Serija II T. 18. Zagreb 1963. Broj 4 POSEBNI OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO - FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO - PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Vilko Niče, Zagreb

Über die Fusspunkte der Strahlen des Achsenkomplexes eines Polarraumes

O nožištima zraka osnog kompleksa jednog polarnog prostora

Zagreb 1963

Štamparski zavod „Ognjen Prica" Zagreb, Savska cesta 31, 1963

GLASNIK MAT. - FIZ. I ASTR.
Tom 18. — No. 4 — 1963.

ÜBER DIE FUSSPUNKTE DER STRAHLEN DES ACHSENKOMPLEXES EINES POLARRAUMES

Vilko Niče, Zagreb

Einführung. Die aus den Raumpunkten als Polen auf die ihnen in einem Polarraum zugeordneten Polarebenen gefällten Lote bilden, wie bekannt, den Achsenkomplex dieses Polarraumes. Dieser Strahlenkomplex ist vom 2. Grade, und alle einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Komplexes bilden einen gleichseitigen Kegel 2. Grades, der die drei unendlich fernen Punkte der Achsen dieses Polarraumes und dessen Mittelpunkt enthält. In einer Ebene umhüllen solche Strahlen, wie bekannt, eine Parabel, die alle drei Symmetrieebenen des Polarraumes berührt. Jedem Pol P des Raumes ist durch diesen Polarraum nur ein Strahl seines Achsenkomplexes zugeordnet, und auf diesem Strahl nur ein diesem Pol in seiner Polarebene zugeordneter Fusspunkt. Es gilt aber nicht die Umkehrung, denn jeder Punkt des Raumes ist Pol nur eines Strahles des Achsenkomplexes, aber Fusspunkt von mehreren derartigen Strahlen. Nimmt man irgend einen Punkt P des Raumes als Scheitel des Tangentialkegels der Inzidenzfläche unseres Polarraumes an, dann sind alle drei Achsen dieses Kegels, wie bekannt, auch Strahlen des diesem Polarraum zugeordneten Achsenkomplexes.

Die dem Punkt P in unserem Polarraum zugeordnete Polarebene π schneide die drei Achsen des erwähnten Tangentialkegels in den Punkten M, N, R. Es ist offensichtlich, dass die Punkte M, N, R in dem Polarfeld der Ebene π innerhalb unseres Polarraumes eines ihrer autopolaren Dreiecke bilden, und es bilden demnach die Punkte M, N, R, P die Ecken eines autopolaren Tetraeders in unserem Polarraum. Die den Polen M, N, R zugeordneten Polarebenen sind also die Symmetrieebenen des erwähnten Tangentialkegels mit dem Scheitel P, und dadurch ist der Punkt P der Fusspunkt derjenigen drei Strahlen des Achsenkomplexes, die den Polen M, N, R zugeordnet sind. Man sieht also, dass der Punkt P der Fusspunkt dreier Strahlen des Achsenkomplexes ist, während, wie wir sahen, diesem Punkt als Pol nur ein Strahl dieses Komplexes zugeordnet ist.

Da jeder Strahl g des Achsenkomplexes mit der ihm im Polarraum dieses Komplexes zugeordneten konjugierten Polare g_1 ein sich rechtwinklig kreuzendes Geradenpaar bilden, muss auch die

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

Gerade g_1 ein Strahl dieses Achsenkomplexes sein. Zwei derartige Strahlen eines Achsenkomplexes, und die zwei ihnen zugeordneten Pole P, P_1 und Polarebenen π, π_1 werden als reziproke Polaren (oder Komplexstrahlen), reziproke Pole und reziproke Polarebenen des Polarraumes bezeichnet. Innerhalb des Polarraumes, bzw. seines Achsenkomplexes, wurden viele interessante Sätze gefunden und bewiesen. Fast in keinem dieser Sätze werden aber die Fusspunkte der Strahlen des Achsenkomplexes, und verschiedene geometrische Örter dieser Fusspunkte in einem Polarraum erwähnt und betrachtet. In unserer Arbeit möchten wir folgende Probleme, in denen es sich um die Fusspunkte der Strahlen des Achsenkomplexes handelt, betrachten und lösen:

1. Der geometrische Ort der Fusspunkte der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes.

2. Der geometrische Ort der Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des Achsenkomplexes.

3. Der geometrische Ort der Fusspunkte derjenigen Strahlen des Achsenkomplexes, die einen Strahl dieses Komplexes schneiden.

