Serija II T. 18. Zagreb 1963. Broj 4 POSEBNI OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO - FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO - PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Vilko Niče, Zagreb

Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. grades

Kompleks normala ploha 2. stupnja jednog pramena takvih ploha

Zagreb 1963

Štamparski zavod „Ognjen Prica" Zagreb, Savska cesta 31, 1963

GLASNIK MAT. - FIZ. I ASTR.
Tom 18. — No. 4 — 1963.

NORMALENKOMPLEX DER FLÄCHEN EINES FLÄCHEN-BÜSCHELS 2. GRADES

Vilko Niče, Zagreb

Einführung. Die Normalen einer Fläche 2. Grades bilden, wie bekannt, eine Strahlenkongruenz 6. Ordnung 2. Klasse. Durch jede in einem Büschel sich befindende Fläche 2. Grades ist eine solche Strahlenkongruenz bestimmt. Wegen der stetigen Zusammenfassung der Flächen in einem Flächenbüschel 2. Grades bilden auch die Normalen der Flächen dieses Büschels eine stetige kubische Strahlenmenge, die als Strahlenkomplex bekannt ist. Da durch jedes Flächenbüschel 2. Grades ein Polarraumbüschel bestimmt ist, in dem die Flächen dieses Büschels Inzidenzflächen sind, sehen wir, dass in jedem Polarraumbüschel ein derartiger Normalenkomplex besteht und durch ihn bestimmt ist. In dieser Arbeit werden der Grad dieses Strahlenkomplexes und seine wichtigsten Eigenschaften bestimmt.

Jeder Punkt des Raumes, ausser den Punkten der Grundkurve, enthält nur eine Fläche eines Flächenbüschels 2. Grades. Jeder Punkt des Raumes ist also der Fusspunkt nur eines Strahles des Normalenkomplexes eines Polarraumbüschels. In dieser Arbeit werden die geometrischen Örter derjenigen Strahlen des Normalenkomplexes betrachtet, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, oder eine Gerade schneiden, oder in einer Ebene liegen. Es werden auch die geometrischen Örter derjenigen Strahlen betrachtet, deren Fusspunkte auf einer Geraden, oder in einer Ebene liegen.

Der Einfachkeit halber bezeichnen wir unser Polarraumbüschel mit (Π_n), sein Inzidenzflächenbüschel 2. Grades mit Π_n und den Normalenkomplex dieses Inzidenzflächenbüschels mit (NK). Die Grundkurve des Büschels Π_n sei mit c^4 bezeichnet.

1. *Die Fusspunkte der mit einer Ebene parallel liegenden Strahlen des Komplexes* (NK). Man wähle beliebig im Raum eine Ebene α. Das Inzidenzflächenbüschel Π_n schneidet diese Ebene in einem Kurvenbüschel 2. Grades. Die Polarebenen des unendlich fernen zur Ebene α senkrecht liegenden Punktes bezüglich aller Flächen des Inzidenzflächenbüschels Π_n bilden, wie bekannt, ein Ebenenbüschel $[o]$, dessen Achse mit o bezeichnet sei. Jede Ebene des Büschels $[o]$ ist die Polarebene bezüglich derjenigen Fläche des

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

Inzidenzflächenbüschels, die dessen Mittelpunkt enthält, da der Mittelpunkt einer Fläche 2. Grades der Pol der unendlich fernen Ebene bezüglich dieser Fläche ist. Da die Berührungsebenen jeder Fläche des Inzidenzflächenbüschels längs der Schnittkurve mit deren Polarebene in dem Ebenenbüschel [o] den zur Ebene α senkrecht unendlich fern liegenden Punkt enthalten, also einen Zylinder umhüllen, müssen die Normalen der Inzidenzflächen längs der vorher beschriebenen Schnittkurven mit der Ebene α parallel liegen. Alle derartigen Normalen bilden also eine konoidale Strahlenkongruenz, deren Strahlen mit der Ebene α parallel sind. Die Fusspunkte aller dieser Strahlen bilden eine Fläche 3. Ordnung, die durch das Inzidenzflächenbüschel Π_n 2. Grades und das ihm projektiv zugeordnete Ebenenbüschel [o] erzeugt wird. Es gilt also offensichtlich folgender Satz:

Die Fusspunkte der mit einer Ebene parallel liegenden Strahlen des Normalenkomplexes eines Flächenbüschels 2. *Grades bilden eine Fläche* 3. *Ordnung.*

2. *Die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des Normalenkomplexes (NK).* Es ist offensichtlich, dass die Ebene α die ihr auf die beschriebene Weise zugeordnete Fläche 3. Ordnung in einer Kurve schneidet. Alle Punkte dieser Kurve sind also Fusspunkte der in der Ebene α sich befindenden Strahlen unseres Normalenkomplexes (NK). Da jede Ebene des Raumes als Ebene α angenommen werden kann, gilt folgender Satz:

Die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des Normalenkomplexes eines Flächenbüschels 2. *Grades bilden eine Kurve* 3. *Ordnung.*

3. *Die Fusspunkte der eine Gerade p schneidenden Strahlen des Normalenkomplexes (NK).* Diejenigen Strahlen des Normalenkomplexes (*NK*), die eine Gerade p schneiden, bilden eine gewisse Strahlenkongruenz. Die Fusspunkte dieser Komplexstrahlen bilden eine stetige zweidimensionale Punktmenge, also eine Fläche, deren Ordnung wir jetzt bestimmen werden. Die Fusspunkte der in jeder Ebene der Geraden p liegenden Komplexstrahlen bilden, wie wir vorher sahen, eine Kurve 3. Ordnung. Jede Ebene der Geraden p schneidet also die gesuchte Fläche in einer Kurve 3. Ordnung. Jeder Punkt der Geraden p ist auch Fusspunkt eines Strahles des Normalenkomplexes, der die Gerade p schneidet. Die Gerade p befindet sich also auf der gesuchten Fläche. Jede Ebene der Geraden p schneidet also die gesuchte Fläche in dieser Geraden und in einer Kurve 3. Ordnung. Es gilt daher folgender Satz:

