Serija II T. 17. Zagreb 1962. Broj 3—4 POSEBNI OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO - FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO - PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Vilko Niče

Über neue Eigenschaften der Büschel und der Bündel polarer Räume

O nekim novim osobinama pramena i svežnja polarnih prostora

Zagreb 1962

Štamparski zavod „Ognjen Prica" Zagreb, Savska cesta 31, 1963

GLASNIK MAT. - FIZ I ASTR.
Tom 17. — No. 3—4 — 1962.

ÜBER NEUE EIGENSCHAFTEN DER BÜSCHEL UND DER BÜNDEL POLARER RÄUME

Vilko Niče, Zagreb

Einführung. Durch zwei Flächen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ 2. Grades ist, wie bekannt, ein Flächenbüschel [P] 2. Grades bestimmt. Da jede Fläche dieses Büschels als Inzidenzfläche eines polaren Raumes betrachtet werden kann, ist durch die Flächen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ auch ein Büschel polarer Räume bestimmt. Alle einem Raumpunkt in den polaren Räumen eines Büschels zugeordneten Ebenen bilden, wie bekannt, einen Ebenenbüschel, und die allen Raumpunkten zugeordneten Achsen derartiger Ebenenbüschel bilden einen quadratischen tetraedralen Strahlenkomplex. Das Haupttetraeder dieses Komplexes ist das gemeinsame Polartetraeder des Büschels polarer Räume. Die Eckpunkte dieses Tetraeders seien mit A, B, C, D bezeichnet und die diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seitenebenen mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Jedem Raumpunkt ist ein Strahl dieses Komplexes, und jedem Strahle dieses Komplexes ist ein Raumpunkt zugeordnet. Diejenigen Strahlen dieses Komplexes, die die ihnen zugeordneten Punkte enthalten, hüllen, wie bekannt, eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art ein, deren Berührungspunkte die ihnen zugeordneten Punkte sind. Diese Raumkurve ist bekanntlich die Grundkurve des Flächenbüschels [P] der Inzidenzflächen 2. Grades der polaren Räume in unserem Büschel.

Man betrachte nun die durch die Inzidenzflächen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, oder die durch irgend zwei andere Flächen des Büschels [P] bestimmten polaren Räume. Durch jeden polaren Raum wird auf jeder Geraden des Raumes eine involutorische Punktreihe der Paare konjugierer Punkte bestimmt, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte dieser Geraden und der Inzidenzfläche dieses polaren Raumes sind. Die polaren Räume der Inzidenzflächen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ bestimmen also auf jeder Geraden des Raumes zwei derartige kollokale involutorische Punktreihen. Zwei kollokale involutorische Punktreihen haben bekanntlich ein Paar zugeordneter Punkte gemeinsam, die auch konjugiert imaginär sein können, aber nicht müssen, im Falle wenn beide diese involutorischen Punktreihen hyperbolisch sind. Alle Geraden des Raumes, auf denen ein Punkt des erwähnten gemeinsamen Punktepaares sich unendlich fern befindet, also die Geraden des Raumes deren erwähnten kollokale involutorische Punktreihen einen gemeinsamen Zentralpunkt haben, bilden einen Strahlenkomplex 3. Grades. Dieser Strahlenkomplex ist durch J. Majcen entdeckt und betrachtet worden, und deswegen bezeichnen wir ihn als Majcenschen kubischen Strahlenkomplex [1]. Ausser der Tatsache dass er vom dritten Grade ist, fand und betrachtet Majcen eine ganze Reihe seiner Eigenschaften, und in einer vor nicht langer Zeit veröffentlichen Arbeit [2] wurden auch weitere Eigenschaften veröffentlicht. Jeder Strahl des Majcenschen Komplexes hat einen und nur einen Zentralpunkt. Dies gilt für alle Raumpunkte mit Ausnahme der Eckpunkte A, B, C, D des gemeinsamen Polartetraeders der polaren Räume der Inzidenzflächen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$. Diese Eckpunkte sind die vorher beschriebenen Zentralpunkte aller ihrer mit der gegenüberliegenden Seitenebene parallel liegenden Strahlen. Die Strahlen dieser vier Strahlenbüschel gehören also dem Majcenschen kubischen Komplex an.

Wählt man in dem Majcenschen kubischen Strahlenkomplex eine ganz beliebige Strahlenkongruenz, also eine stetige Menge von ∞^2 Strahlen dieses Komplexes aus, so müssen die Zentralpunkte der Strahlen dieser Kongruenz eine stetige quadratische Punktmenge, also eine Fläche bilden. Die Zentralpunkte der Strahlen des Majcenschen Komplexes, die z. B. eine Gerade des Raumes kreuzen, bilden eine Fläche 3. Ordnung, in der diese Gerade eine einfache Gerade ist [2]. Ist diese Gerade ein Strahl des Majcenschen Komplexes, so bekommt diese Fläche einen Doppelpunkt im Zentralpunkt dieses Strahles.