4. Der geometrische Ort der Fusspunkte derjenigen Strahlen des Achsenkomplexes, deren zugeordnete Pole auf einer Geraden liegen.

5. Die Fusspunkte der eine beliebige Gerade schneidenden Strahlen des Achsenkomplexes.

6. Der geometrische Ort derjenigen Strahlen des Achsenkomplexes, deren Fusspunkte in einer Ebene liegen.

7. Der geometrische Ort der Fusspunkte derjenigen Achsenkomplexstrahlen, deren Pole in einer Ebene liegen.

Zwecks leichterer Ausdrucksweise bezeichnen wir den Polarraum mit (Π), seine Inzidenzfläche 2. Grades mit Π, und den Achsenkomplex dieses Polarraumes mit (A).

1. *Der geometrische Ort der Fusspunkte der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes.* Die einen Raumpunkt P enthaltenden Strahlen eines Achsenkomplexes bilden, wie bekannt, einen gleichseitigen Kegel 2. Grades, und die diesen Strahlen zugeordneten Pole bilden eine kubische Raumhyperbel h^3, die die unendlich fernen Pole der drei Symmetrieebenen der Inzidenzfläche Π und deren Mittelpunkt enthält. Da auf jedem Strahl dieses Kegels der Pol und der ihm zugeordnete Fusspunkt zwei konjugierte Punkte bezüglich der Inzidenzfläche Π sind, kann der geometrische Ort f der Fusspunkte, welche den die Kurve h^3 bildenden Polen zugeordnet sind, durch die allgemeine Inversion der kubischen Raumhyperbel h^3 mittels des Pols P bezüglich der Inzidenzfläche Π bestimmt werden. Da durch die allgemeine Inversion eine quadratische Transformation durchgeführt wird, müsste die Raumkurve f offensichtlich von der Ordnung 6 sein. Da aber die Raumkurve h^3 den Inversionspol P enthält, muss diese Raumkurve 6. Ordnung in eine Gerade und eine Raumkurve f^5 5. Ordnung zerfallen. Dies kann sehr leicht folgenderweise bewiesen werden: Man wähle irgend eine Regelfläche R^2 2. Grades, die durch die Bisekanten der kubischen Raumhyperbel h^3 gebildet wird. Da diese Raumkurve h^3 den Punkt P enthält, befindet sich dieser Punkt P auch auf der erwähnten Regelfläche 2. Grades. Die Fläche R^4 4. Ordnung, die durch die eben beschriebene allgemeine Inversion aus dieser Regelfläche 2. Grades erzeugt wird, zerfällt in die Polarebene π des Pols P bezüglich der Inzidenzfläche Π im Polarraum (Π) und in eine Fläche 3. Ordnung, da in der allgemeinen Inversion dem Pol P alle Punkte seiner Polarebene π zugeordnet sind. Die Durchdringungskurve 6. Ordnung dieser Fläche 3. Ordnung und des gleichseitigen Achsenkomplexstrahlenkegels 2. Grades des Raumpunktes P müsste jetzt die gesuchte Raumkurve sein, die durch die Fusspunkte der den Punkt P enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes gebildet wird.