Die Fusspunkte der eine Gerade p schneidenden Strahlen des Normalenkomplexes eines Polarraumbüschels, resp. Flächenbüschels 2. *Grades bilden eine Fläche* 4. *Ordnung, die diese Gerade p enthält.*

Ist die Gerade p ein Strahl des Normalenkomplexes (NK), dessen Fusspunkt ein auf ihm liegender Punkt P ist, so enthalten die in den Ebenen dieses Komplexstrahles p liegenden Fusspunktkurven 3. Ordnung diesen Punkt P. Jede Gerade dieses Punktes P liegt in einer Ebene des Komplexstrahles p, schneidet also die eben erwähnte Fläche 4. Ordnung noch in zwei weiteren Punkten. Der Fusspunkt P ist daher ein Doppelpunkt dieser Fläche 4. Ordnung. Es gilt also folgender Satz:

Die Fusspunkte der einen Strahl p des Normalenkomplexes schneidenden Strahlen dieses Komplexes bilden eine Fläche 4. Ordnung, die im Fusspunkt P dieses Strahles einen Doppelpunkt hat.

Die Normale einer beliebigen Fläche in einem ihrer unendlich fernen Punkte liegt ganz in der unendlich fernen Ebene des Raumes, da sie die Verbindungsgerade dieses Punktes und des Pols der unendlich fernen Tangente dieser Fläche in diesem Punkt bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist. Jeder Punkt der unendlich fernen Ebene enthält eine Fläche des Flächenbüschels Π_n, deren Normale in diesem unendlich fernen Fusspunkt, wie eben erwähnt, in der unendlich fernen Ebene liegt. Nimmt man die oben erwähnte Gerade p in der unendlich fernen Ebene, so wird diese von allen ∞^2 in dieser Ebene liegenden Strahlen des Normalenkomplexes (NK) geschnitten, deren Fusspunkte die ganze unendlich ferne Ebene überdecken. Es folgt also, dass die Fusspunkte der eine unendlich ferne Gerade schneidenden Strahlen des Normalenkomplexes (NK) eine Fläche 4. Ordnung bilden, die in eine Fläche 3. Ordnung und in die unendlich ferne Ebene zerfällt. Diese Fläche 3. Ordnung fanden wir schon vorher als den geometrischen Ort der Fusspunkte der mit einer Ebene α parallel liegenden Komplexstrahlen.

4. *Der Grad des Normalenkomplexes* (NK). Durch eine Ebene wird jedes Flächenbüschel 2. Grades in einem Kurvenbüschel 2. Grades geschnitten, dessen Grundpunkte die vier Schnittpunkte der Grundkurve c^4 des Flächenbüschels Π_n in dieser Schnittebene sind. In jedem derartigen Schnittkurvenbüschel 2. Grades zerfallen drei Kurven in Geradenpaare, welche die Gegenseiten des durch die vier Schnittpunkte gebildeten Sechsseites bilden. Wie bekannt, schneidet jede Berührungsebene einer Fläche 2. Grades diese Fläche in einem reellen oder konjugiert imaginären Erzeugendenpaar. Die drei in einer Schnittebene sich befindenden zerfallenen Geradenpaare sind also Erzeugendenpaare dreier Flächen des Flächenbüschels Π_n 2. Grades. Durch jede Ebene des Raumes werden daher drei Flächen des Flächenbüschels Π_n berührt, deren Berührungspunkte sich in den Schnittpunkten dieser Erzeugendenpaare befinden. Die drei parallelen, diesen Berührungspunkten zugeordneten Normalen sind, selbstverständlich, Strahlen unseres Normalenkomplexes. Betrachtet man nun die Ebenen einer Raumgeraden p, also ein Ebenenbüschel der Geraden p, so bilden alle derartigen drei in jeder Ebene dieses Ebenenbüschels sich befindenden Berührungspunkte eine Raumkurve 5. Ordnung k^5, wobei die Gerade p eine Bisekante dieser Kurve ist [2]. Jedem Punkt dieser Kurve ist als Fusspunkt ein Strahl unseres Strahlenkomplexes zugeordnet, und drei derartige Strahlen sind immer im Raum parallel und auf der Gerade p senkrecht. Alle derartigen, durch eine Gerade p bestimmten Strahlen des Normalenkomplexes bilden also ein Konoid mit einer dreifachen unendlich fernen, auf der Geraden p senkrechten Leitgeraden. Da aber jede auf der Geraden p senkrechte Ebene diese Raumkurve k^5 in fünf Punkten schneidet, befinden sich in ihr fünf Erzeugende des der Geraden p zugeordneten Konoides. Offenbar ist dieses Konoid 8. Grades.

