am Anfang dieser Arbeit, dass die Fusspunkte des Pols P auf den Strahlen des Büschel (P) einen Kreis bilden, auf dem auch der Punkt P liegt. Die erwähnte Kurve 5. Ordnung in der Ebene π zerfällt also in diesen Kreis und in eine Kurve 3. Ordnung, die im Punkt P einen Doppelpunkt haben muss, da dieser Punkt ein dreifacher Punkt der zerfallenen Kurve 5. Ordnung sein muss. Jeder Strahlen des Büschels (P) einen Kreis bilden, auf dem auch der Fusspunkt, also darf er die Restkurve 3. Ordnung nur noch in einem Fusspunkt schneiden, da wegen der zwei Pole auf jedem Strahle des Büschels (P) sich auf diesem Strahl auch nur Fusspunkte befinden können. Es gilt daher folgender Satz:

Auf den einem Raumpunkt P als Pol zugeordneten Strahlen der Achsenkomplexe eines Polarraumbüschels, die das Büschel (P) 1. Ordnung bilden, befindet sich ausser dem Pol P noch je ein Pol auf jedem dieser Strahlen, und alle diese Pole bilden, wie wir sahen, eine Kurve 3. Ordnung. Die dem Pol P zugeordneten Fusspunkte bilden einen Kreis, während die den zweiten, eine Kurve 3. Ordnung bildenden Polen zugeordneten Fusspunkte eine neue Kurve 3. Ordnung bilden, die mit ihrer erwähnten Polkurve einen gemeinsamen Doppelpunkt hat.

X. Wie bekannt, bilden die einem Punkt P zugeordneten Strahlen in den Achsenkomplexen eines Polarraumbüschels ein Strahlbüschel (P) 1. Ordnung. Ausser dem Pol P befindet sich auf jedem Strahl dieses Büschels der Pol noch eines anderen polaren Raumes innerhalb des Polarraumbüschels, in dem dieser Strahl auch ein Strahl dessen Achsenkomplexes ist. Alle derartigen Pole in der Ebene des Strahlbüschels (P) bilden, wie bekannt, eine Kurve 3. Ordnung. Zieht man jetzt alle Punkte einer Geraden m in Betracht, dann liegen offensichtlich alle derartigen den Punkten der Geraden m zugeordneten Kurven 3. Ordnung auf einer Fläche, die von den den Punkten der Geraden p auf die beschriebene Weise zugeordneten Ebenen in einer Kurve 3. Ordnung geschnitten wird. Diese den Punkten der Geraden m zugeordnete Ebenenmenge bildet ein kubisches Ebenengewinde, da sie als Erzeugnis der Punktreihe der Geraden m und eines ihr projektiv zugeordneten unendlich fernen Strahlbüschels 2. Klasse betrachtet werden kann.

Die den Polen auf den Strahlen des Büschels (P) zugeordneten Fusspunkte bilden, wie vorher bewiesen wurde, eine Kurve 5. Ordnung, die in einen Kreis und eine Kurve 3. Ordnung zerfällt. Alle derartigen allen Punkten der Geraden m zugeordneten Kurven bilden eine weitere Fläche. Die den Punkten der Geraden m reziprok zugeordneten Pole in den Polarräumen eines Büschels (Π_n) bilden ebenfalls eine Fläche, und die diesen reziproken Polen zugeordneten Fusspunkte bilden noch eine weitere Fläche.

Alle diese mit einer Raumgeraden m innerhalb eines Polarraumbüschels verbundenen Probleme bleiben späteren Untersuchungen vorbehalten.

Mathematisches Institut der Universität Zagreb

LITERATUR:

[1] *V. Niče,* Über die Fusspunkte der Strahlen der Achsenkomplexe eines Polarraumes, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **18** (1963), 269—278,

[2] *T. Reye,* Die Geometrie der Lage, Abt. II, 1910,

[3] *T. Reye,* Die Geometrie der Lage, Abt. III, 1910.

OSNI KOMPLEKSI POLARNIH PROSTORA U PRAMENU POLARNIH PROSTORA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Pramenom ploha 2. stupnja zadan je pramen polarnih prostora, kojima su te plohe incidentne, a svakom polarnom prostoru pridružen je njegov osni kompleks. U vezi sa skupom ovakvih kompleksa u jednom pramenu polarnih prostora razmatrani su i riješeni ovi problemi:

1. Jednom polu P pridružene zrake u osnim kompleksima jednog pramena polarnih prostora čine pramen zraka, a nožišta tih zraka leže na kružnici koja prolazi polom P i u tački dijametralnoj tački P okomito siječe pridruženu zraku pola P u tetraedralnom kompleksu ovog pramena polarnih prostora.

2. Nožišta polova pridruženih u pramenu polarnih prostora jednoj ravnini čine u toj ravnini unikursalnu krivulju 3. reda.

3. Zrakama jednog pola P u osnim kompleksima pramena polarnih prostora recipročno pridružene zrake u tim kompleksima čine pravčastu plohu 3. stupnja. Dvostrukim pravcem te plohe prolaze polarne ravnine pola P u polarnim prostorima promatranog pramena.

4. U svim polarnim prostorima jednog pramena, odnosno u njihovim osnim kompleksima, jednom polu P pridružen je po jedan recipročan pol. Ovim recipročnim polovima pridružena nožišta čine prostornu krivulju 6. reda.

5. Najkraće transverzale jednoj tački pridruženih zraka u osnim kompleksima jednog pramena polarnih prostora, i tim zrakama recipročno pridruženih zraka u njihovim kompleksima, čine pravčastu plohu 8. stupnja.

6. Polarnim ravninama jedne tačke prostora u polarnim prostorima jednog pramena recipročno pridružene polarne ravnine omataju stožac 3. razreda.

7. U polarnim prostorima jednog pramena jednom polu recipročno pridruženi polovi čine prostornu krivulju 6. reda.

8. Svaka tačka prostora je vrh od ∞^1 istostranih stožaca 2. stupnja, koje tvore zrake osnih kompleksa pridruženih polarnim prostorima jednog pramena. Izvodnicama ovih stožaca, kao zrakama njihovih osnih kompleksa pridruženi polovi čine opću plohu 3. reda.

9. Jednom polu P pridružene zrake u osnim kompleksima polarnih prostora jednog pramena čine pramen pravaca. Svaka zraka ovog pramena je zraka još jednog osnog kompleksa u tom pramenu, a u tom drugom kompleksu tim zrakama pridruženi polovi čine krivulju 3. reda roda nultoga.

10. Svaki pravac neke tačke P prostora je zraka osnih kompleksa dvaju polarnih prostora jednog pramena. Parovima polova ovih zraka pridruženi parovi nožišta čine plohu 5. reda, kojoj je tačka P trostruka tačka.

11. Na zrakama jednog pola u osnim kompleksima jednog pramena polarnih prostora nalazi se još po jedan pol, a svi ti polovi čine krivulju 3. reda. Ovim polovima u njihovim polarnim prostorima pridružena nožišta čine novu krivulju 3. reda, koja s onom prvom ima zajedničku dvostruku tačku.

(Primljeno 2. VII 1964.)