Die Regelfläche R^2 2. Grades, die aus den Bisekanten der kubischen Raumhyperbel als Erzeugenden zusammengesetzt ist, nehmen wir ganz beliebig an. Diese Regelfläche 2. Grades und der gleichseitige Achsenkomplexstrahlenkegel 2. Grades mit dem Scheitel P, auf dem sich auch die kubische Raumhyperbel h^3 befindet, müssen eine gemeinsame Raumkurve 4. Ordnung haben. Da sich aber auf beiden diesen Flächen unsere kubische Raumhyperbel h^3 befindet, müssen diese Flächen noch eine gemeinsame Erzeugenden haben. In der allgemeinen quadratischen Inversion bleiben, wie bekannt, alle den Pol dieser Inversion enthaltenden Geraden invariant, resp. sie transformieren sich bei dieser Inversion in sich selbst. Die gemeinsame Erzeugende der Regelfläche R^2 und des Achsenkomplexstrahlenkegels des Punktes P, die selbstverständlich den Inversionspol P enthält, bleibt also in unserer allgemeinen Inversion sich selbst zugeordnet. Die oben erwähnte Durchdringungskurve 6. Ordnung der erwähnten zwei Flächen 2. und 3. Ordnung zerfällt daher in diese gemeinsame Erzeugende und eine Raumkurve f^5 5. Ordnung.

Da die Raumkurve f^5 auf dem Achsenkomplexstrahlenkegel 2. Grades mit dem Scheitel P liegt, und auf jeder Erzeugenden sich ausser dem Scheitel P nur ein Punkt dieser Raumkurve f^5 befindet, muss offensichtlich der Scheitel P ein dreifacher Punkt dieser Raumkurve f^5 sein. Das folgt auch aus der Tatsache, dass die kubische Raumhyperbel h^3 die Polarebene π des Punktes P in drei Punkten schneidet, deren durch die beschriebene Inversion transformierte Punkte in den Punkt P fallen. Wir haben also damit folgenden Satz bewiesen:

Die Fusspunkte der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen eines Achsenkomplexes bilden eine Raumkurve 5. *Ordnung, deren dreifacher Punkt dieser Raumpunkt ist.*

Dass der Punkt P ein dreifacher Punkt der Raumkurve f^5 ist, folgt offensichtlich auch aus der Tatsache, dass jeder Punkt des Raumes der Fusspunkt dreier Strahlen des Achsenkomplexes ist.

2. *Der geometrische Ort der Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Achsenkomplexstrahlen.* Einem Punkt P sei im Polarraum (Π) die Polarebene π zugeordnet. Die den Punkt P enthaltende Normale g der Ebene π ist, wie bekannt, ein Strahl des Achsenkomplexes (A). Der Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene π ist der dem Pol P zugeordnete Fusspunkt F. Die der Geraden g im Polarraum (Π) konjugiert zugeordnete Gerade g_1 liegt in der Polarebene π, und die allen Ebenen der Geraden g im Polarraum (Π) zugeordneten Pole liegen auf dieser Geraden g_1. Da sich die Geraden g, g_1 rechtwinklig kreuzen, folgt, dass auch die Gerade g_1 ein Strahl des Achsenkomplexes (A) ist. Der Pol P_1 dieses Strahles g_1 bildet mit dem Pôl P ein Paar reziproker Pole, während die Geraden g, g_1 ein Paar reziproker Komplexstrahlen (Achsen) bilden. Die Ebene π und die die Gerade g enthaltende und auf die Gerade g_1 senkrechte Ebene π_1 bilden ein durch den Polarraum bestimmtes reziprokes Ebenenpaar. Die den auf der Geraden g_1 liegenden Polen zugeordneten Strahlen des (A) Komplexes liegen in der Ebene π und hüllen, wie bekannt, eine Parabel r ein, die alle drei Symmetrieebenen des Polarraumes (Π) berührt. Die Fusspunkte dieser in der Ebene π liegenden Strahlen des Achsenkomplexes (A) bilden also die Fusspunktkurve der Parabel r für den Pol F. Sie bilden daher eine unikursale zirkuläre Kurve 3. Ordnung mit dem Doppelpunkt F. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die Ebene π_1, wo der Doppelpunkt einer solchen Kurve der Fusspunkt F_1 des Strahles g_1 ist. Die Fusspunkte F, F_1 liegen auf der Schnittgeraden der Ebenen π, π_1, die die kürzeste Transversale des reziproken Achsenkomplexstrahlenpaares g, g_1 ist. Da die Ebene π, bzw. π_1 im Raum ganz beliebig angenommen werden kann, gilt folgender Satz:

Die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen eines Achsenkomplexes bilden eine zirkuläre Kurve 3. Ordnung, deren Doppelpunkt sich im Fusspunkt des dieser Ebene zugeordneten Pols befindet. Die Doppelpunkte solcher in zwei reziproken Ebenen liegenden Kurven 3. Ordnung liegen auf deren Schnittgeraden, die die kürzeste Transversale der diesem reziproken Ebenenpaare zugeordneten reziproken Achsenkomplexstrahlen ist.