Man nehme jetzt an, dass sich die Gerade p unendlich fern befindet. Das Ebenenbüschel dieser Geraden bilden jetzt parallele Ebenen, und das vorher beschriebene Konoid der Raumkurve k^5 geht hier in einen Strahlenkegel mit unendlich fernen Scheitel P_n, also in einen Zylinder über, da alle Senkrechten einer unendlich fernen Geraden p_n desen Pol P_n bezüglich des absoluten Kegelschnittes enthalten. Da sich im Punkt P_n keiner der fünf unendlich fernen Punkte der Raumkurve k^5 zu befinden braucht, muss dieser Strahlenzylinder 5. Ordnung sein. Alle Erzeugenden dieses Zylinders sind Strahlen des Normalenkomplexes (NK), da es keine Normale einer Inzidenzfläche unseres Polarraumbüschels (Π_n) gibt, die den Punkt P_n enthielte, und die keine Erzeugende dieses Zylinders 5. Grades wäre. Jeder unendlich ferne Punkt jeder Ebene β des Raumes ist der Scheitel eines derartigen diesem Punkt zugeordneten Zylinders 5. Grades, den diese Ebene in 5 Erzeugenden schneidet. Alle ∞^1 dieser Gruppen paralleler Erzeugenden in der Ebene β hüllen eine Kurve ein, deren Klasse dem Grad des Normalenkomplexes (NK) unseres Polarraumbüschels (Π_n) gleich ist. Da jeder unendlich ferne Punkt der Ebene β fünf Tangenten der erwähnten Einhüllenden enthält, und die Fusspunkte der in der Ebene β sich befindenden Strahlen des Komplexes (NK) in dieser Ebene eine Kurve 3. Ordnung bilden, so folgt, dass die durch die Strahlen des (NK) Komplexes in der Ebene β eingehüllte Kurve als Erzeugnis einer unendlich fernen linearen Punktreihe und einer Punktreihe 3. Ordnung betrachtet werden kann. Da jedem Punkte der unendlich fernen Geraden der Ebene β fünf Punkte der in dieser Ebene sich befindenden Kurve 3. Ordnung zugeordnet sind, und jedem Punkte dieser Kurve nur ein Punkt der unendlich fernen Geraden, sind diese zwei Punktreihen 1 — 5 deutig zugeordnet. Das Erzeugnis zweier derartigen Punktreihen in einer Ebene ist, wie bekannt, eine Kurve $(1 \cdot 5 + 3 \cdot 1) = 8$. Klasse. Man sieht also, dass folgender Satz gilt:

Der Normalenkomplex der Inzidenzflächen eines Polarraumbüschels, bzw. der Flächen eines Flächenbüschels 2. *Grades, ist* 8. *Grades.*

Alle einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des Normalenkomplexes (NK) bilden also eine Strahlenkegel 8. Grades.

Man sah in unseren bisherigen Betrachtungen, dass die Ebenen einer Geraden p die Inzidenzflächen des Büschels Π_n in den Punkten einer Raumkurve 5. Ordnung berühren. Die diesen auf dieser Raumkurve sich befindenden Fusspunkten zugeordneten Strahlen des Normalenkomplexes bilden, wie wir sahen, ein Konoid 8. Grades. Wenn sich die Gerade p unendlich fern befindet, zerfällt dieses Konoid in einen Zylinder 5. Grades und, offensichtlich, in noch einen Teil 3. Grades, so dass der Grad 8 erhalten bleibt. Die den Scheitel dieses Zylinders enthaltenden Strahlen unseres Normalenkomplexes müssten, auf Grund des oben Ausgeführten, einen Zylinder 8. Grades bilden. Sie bilden jedoch wie bekannt, einen Zylinder 5. Grades. Wo bleibt also der Restteil vom Grad 3 ?

Die unendlich ferne Ebene des Raumes schneidet die einer unendlich fernen Geraden p_n auf die beschriebene Weise zugeordnete Raumkurve 5. Ordnung in fünf Punkten, von denen zwei auf dieser Geraden liegen, da dieselbe zwei Flächen des Büschels Π_n berührt. In den drei anderen berühren drei Flächen dieses Büschels die unendlich ferne Ebene. Da in diesen drei unendlich fernen Berührungspunkten der unendlich fernen Berührungsebene die Tangenten und die Normalen der betreffenden Fläche dasselbe Strahlenbüschel bilden, zerfällt also das Konoid 8. Grades im Fall der unendlich fernen Geraden p_n in den erwähnten Zylinder 5. Grades und die drei beschriebenen Strahlenbüschel ersten Grades in der unendlich fernen Ebene. In diesen Zylinder 5. Grades und diese drei unendlich fernen Strahlenbüschel zerfällt auch der Kegel (Zylinder) 8. Grades der Strahlen des Komplexes (NK), die den Scheitel des Zylinders 5. Grades enthalten.

5. *Die Grundkurve und die Hauptpunkte des Polarraumbüschels in dessen Normalenkomplex.* Es wurde schon erwähnt, dass die Ebenen einer Geraden p die Inzidenzflächen eines Polarraumbüschels längs einer Raumkurve 5. Ordnung berühren. Diese Raumkurve enthält die vier Hauptpunkte des Polarraumbüschels und schneidet dessen Grundkurve c^4 4. Ordnung I. Art in acht assoziierten Punkten ([2], S. 67). Dies gilt selbstverständlich auch dann, wenn die Gerade p unendlich fern liegt. Man weiss, dass die Hauptpunkte eines Polarraumbüschels die Scheitel der vier in dessen Inzidenzflächenbüschel 2. Grades sich befindenden Strahlenkegel 2. Grades sind. Da jede Ebene des Scheitels eines Strahlenkegels 2. Grades diesen Kegel in zwei reellen oder konjugiert imaginären Erzeugenden schneidet, können alle derartigen Ebenen als Berührungsebenen dieser Fläche betrachtet werden, u. zw. im Scheitel als gemeinsamen Berührungspunkt. Es folgt also, dass alle Strahlen der vier Hauptpunkte, die, wie bekannt, die Scheitel des gemeinsamen Polartetraeders aller Inzidenzflächen des Polarraumbüschels sind, auch Strahlen unseres den Polarraumbüschel zugeordneten Normalenkomplexes sind. Es folgt also weiter, dass der Kegel 8. Grades der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des Normalenkomplexes alle vier Hauptpunkte des Polarraumbüschels (Π_n) enthält. Dies gilt selbstverständlich auch für die unendlich fernen Raumpunkte.