3. *Der geometrische Ort der Fusspunkte der einen Strahl des Achsenkomplexes schneidenden Strahlen dieses Komplexes.* Man betrachte nun alle Ebenen $\pi_n{}^1$ des Strahles g die das Ebenenbüschel [g] bilden. Jeder Strahl des (A) Komplexes, der diesen Strahl g schneidet, befindet sich in einer Ebene des Ebenenbüschels [g]. Die den in jeder Ebene der Geraden g liegenden Achsenkomplexstrahlen zugeordneten Fusspunkte bilden, wie bekannt, eine zirkuläre Kurve 3. Ordnung. Da aber alle Ebenen des Büschels [g] auf der Ebene π senkrecht stehen, liegen auch die diesen Ebenen zugeordneten Fusspunkte F_n^1 in dieser Ebene, weil die diesen Ebenen und ihren Fusspunkten F_n^1 zugeordneten Pole auf der Geraden g_1 in der Ebene π liegen. Die Fusspunkte F_{n_1} in der Ebene π bilden, wie wir eben sahen, eine zirkuläre Kurve 3. Ordnung, deren Punkte aber Doppelpunkte der in den Ebenen des Büschels $[g]$ sich befindenden analogen zirkulären Kurven 3. Ordnung sind. Alle derartigen in den Ebenen des Büschels $[g]$ sich befindenden zirkulären Kurven 3. Ordnung bilden eine Fläche $[P]$, die in der Ebene π eine zirkuläre Doppelkurve 3. Ordnung besitzt und den absoluten Kegelschnitt enthält.

Die den Achsenkomplexstrahlen in der Ebene π konjugiert zugeordneten (reziproken) Komplexstrahlen enthalten den Punkt P und bilden, wie bekannt, einen Kegel 2. Grades. Der Komplexstrahl g ist selbstverständlich auch eine Erzeugende dieses Kegels, die sich aber in allen Ebenen des Ebenenbüschels $[g]$ befindet. Auf Grund dessen folgt ferner, dass alle in den Ebenen π_n^1 des Büschels $[g]$ sich befindenden vorher beschriebenen zirkulären Kurven 3. Ordnung den Fusspunkt F des Achsenkomplexstrahles g enthalten. Die Ebene π schneidet also jede dieser zirkulären Kurven 3. Ordnung in den Ebenen π_n^1 des Büschels $[g]$ in deren Doppelpunkt F_n^1 und deren einfachen Punkt F. Die gesuchte dem Pol P zugeordnete Fläche $[P]$ der Fusspunkte aller den Achsenkomplexstrahl g schneidenden Komplexstrahlen wird also von der Ebene π nur in einer zirkulären Doppelkurve 3. Ordnung geschnitten. Die Fläche $[P]$ kann daher nur 6. Ordnung sein. Da jede Ebene der Geraden g diese Fläche nur in der bekannten zirkulären Kurve 3. Ordnung schneidet, muss diese Gerade eine dreifache Gerade dieser Fläche sein. Diese Tatsache wird auch dadurch bestätigt, dass jeder Punkt P des Raumes der Fusspunkt derjenigen Strahlen des Achsenkomplexes ist, die die Achsen des den Scheitel P enthaltenden Tangentialkegels der Inzidenzfläche Π sind. Es gilt also folgender Satz:

Die Fusspunkte aller derjenigen Komplexstrahlen eines durch einen Polarraum bestimmten Achsenkomplexes, die einen Strahl g dieses Komplexes schneiden, bilden eine Fläche 6. *Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt, die dreifache Gerade g und eine in der dem Strahl g zugeordneten Polarebene π sich befindende zirkuläre Doppelkurve* 3. *Ordnung enthält.*