Die Fusspunkte der mit einer Geraden parallelen Strahlen des Normalenkomplexes bilden, wie wir schon sahen, eine Raumkurve 5. Ordnung, während diese Strahlen die Erzeugenden eines Zylinders 5. Grades sind. Da eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art vom 8. Rang ist ([3], S. 755), wird die Tangentenfläche dieser Raumkurve durch jede Gerade p des Raumes in acht Punkten geschnitten, oder jede Gerade des Raumes schneidet acht Tangenten der Grundkurve c^4 unseres Polarraumbüschels. Alle acht die Gerade p und die erwähnten Tangenten enthaltenden Ebenen berühren in den Berührungspunkten dieser Tangenten auf der Grundkurve c^4 je eine Inzidenzfläche unseres Polarraumbüschels. Dies gilt selbstverständlich auch für die unendlich ferne Gerade p_n. Es folgt also, dass die einer unendlich fernen Geraden auf die vorher beschriebene Weise zugeordnete Raumkurve k^5 5. Ordnung die Grundkurve c^4 des Polarraumbüschels in 8 Punkten schneidet. Diese acht Schnittpunkte bilden eine assoziierte Gruppe, die unter dem Namen Hessesche assoziierte Punkte bekannt ist.

6. *Die Fusspunkte der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des Normalenkomplexes (NK).* Da jeder Raumpunkt, ausser den Punkten der Grundkurve c^4, nur eine Inzidenzfläche des Polarraumbüschels enthält, so folgt, dass jeder Raumpunkt der Fusspunkt nur eines Strahles des Normalenkomplexes ist. Die Fusspunkte aller anderen diesen Raumpunkt enthaltenden und einen Kegel 8. Grades bildenden Strahlen des Normalenkomplexes bilden auf diesem Kegel eine stetige eindimensionale Punktmenge, also eine Raumkurve, die wir mit l bezeichnen werden, und deren Ordnung wir jetzt bestimmen werden. Jedem Punkte des Raumes ist eine solche Raumkurve zugeordnet. Es ist bekannt, dass die Tangenten der Grundkurve c^4 unseres Polarraumbüschels die bekannte Chaslessche Regelfläche 8. Grades bilden. Die Normalebenen auf die Tangenten dieser Grunkurve c^4 in deren Berührungspunkten hüllen die bekannte Polarfläche dieser Grundkurve ein. Die Tangenten der Grundkurve c^4 berühren in ihren Berührungspunkten alle Inzidenzflächen unseres Polarraumbüschels (Π_n). Die Berührungsebenen dieser Flächen in jedem Punkte der Raumkurve c^4 bilden also ein Ebenenbüschel, dessen Achse die Tangente in diesem Punkte ist. Auf Grund dessen folgt ferner, dass jede in einer Normalenebene der Raumkurve c^4 sich befindende Unisekante dieser Kurve auch Normale einer Inzidenzfläche des Büschels Π_n dieser Grundkurve ist. Ein beliebig angenommener Punkt P im Raum enthält also so viele der Normalen der Inzidenzflächen, die ihren Fusspunkt auf der Grundkurve c^4 haben, als es diesen Punkt enthaltende Normalen dieser Grundkurve gibt. Solche Fusspunkte wird also die diesem Punkt P zugeordnete Raumkurve l enthalten. In diesen Fusspunkten schneidet selbstverständlich die Raumkurve l des Punktes P alle Flächen des Inzidenzflächenbüschels Π_n unseres Polarraumbüschels (Π_n). Da die Kongruenz der Normalen einer Fläche 2. Grades 6. Ordnung und 2. Klasse ist, enthält der Punkt P je sechs der Normalen jeder Fläche des Inzidenzflächenbüschels Π_n. Es sei x die Zahl der vorher erwähnten Fusspunkte auf der Grundkurve c^4 der einen Raumpunkt P enthaltenden Strahlen. Die Raumkurve l des Punktes P schneidet also jede solche Fläche des Inzidenzflächenbüschels Π_n der Grundkurve c^4, die keinen der sechs Fusspunkte ihrer den Punkt P enthaltenden Normalen auf der Grundkurve c^4 haben, in $x + 6$ Punkten. Da ferner jede Fläche des Inzidenzflächenbüschels Π_n vom 2. Grade ist, muss die Raumkurve l jedes Raumpunktes P die Ordnung $(x/2 + 3)$ haben. Es ist nun die Zahl x gesucht.

Die Tangentenfläche der Grunkurve c^4 unseres Polarraumbüschels schneidet die unendlich ferne Ebene in einer Kurve s 8. Ordnung. Die bezüglich des absoluten Kegelschnittes in dieser Ebene dieser Schnittkurve polar zugeordnete Kurve ist eine Kurve r 8. Klasse. Jeder Tangente t der Kurve r ist also nicht nur ein Punkt T der Kurve s ein-eindeutig zugeordnet, sondern auch ein Punkt U der Grundkurve c^4, der ihr Berührungspunkt mit der den unendlich fernen Punkt T enthaltenden Tangente ist. Jeder Tangente der unendlich fernen Kurve s ist also ein-eindeutig ein Punkt der Grundkurve c^4 zugeordnet, und die durch diese Punkte und durch die ihnen zugeordneten Tangenten der Kurve s bestimmten Ebenen sind Normalebenen der Grundkurve c^4 in diesen Punkten.

Alle den Raumpunkt P enthaltenden Unisekanten der Raumkurve c^4 bilden einen Strahlenkegel (Pc^4) 4. Ordnung, der die unendlich ferne Ebene in einer Kurve v 4. Ordnung schneidet. Jedem Punkte der Kurve v ordne man jenen Punkt der Grundkurve c^4 zu, der mit diesem Punkt auf derselben Erzeugenden des Kegels (Pc^4) liegt. Auf diese Weise haben wir also jedem Punkte der Kurve v, die 4. Ordnung ist, ein-eindeutig eine Tangente der Kurve r, die 8. Klasse ist, zugeordnet. Durch diejenigen Tangenten der Kurve r, die die ihnen zugeordneten Punkte auf der Kurve v enthalten, werden diejenigen Normalebenen der Grundkurve c^4 bestimmt, die den Punkt P enthalten. Wie schon erwähnt, sind die Verbindungsgeraden des Punktes P und der Schnittpunkte der Grundkurve c^4 mit ihren den Punkt P enthaltenden Normalebenen Normalen je einer Fläche des Inzidenzflächenbüschels Π_n unseres Polarraumbüschels. Da wir in der unendlich fernen Ebene auf der Kurve v 4. Ordnung eine rationale Punktreihe, und auf der Kurve r 8. Klasse eine rationale Geradenreihe haben, die ein-eindeutig zugeordnet sind, müssen $8 + 4 = 12$ Punkte der Kurve v auf die ihnen zugeordneten Tangenten der Kurve r fallen ([1], S. 48). Es folgt also, dass der Punkt P zwölf Normalen der Grundkurve c^4 enthält, die auch Normalen gewisser Inzidenzflächen des Büschels Π_n sind, mit Fusspunkten auf dieser Grundkurve. Es gilt also, dass $x = 12$ ist, oder dass die dem Punkt P zugeordnete Raumkurve l die Grundkurve c^4 in 12 Punkten schneidet, oder dass die Raumkurve l von der $(12/2 + 3) = 9$. Ordnung ist. Es gilt daher folgender Satz:

Die Fusspunkte jener Strahlen des Normalenkomplexes (NK) des Inzidenzflächenbüschels Π_n eines Polarraumbüschels (Π_n), die einen Raumpunkt enthalten und einen Strahlenkegel 8. Grades bilden, liegen auf einer Raumkurve 9. Ordnung.

In unseren vorher durchgeführten Betrachtungen sahen wir, dass alle Strahlen der vier Hauptpunkte unseres Polarraumbüschels Strahlen des Normalenkomplexes dieses Büschels sind, deren Fusspunkte sich in diesen Hauptpunkten befinden. Es folgt hieraus, dass die allen Raumpunkten zugeordneten Raumkurven l 9. Ordnung diese vier Hauptpunkte enthalten.

In diesen Betrachtungen sahen wir auch, dass jeder nicht unendlich fern liegende Raumpunkt P 12 Normalen der Grundkurve c^4 enthält. Wir sahen ferner, dass jeder unendlich ferne Punkt P_n nur 8 derartige Normalen enthält. Wo bleiben nun die übrigen 4 Normalen?

In den vier unendlich fernen Punkten O, Q, R, S der Grundkurve c^4 des Büschels Π_n bilden die Berührungsebenen der Flächen dieses Büschels vier Ebenenbüschel, die die unendlich ferne Ebene in vier Strahlenbüscheln schneiden. Die in diesen vier unendlich fernen Punkten der Grundkurve c^4 auf die Flächen des Büschels Π_n geloteten Normalen bilden in der unendlich fernen Ebene vier neue kollokale Strahlenbüschel mit denselben Scheitelpunkten. Durch jeden Strahl jedes dieser vier unendlich fernen ersten Strahlenbüschel ist die Berührungsebene einer Fläche des Büschels bestimmt, deren Berührungspunkt sich im Scheitel dieses Strahlenbüschels befindet. Der unendlich ferne Punkt P_n enthält je einen Strahl jedes dieser vier späteren Strahlenbüschel. Also, der Punkt P_n enthält ausser den 8 beschriebenen Normalen der Grundkurve c^4 noch weitere vier unendlich ferne Normalen dieser Grundkurve. Die zwei kollokalen Strahlenbüschel der unendlich fernen Ebene in jedem der vier Schnittpunkte O, Q, R, S auf der Raumkurve c^4 bilden ein zirkuläres involutorisches Strahlenbüschel, da die in diesen kollokalen Büscheln zugeordneten Strahlen bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugiert sind.

Auf der einem endlichen Raumpunkt P zugeordneten Raumkurve l 9. Ordnung befindet sich dieser Punkt als gewöhnlicher Punkt. Die den Punkt P enthaltenden Bisekanten dieser Raumkurve l bilden also einen Strahlenkegel 8. Grades, womit bewiesen ist, dass der Normalenkomplex (NK) 8. Ordnung ist. Weiter oben wurde der Grad des Normalenkomplexes (NK) mittels seiner Klasse bestimmt, während hier dieser Grad durch die Ordnung dieses Normalenkomplexes festgestellt ist.