4. *Der geometrische Ort der Fusspunkte derjenigen Strahlen des Achsenkomplexes, die den ihnen zugeordneten Pol auf einer Geraden haben.* Man betrachte ferner eine ganz beliebige Gerade p des Raumes. Die den Ebenen dieser Geraden im Polarraum (Π) zugeordneten Pole befinden sich auf der dieser Geraden p konjugiert zugeordneten Polare p_1. Die Punktreihe (p_1) und das Ebenenbüschel $[p]$ sind also projektiv zugeordnet $[p] \overline{\wedge} (p_1)$. Die aus den Punkten G_n der Geraden p_1 auf die diesen Punkten zugeordneten Ebenen γ_n der Geraden p gefällten Lote sind Strahlen des diesem Polarraum

(Π) zugeordneten Achsenkomplexes. Die Punkte G_n sind Pole, und die Ebenen γ_n sind Polarebenen, die diesen Komplexstrahlen des Achsenkomplexes (A) des Polarraumes (Π) zugeordnet sind. Die Fusspunkte in den Ebenen γ_n der diesen Ebenen auf die beschriebene Weise zugeordneten Achsenkomplexstrahlen bilden also eine eindimensionale stetige Punktmenge, die als das Erzeugnis dreier projektiv zugeordneten Ebenenbüschel betrachtet werden kann. Es handelt sich also um eine Raumkurve 3. Ordnung. Die Achsen des ersten und des zweiten Ebenenbüschels sind die Geraden p und p_1, während die Achse des dritten Ebenenbüschels die unendlich ferne und auf die Gerade p senkrechte Gerade ist. Der geometrische Ort der betrachteten Achsenkomplexstrahlen, die ihre Pole auf der Geraden p_1 haben, bilden also ein hyperbolisches Paraboloid (H). Da jede Gerade des Raumes als Gerade p oder p_1, angenommen werden kann, gilt folgender Satz:

Die Fusspunkte derjenigen Strahlen des Achsenkomplexes, deren Pole sich auf einer Geraden befinden, bilden eine Raumkurve 3. Ordnung.

Wenn diese Gerade ein Strahl des Achsenkomplexes ist, dann geht diese Raumkurve in eine ebene zirkuläre Kurve 3. Ordnung über. Die im erwähnten Satz durch die Fusspunkte gebildete Raumkurve 3. Ordnung schneidet offensichtlich zweimal den absoluten Kegelschnitt, und zwar in seinen Schnittpunkten mit der unendlich fernen und auf die Gerade p senkrechten Achse des dritten Ebenenbüschels. Es handelt sich hier also um einen kubischen Raumkreis.

5. *Der geometrische Ort der Fusspunkte der eine beliebige Gerade p schneidenden Strahlen des Achsenkomplexes.* Man betrachte wieder eine beliebige Gerade p des Raumes. Den Ebenen γ_n der Geraden p als Polarebenen sind im Polarraum (Π) Pole P_n zugeordnet, die auf der der Geraden p konjugiert zugeordneten Polare p_1 liegen. Die Pole P_n bilden eine Punktreihe (p_n^1), die zu dem Ebenenbüschel $[p]$ der Ebenen γ_n, wie bekannt, projektiv zugeordnet ist. Die aus den Punkten P_n auf die ihnen zugeordneten Polarebenen γ_n gefällte Lote sind Strahlen des Achsenkomplexes (A), die das schon vorher erwähnte hyperbolische Paraboloid (H) bilden. Die Fusspunkte dieser Lote in den Ebenen γ_n sind Doppelpunkte der durch die Fusspunkte der Komplexstrahlen in diesen Ebenen gebildeten zirkulären Kurven 3. Ordnung. Diese Doppelpunkte bilden eine kubische Raumkurve k^3, wie wir eben sahen. Da die Geraden p, p_1 Achsen der zwei die Raumkurve k^3 bildenden Ebenenbüschel sind, sind diese Geraden p, p_1 Bisekanten dieser kubischen Raumkurve k^3. Die den Achsenkomplexstrahlen in jeder Ebene γ_n des Büschels $[p]$ zugeordneten Fusspunkte bilden die schon bekannte zirkuläre Kurve 3. Ordnung, alle diese zirkulären Kurven bilden eine Fläche (G), die den absoluten Kegelschnitt enthält und auf der die kubische Raumkurve k^3 als deren Doppelkurve liegt. Da jeder die Gerade p schneidende Strahl des Achsenkomplexes