Die einen endlichen Raumpunkt P enthaltenden Strahlen des (NK) Komplexes bilden also einen Kegel 8. Grades, und die Fusspunkte seiner Erzeugenden eine Raumkurve 9. Ordnung. Die einen unendlich fernen Raumpunkt P_n enthaltenden Strahlen des (NK) Komplexes bilden, wie bekannt, einen Kegel (Zylinder) 5. Grades, wobei die Fusspunkte von dessen Erzeugenden auf einer Raumkurve 5. Ordnung liegen. Wir sahen vorher, dass im Fall des unendlich fernen Punktes P_n dessen Strahlenkegel (Zylinder) 8. Grades in den bekannten Zylinder 5. Grades und die drei unendlich fernen Strahlenbüschel zerfällt. Wo befindet sich nun der Kurventeil 4. Ordnung der dem Punkte P_n zugeordneten Raumkurve l 9. Ordnung? Wie bekannt, wird die Raumkurve 5. Ordnung des Punktes P_n durch diejenigen Berührungspunkte der Flächen des Büschels Π_n gebildet, in denen diese Flächen die Ebenen derjenigen unendlich fernen Geraden p_n berühren, die Polare des Punktes P_n bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist.

Die unendlich ferne Ebene schneidet, wie schon vorher erwähnt wurde, diese Raumkurve 5. Ordnung in den drei bekannten Berührungspunkten A, B, C dieser Ebene mit drei Flächen des Büschels Π_n, und in den zwei Berührungspunkten der unendlich fernen Geraden p_n mit zwei Flächen desselben Büschels. Diese zwei Berührungspunkte M, N auf der Geraden p_n sind Doppelpunkte der durch die Schnittpunktepaare dieser Geraden p_n und der Flächen des Büschels Π_n gebildeten unendlich fernen involutorischen Punktreihe. Die Berührungsebenen dieser zwei Flächen, die die Gerade p_n enthalten, schneiden die unendlich ferne Ebene in dieser Geraden p_n. Die unendlich fernen Flächennormalen in den Fusspunkten M, N sind also Verbindungsgeraden dieser Punkte und des Punktes P_n, da dieser Punkt P_n Pol der Polaren p_n bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist.

Wir sahen auch, dass die Verbindungsgeraden des Punktes P_n und der unendlich fernen Punkte O, Q, R, S der Grundkurve c^4, Normalen gewisser vier Flächen des Büschels Π_n in diesen vier Fusspunkten sind. Da sich diese vier Punkte O, Q, R, S nicht auf der dem Punkt P_n zugeordneten Fusspunktkurve 5. Ordnung befinden, müssen diese vier Punkte auf dem erwähnten zerfallenen Kurventeil 4. Ordnung liegen. Wir sahen auch vorher, dass jeder Raumpunkt P auf der ihm zugeordneten Raumkurve l 9. Ordnung liegt. Also muss der Punkt P_n, der nicht auf der ihm zugeordneten Raumkurve 5. Ordnung liegt, auch auf dem zerfallenen Kurventeil 4. Ordnung liegen. Da der Raumkurventeil 4. Ordnung fünf Punkte in der unendlich fernen Ebene hat, liegt dieser ganze Kurventeil in dieser Ebene. Da sich aber auf jeder Erzeugenden eines durch (NK) Komplexstrahlen gebildeten Kegels eines Punktes P nur ein Fusspunkt befindet, darf der beschriebene Kurventeil 4. Ordnung in der unendlich fernen Ebene mit den Verbindungsgeraden $P_n A$, $P_n B$, $P_n C$, $P_n M$ und $P_n N$ keinen gemeinsamen Punkt haben. Dies ist nur dann möglich, wenn dieser Kurventeil 4. Ordnung in vier Geraden $P_n O$, $P_n Q$, $P_n R$ und $P_n S$ zerfällt. Die dem unendlich fernem Punkt P_n zugeordnete Raumkurve l 9. Ordnung zerfällt also in die bekannte Raumkurve 5. Ordnung, und die vier den Punkt P_n enthaltenden unendlich fernen Unisekanten der Grundkurve c^4.

7. *Die Regelfläche der den auf einer Geraden liegenden Fusspunkten zugeordneten Strahlen eines Normalenkomplexes.* In jeder Ebene einer Geraden p hüllen die Strahlen eines Normalenkomplexes (NK), wie bekannt, eine Kurve 8. Klasse ein, und die Fusspunkte dieser Strahlen bilden eine Kurve 3. Ordnung. Jede solche Kurve 3. Ordnung in einer Ebene der Geraden p schneidet diese Gerade in drei Punkten, welche die Fusspunkte dreier in dieser Ebene liegenden Strahlen des Normalenkomplexes (NK) sind. In jeder Ebene der Geraden p befinden sich also drei Strahlen des Normalenkomplexes, deren Fusspunkte sich auf dieser Geraden befinden. Da jeder Punkt der Geraden p der Fusspunkt nur eines Strahles des Normalenkomplexes sein kann, muss die Gerade p eine einfache Gerade der gesuchten Regelfläche sein, die keine Erzeugende dieser Regelfläche ist. Da jede Ebene der Geraden p die gesuchte Regelfläche in vier einfachen Geraden schneidet, muss diese Regelfläche vom Grad 4 sein. Da ferner jede Ebene der einfachen Geraden p dieser Regelfläche 4. Grades drei ihrer Erzeugenden enthält, die sich in drei Punkten schneiden, ist es klar, dass diese Regelfläche eine kubische Doppelkurve als Leitlinie hat, also dass es sich hier um eine Regelfläche 4. Grades IV. Art handelt. Es gilt daher folgender Satz:

Diejenigen Strahlen des Normalenkomplexes eines Flächenbüschels 2. *Grades, deren Fusspunkte auf einer Geraden p liegen, bilden eine Regelfläche* 4. *Grades* IV. *Art, der die Gerade p als einfache Leitgerade angehört.*

Nimmt man die Gerade p als einen Strahl des Normalenkomplexes an, so werden die beschriebenen Kurven 3. Ordnung der Fusspunkte in allen Ebenen dieses Strahles p dessen Fusspunkt enthalten, also diesen Strahl p noch in zwei Punkten schneiden. In jeder Ebene dieses Strahles p befinden sich also nur noch zwei Strahlen des Normalenkomplexes, deren Fusspunkte der zweite und der dritte Kurvenschnittpunkt sind. Es ist also offensichtlich, dass es sich hier um eine Regelfläche 4. Grades handelt, für die der Strahl p eine Doppelgerade und eine einfache Torsalgerade ist. Da die Doppelraumkurve 3. Ordnung der vorher erwähnten Regelfläche 4. Grades hier in eine Gerade und in eine Doppelkurve 2. Grades zerfallen ist, handelt es sich um eine Regelfläche 4. Grades VI. Art. Es gilt daher auch folgender Satz:

Diejenigen Strahlen des Normalenkomplexes eines Flächenbüschels 2. *Grades, deren Fusspunkte auf einem Strahl p dieses Normalenkomplexes liegen, bilden eine Regelfläche* 4. *Grades* VI.

Art, zu der der Strahl p als Doppelgerade und einfache Torsalgerade gehört.

Der Fusspunkt des Strahles p ist der Kuspidalpunkt dieser Regelfläche 4. Grades.

8. *Die Strahlenkongruenz derjenigen Strahlen des Normalenkomplexes, deren Fusspunkte in einer Ebene liegen.* Wie bekannt, bilden die einen Punkt im Raum enthaltenden Strahlen des Normalenkomplexes einen Kegel 8. Grades, und die Fusspunkte dieser Strahlen bilden auf diesem Kegel eine Raumkurve 9. Ordnung. Jede Ebene des Raumes schneidet diese Raumkurve in 9 Punkten, die selbstverständlich in Paaren auch konjugiert imaginär sein können. Jeder Punkt des Raumes enthält also 9 Strahlen des Normalenkomplexes, deren Fusspunkte sich in einer Ebene befinden.

In jeder Ebene des Raumes hüllen, wie bekannt, die Strahlen des Normalenkomplexes eine Kurve 8. Klasse ein, deren Fusspunkte aber auf einer Kurve 3. Ordnung liegen. Da jede Ebene des Raumes diese Kurve 3. Ordnung in einer gewissen Ebene in drei Punkten schneidet, befinden sich in jeder Ebene des Raumes drei Strahlen des Normalenkomplexes, deren Fusspunkte in einer gewissen Ebene α liegen. Da die den in einer Ebene liegenden Fusspunkten zugeordneten Strahlen des Normalenkomplexes eine Strahlenkongruenz bilden, gilt für diese Strahlenkongruenz folgender Satz:

Diejenigen Strahlen des Normalenkomplexes eines Flächenbüschels 2. Grades, deren Fusspunkte in einer Ebene α liegen, bilden eine Strahlenkongruenz 9. Ordnung und 3. Klasse.

Enthält die Ebene α einen, zwei oder drei Hauptpunkte des Flächenbüschels 2. Grades, vermindert sich die Ordnung dieser Strahlenkongruenz auf 8, 7 bzw. 6, da jeder Strahl der Hauptpunkte auch Strahl unseres Normalenkomplexes ist.

Mathematisches Institut
der Universität Zagreb

LITERATUR:

[1] *E. Müller—J. L. Krames,* Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III, F. Deuticke, Wien, 1931,

[2] *V. Niče,* Geometrijsko mjesto dirališta pramena ravnina s pramenom površina drugoga reda, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **271** (84), (1941), 65—76,

[3] *G. A. Peschka,* Darstellende und projektive Geometrie, Bd. III, K. Gerold, Wien, 1884.

KOMPLEKS NORMALA PLOHA 2. STUPNJA JEDNOG PRAMENA TAKVIH PLOHA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Uvod. Normale plohe 2. stupnja čine, kao što je poznato, kongruenciju 6. reda, 2. razreda. Takve kongruencije svih ploha 2. stupnja u jednom pramenu čine neki kompleks. Svakom tačkom prostora prolazi jedna ploha 2. stupnja, dakle i normala te plohe u toj tački. Svakoj tački prostora pridružena je na taj način jedna zraka ovog kompleksa, kojoj je ta tačka nožišna. U ovoj ćemo radnji pronaći stupanj tog kompleksa i neke njegove osobine u vezi s nožištima njegovih zraka. Zadamo li pramenom Π_n ploha 2. stupnja pramen (Π_n) polarnih prostora, kojima su te plohe incidentne, bit će ovakvim pramenom (Π_n) određen i kompleks normala, kojeg označujemo s (NK).

1. *Geometrijsko mjesto nožišta zraka kompleksa* (NK) *usporednih s jednom ravninom.* Dirališta ravnina okomitih na zadanu ravninu α s plohama pramena Π_n ploha 2. stupnja, leže na općoj plohi 3. reda. Okomice na te plohe u svim tim diralištima usporedne su s ravninom α, budući da sve te dirne ravnine prolaze istom neizmjerno dalekom tačkom. Ova je ploha proizvod pramena Π_n ploha 2. stupnja i njemu projektivno pridruženog pramena polarnih ravnina, te neizmjerno daleke tačke kao pola s obzirom na sve plohe pramena Π_n. Vidimo, dakle, da nožišta onih zraka kompleksa (NK), koje su usporedne s jednom ravninom, leže na općoj plohi 3. reda.