in einer Ebene γ_n dieser Geraden liegt, ist die Fläche (G) der geometrische Ort der Fusspunkte aller die Gerade p schneidenden Komplexstrahlen.

Wir sahen nun, dass jede Ebene γ_n der Geraden p die Fläche (G) in einer zirkulären Kurve 3. Ordnung schneidet. Wir wissen aber auch, dass jeder Punkt der Geraden p der gemeinsame Fusspunkt dreier Strahlen des Achsenkomplexes (A) ist, also dass die Gerade p eine dreifache Gerade der Fläche (G) ist. Die Schnittkurven der Fläche (G) und der Ebenen γ_n zerfallen also in die dreifache Geraden p und eine zirkuläre Kurve 3. Ordnung. Auf Grund dieser Tatsache folgt, dass die Fläche (G) 6. Ordnung ist. Es folgt also auch dieser Satz:

Der geometrische Ort der Fusspunkte derjenigen Strahlen des Achsenkomplexes, die eine beliebige Gerade p schneiden, ist eine Fläche 6. Ordnung, die eine kubische Doppelraumkurve hat, den absoluten Kegelschnitt enthält, und der die Gerade p als dreifache Gerade angehört.

6. *Der geometrische Ort der Achsenkomplexstrahlen, deren Fusspunkte in einer Ebene liegen.* Wir sahen in unseren bisherigen Ausführungen, dass die Fusspunkte der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes auf einer Raumkurve 5. Ordnung liegen. Die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen dieses Komplexes bilden, wie bekannt, eine zirkuläre unikursale Kurve 3. Ordnung. Durch eine Ebene α wird eine derartige Raumkurve 5. Ordnung jedes Raumpunktes in 5 Punkten geschnitten, also jeder Raumpunkt enthält 5 Achsenkomplexstrahlen deren Fusspunkte in der Ebene α liegen. Die zirkuläre Fusspunktkurve 3. Ordnung der Achsenkomplexstrahlen in jeder Ebene des Raumes schneidet die Ebene α in drei Punkten. Es befinden sich also in jeder Ebene des Raumes drei Achsenkomplexstrahlen, deren Fusspunkte in der Ebene α liegen. Es gilt daher folgender Satz:

Diejenigen Strahlen eines Achsenkomplexes, deren Fusspunkte in einer Ebene liegen, bilden eine Strahlenkongruenz 5. Ordnung 3. Klasse.

7. *Der geometrische Ort der Fusspunkte derjenigen Achsenkomplexstrahlen, deren Pole in einer Ebene liegen.* Die Pole der in einer Ebene liegenden Strahlen des Achsenkomplexes liegen, wie bekannt, auf einer Geraden, während die Pole der einen Raumpunkt enthaltenden Achsenkomplexstrahlen, wie bekannt, auf einer kubischen Raumhyperbel liegen. Jeder Raumpunkt enthält also drei Achsenkomplexstrahlen deren Pole in einer Ebene α liegen, während in jeder Ebene des Raumes nur ein solcher Strahl liegt. Die Strahlen des Achsenkomplexes, deren Pole in einer Ebene α liegen, bilden also eine Strahlenkongruenz 3. Ordnung 1. Klasse.