2. *Geometrijsko mjesto nožišta zraka kompleksa* (NK)*, koje leže u jednoj ravnini.* Iz **1.** direktno proizlazi, da nožišta zraka kompleksa (NK), koje leže u jednoj ravnini, leže na krivulji 3. reda.

3. *Geometrijsko mjesto nožišta zraka kompleksa* (NK)*, koje sijeku pravac* p. Na temelju rezultat dobivenih u **1.** i **2.**, lako se vidi da svaka ravnina pravca p siječe traženo geometrijsko mjesto u krivulji 3. reda. Kako su tačke pravca p nožišta zraka kompleksa (NK), koje također sijeku taj pravac, bit će i taj pravac na tom geometrijskom mjestu, odnosno na traženoj plohi. Vidimo, dakle, da je traženo geometrijsko mjesto opća ploha 4. reda, na kojoj leži i pravac p kao jednostruki pravac te plohe.

Ako je pravac p neizmjerno dalek, raspada se ta ploha u neizmjerno daleku ravninu i jednu opću plohu 3. reda.

Ako je pravac p zraka kompleksa (NK), bit će njeno nožište dvostruka tačka te plohe.

4. *Stupanj kompleksa* (NK). Pramen usporednih ravnina dira plohe pramena Π_n ploha 2. stupnja u tačkama jedne prostorne krivulje 5. reda. Zrake kompleksa (NK), koje prolaze neizmjerno dalekom tačkom, a okomite su na ravnine spomenutog pramena, čine prema tome valjak 5. stupnja. Svakom neizmjerno dalekom tačkom neke ravnine prolazi, dakle, 5 zraka kompleksa (NK), kojima su nožišta na krivulji 3. reda u toj ravnini. Sve ove zrake omataju prema tome krivulju, koja nastaje kao proizvod jednog linearnog neizmjerno dalekog niza i jednog niza 3. reda, koji su (1,5)-značno pridruženi. Proizvod tih dvaju nizova je krivulja 8. razreda, pa mora i kompleks (NK) biti 8. razreda, odnosno 8. stupnja.

5. *Temeljna krivulja i glavne tačke pramena Π_n ploha 2. stupnja i njegov* (NK) *kompleks.* Ravnina, koja prolazi jednom glavnom tačkom pramena Π_n ploha 2. stupnja, a okomita je na jednu zraku te tačke, siječe stožac 2. stupnja, koji pripada pramenu Π_n, a ima vrh u toj glavnoj tački, u dvije njegove realne ili konjugirano imaginarne izvodnice. Svaka se zraka tog vrha (glavne tačke) može smatrati zrakom kompleksa (NK) tog pramena Π_n. Dakle, sve zrake četiriju glavnih tačaka jednog pramena ploha 2. stupnja su zrake njegova (NK) kompleksa. Prostorna krivulja 5. reda spomenuta u 4, siječe temeljnu prostornu krivulju u 8 asociranih tačaka.

6. *Nožišta zraka kompleksa* (NK) *koje prolaze jednom tačkom P prostora.* Tačkom prostora moguće je postaviti 12 normala na prostornu krivulju 4. reda I vrste. Osim toga, moguće je tačkom prostora postaviti 6 normala na neku plohu 2. stupnja. Odavde izlazi, da geometrijsko mjesto, odnosno krivulja nožišta zraka kompleksa (NK), koje prolaze jednom tačkom, probada svaku plohu 2. stupnja pramena ploha Π_n tog kompleksa u 18 tačaka. Prema tome, nožišta zraka kompleksa (NK), koje prolaze tačkom P prostora, čine prostornu krivulju 9. reda.

Ako je tačka P neizmjerno daleka, raspada se ova prostorna krivulja 9. reda u prostornu krivulju 5. reda i četiri neizmjerno daleka pravca.

7. *Pravčasta ploha zraka kompleksa* (NK), *kojima su nožišta na jednom pravcu p.* Nožišta zraka kompleksa (NK) u svakoj ravnini nekog pravca p čine krivulju 3. reda. U svakoj ravnini tog pravca postoje, dakle, tri zrake kojima su nožišta na tom pravcu. Sve takve trojke pravaca u ravninama pravca p čine pravčastu plohu, na kojoj se nalazi i taj pravac p. Očito je, dakle, da je ta pravčasta ploha 4. stupnja i to IV vrste, jer ima dvostruku prostornu krivulju 3. reda, koju svaka ravnina pravca p siječe u tri sjecišta triju izvodnica u toj ravnini.

Ako je pravac p zraka kompleksa (NK), raspada se dvostruka prostorna krivulja 3. reda u dvostruku prostornu krivulju 2. stupnja i pravac p kao dvostruki torzalni pravac te plohe, s kuspidalnom tačkom u nožištu zrake p. Radi se, dakle, o pravčastoj plohi 4. stupnja VI vrste.

8. *Kongruencija zraka kompleksa* (*NK*), *kojima su nožišta u jednoj ravnini.* Iz činjenice da nožišta zraka kompleksa (*NK*), koje prolaze jednom tačkom prostora, čine prostornu krivulju 9. reda, a nožišta takvih zraka u jednoj ravnini čine krivulju 3. reda izlazi, da je kongruencija zraka kompleksa (*NK*) s nožištima u jednoj ravnini 9. reda i 3. razreda.

(Primljeno 22. X 1963.)