Man wähle im Raum eine Ebene β, deren Pol im Polarraum (Π) mit B bezeichnet sei. Dem Punktfeld (β) der Ebene β ist das

Ebenenbündel (B) des Punktes B korrelativ zugeordnet. Die aus den Punkten des Punktfeldes (β) gefällten Lote auf die diesen Punkten zugeordneten Ebenen des Bündels (B) sind Strahlen des dem Polarraum (Π) zugeordneten Achsenkomplexes. Diese Strahlen sind Verbindungsgeraden der Punkte des Punktfeldes (β) mit denjenigen Punkten der unendlich fernen Ebene, die bezüglich des absoluten Kegelschnittes den Schnittgeraden dieser unendlich fernen Ebene und der Ebenen des Ebenenbündels (B) polar zugeordnet sind. Der geometrische Ort der Strahlen des Achsenkomplexes, deren Pole in einer Ebene β liegen, kann also auch als das Erzeugnis zweier kollinear zugeordneten Punktfelder erhalten werden, von denen ein Punktfeld unendlich fern liegt. Das Erzeugnis ist, wie bekannt, eine Strahlenkongruenz 3. Ordnung 1. Klasse.

Jedem Strahl dieser Strahlenkongruenz 3. Ordnung 1. Klasse ist die zu diesem Strahl senkrechte Ebene des Ebenenbündels (B) zugeordnet, und die Schnittpunkte dieser Ebene-Geradenpaare bilden den gesuchten geometrischen Ort. Durch diese zweidimensionale stetige Schnittpunktmenge wird eine Fläche gebildet, die den absoluten Kegelschnitt enthält. Man sieht also, dass die gesuchte Fläche die Fusspunktfläche unserer Strahlenkongruenz 3. Ordnung 1. Klasse bezüglich des Pols B ist.

Die Strahlenkongruenz 3. Ordnung 1. Klasse, die durch die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte zweier kollinearer Punktfelder gebildet wird, ist mit der Biplanarenkongruenz eines kubischen Ebenengewindes identisch, das durch die Schmiegebenen einer kubischen Raumkurve gebildet wird. Die zwei Ebenen der Punktfelder gehören auch dem Ebenengewinde an. In unserem Fall ist eine dieser zwei Ebenen der Punktfelder unendlich fern, also besteht das Ebenengewinde aus den Schmiegebenen einer kubischen Raumparabel.

Eine bekannte Eigenschaft der Biplanarenkongruenz eines kubischen Ebenengewindes ist die, dass jeder Punkt in jeder Ebene dieses Gewindes zwei in dieser Ebene liegende Strahlen der Biplanarenkongruenz enthält. Dies gilt selbstverständlich auch für die unendlich ferne Ebene in unserem Fall. Die durch die Strahlen der Biplanarenkongruenz in jeder Ebene des kubischen Ebenengewindes eingehüllten Kurven 2. Grades berühren, wie bekannt, alle Ebenen dieses Gewindes. In unserem Fall sind also derartige Kurven Parabeln, was mit einer solchen Eigenschaft des Achsenkomplexes übereinstimmt und auch übereinstimmen muss, da sich diese Biplanarenkongruenz in unserem Fall in dem Achsenkomplex (A) befindet.

Man wähle im Raum eine beliebig liegende Gerade s. Diejenigen Strahlen unserer speziellen Biplanarenkongruenz, die die Gerade s schneiden, bilden, wie bekannt, eine Regelfläche 4. Grades, zu der die Gerade s als dreifache Gerade gehört. Die Fusspunktkurve dieser Regelfläche bezüglich des Pols B ist eine Raumkurve 8. Ordnung. Die Biplanarenkongruenz enthält in unserem Fall in der unendlich fernen Ebene ein Strahlenbüschel 2. Klasse, da auch diese Ebene, wie bekannt, unserem Ebenengewinde angehört. Der unendlich ferne Punkt der dreifachen Geraden s der erwähnten Regelfläche 4. Grades enthält also zwei unendlich ferne Strahlen unserer Biplanarenkongruenz, die zu dem (A) Achsenkomplex gehört. Dadurch hat aber auch die erwähnte Regelfläche 4. Grades zwei unendlich ferne Erzeugende. Der eigentliche Teil der Fusspunktkurve 8. Ordnung dieser Regelfläche bezüglich des Pols B wird also in diesem Fall auf eine Raumkurve 6. Ordnung herabgesetzt. Da die Gerade s dreifache Gerade der Regelfläche 4. Grades ist, befindet sich in jeder Ebene dieser Geraden nur eine einfache Erzeugende dieser Regelfläche. Jede Ebene der Geraden s schneidet also die erwähnte Fusspunktkurve 6. Ordnung nur in einem Punkt ausser der Geraden s, die fünf übrigen Schnittpunkte müssen sich also auf der Geraden s befinden. Es folgt daher, dass auf der Geraden s sich die Fusspunkte solcher fünf Strahlen unserer Biplanarenkongruenz, bzw. Strahlen des Achsenkomplexes (A) befinden, deren Pole in der Ebene β liegen. Der geometrische Ort der Fusspunkte aller derjenigen Strahlen des Achsenkomplexes (A), deren Pole in der Ebene β liegen, hat also mit jeder Geraden des Raumes fünf Punkte gemein. Dieser geometrische Ort ist demnach eine Fläche 5. Ordnung, und es gilt folgender Satz:

Die Fusspunkte derjenigen Strahlen eines Achsenkomplexes, deren Pole in einer Ebene des Raumes liegen, bilden eine Fläche 5. *Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt enthält.*

Mathematisches Institut
der Universität Zagreb

O NOŽIŠTIMA ZRAKA OSNOG KOMPLEKSA JEDNOG POLARNOG PROSTORA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

U danom polarnom prostoru promatramo okomice spuštene iz svake tačke prostora na polarnu ravninu pridruženu toj tački kao polu. Ove okomice čine *osni kompleks* tog polarnog prostora. Ovaj je kompleks drugog stupnja. Sve zrake tog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom prostora, čine istostrani stožac 2. stupnja, a sve zrake u jednoj ravnini omataju parabolu, koja dira sve tri simetralne ravnine tog polarnog prostora. Svakoj tački prostora pridružena je kao polu jedna zraka tog kompleksa, a na svakoj zraci nalazi se njeno nožište u polarnoj ravnini.

Iz opisane okomitosti izlazi da je konjugirana polara svake zrake kompleksa također zraka kompleksa. Ovakav par zraka kompleksa nazvan je par *recipročnih zraka.* Polovi tog para zraka su *recipročni polovi,* njihova nožišta *recipročna nožišta,* a polarne ravnine recipročnih polova *recipročne polarne ravnine.*

Svaka tačka prostora je, međutim, nožište triju zraka ovog kompleksa. Ove zrake su osi dirnog stošca incidentne plohe 2. stupnja, kojemu je ta tačka vrh.

U postojećoj literaturi promatran je i istražen cio niz problema o ovom osnom kompleksu u vezi s recipročnim polovima, zrakama i polarnim ravninama, kao i raznim njihovim geometrijskim mjestima. Međutim, analogni problemi za nožišta zraka nisu gotovo niti dodirnuti. U vezi s nožištima zraka osnog kompleksa dobiveni su u ovoj radnji ovi rezultati:

1. Geometrijsko mjesto nožišta zraka osnog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom prostora, je prostorna krivulja 5. reda.

2. Geometrijsko mjesto nožišta zraka osnog kompleksa, koje leže u jednoj ravnini je cirkularna krivulja 3. reda, roda nultoga.

3. Nožišta zraka osnog kompleksa, koje sijeku jednu zraku tog kompleksa, čine opću plohu 6. reda s ravninskom dvostrukom krivuljom 3. reda. Ta ploha prolazi apsolutnom čunjosječnicom.

4. Nožišta onih zraka osnog kompleksa, kojima su polovi na jednom pravcu, čine prostornu krivulju 3. reda.

5. Geometrijsko mjesto nožišta zraka osnog kompleksa, koje sijeku bilo koji pravac u prostoru je opća ploha 6. reda s dvostrukom prostornom krivuljom 3. reda i jednim trostrukim pravcem.

6. Sve zrake osnog kompleksa, kojima nožišta leže u jednoj ravnini, čine kongruenciju 5. reda i 3. razreda.

7. Geometrijsko mjesto nožišta zraka osnog kompleksa, kojima polovi leže u jednoj ravnini, je opća ploha 5. reda.

(Primljeno 10. XII 1963.)