Unter den in der Arbeit [2] veröffentlichten neuen Eigenschaften des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes befinden sich auch folgende: a) Durch irgendwelche zwei polare Räume eines Büschels polarer Räume ist immer derselbe Majcensche kubische Strahlenkomplex bestimmt. b) Der Majcensche kubische Strahlenkomplex kann auch als die Menge derartiger Geraden des Raumes betrachtet werden, die die Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades unendlich fern berühren. Die Flächen dieses Büschels sind Inzidenzflächen des Büschels polarer Räume zu dem dieser kubische Strahlenkomplex gehört.

Man sieht also, dass durch jeden Flächenbüschel 2. Grades, bzw. durch den durch diesen Flächenbüschel bestimmten Büschel polarer Räume, ein Reyescher quadratischer tetraedraler Strahlenkomplex, und ein Majcenscher kubischer Strahlenkomplex bestimmt sind. Diese zwei Strahlenkomplexe haben offensichtlich eine Strahlenkongruenz 6. Grades gemein, die auch durch jeden Büschel polarer Räume bestimmt ist. Den einem Büschel $[P]$ polarer Räume auf die vorher beschriebene Weise angehörenden tetraedralen Komplex bezeichne man mit R_p, und den diesem Büschel angehörenden Majcenschen Komplex mit M_p. Die gemeinsame Kongruenz dieser zwei Komplexe heisse (K). Die Majcenschen Zentralpunkte der Strahlen der Kongruenz (K) bilden ebenfalls eine Fläche, die in dieser Arbeit betrachtet wird, und die wir mit Θ bezeichnen werden. Jedem Büschel polarer Räume wird also auch eine derartige Fläche zugeordnet.

Durch jeden Büschel polarer Räume $[P]$ ist jedem Punkte des Raumes ein Strahl des bekannten tetraedralen Komplexes R_p zugeordnet, und die Strahlen dieses Komplexes sind, wie bekannt, den Raumpunkten ein-eindeutig zugeordnet ([3], S. 29—30). Die den Strahlen einer Kongruenz dieses tetraedralen Strahlenkomplexes R_p zugeordneten Raumpunkte bilden auch hier eine Fläche. Die den Strahlen der Kongruenz (K), als den Strahlen des Komplexes R_p, zugeordneten Raumpunkte bilden eine Fläche die wir mit Γ bezeichnen werden. Ebenso wie die Fläche Θ ist auch die Fläche Γ durch einen Büschel polarer Räume bestimmt und demselben zugeordnet. Auch die Fläche Γ wird in dieser Arbeit betrachtet, wie auch der geometrische Ort der gemeinsamen Punkte der Flächen Θ und Γ.

Den Grad des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes hat Majcen durch die Klasse dieses Komplexes bewiesen. In dieser Arbeit werden wir den Grad dieses Komplexes durch Feststellung seiner Ordnung bestimmen, da diese Art der Feststellung seiner Ordnung uns in unseren weiteren Betrachtungen der Majcenschen kubischen Strahlenkomplexe in den polaren Räumen eines Bündels nützlich sein wird.

1. Ordnung der Fläche Θ. In der Arbeit »O jednoj posebnoj vrsti kubičnog kompleksa« (Über eine besondere Art der kubischen Strahlenkomplexe) bewies Majcen, dass die Zentralpunkte der einen Punkt enthaltenden Strahlen des Majcenschen Komplexes eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art bilden. Auf Grund der Majcenschen Betrachtungen in dieser Arbeit folgt auch, dass die Zentralpunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen dieses Komplexes eine Kurve 2. Grades bilden. Mittels dieser zwei Eigenschaften ist leicht zu beweisen, dass diejenigen Strahlen des Majcenschen Komplexes, deren Zentralpunkte in einer Ebene liegen, eine Strahlenkongruenz 4. Ordnung 2. Klasse bilden.

Die gemeinsame Strahlenkongruenz (K) der Strahlenkomplexe R_p und M_p des Büschels $[P]$ polarer Räume ist, wie erwähnt, 6. Ordnung und 6. Klasse. Alle diejenigen Strahlen des M_p-Komplexes eines Büschels $[P]$ polarer Räume, die ihre Zentralpunkte in einer Ebene α haben und auch Strahlen des diesem Büschel $[P]$ zugeordneten Strahlenkomplexes R_p sind, bilden eine Regelfläche, die durch die gemeinsamen Strahlen des Komplexes R_p und der erwähnten Strahlenkongruenz der Ebene α 4. Ordnung und 2. Klasse gebildet wird, also $2(4+2)=12$. Grades ist. Diese Regelfläche befindet sich offensichtlich auch in der erwähnten Strahlenkongruenz (K) 6. Grades. Diese Regelfläche 12. Grades wird durch die Ebene α in einer ebenen Kurve 12. Ordnung geschnitten. Da sich in der Ebene α sechs Strahlen der Kongruenz (K) befinden, zerfällt diese Schnittkurve 12. Ordnung in diese sechs Geraden und eine Kurve 6. Ordnung, auf der sich selbstverständlich auch die Zentralpunkte der in dieser Ebene α liegenden Strahlen befinden. Diese Kurve 6. Ordnung in der Ebene α ist durch die Zentralpunkte derjenigen Strahlen der Kongruenz (K) gebildet, die die vorher erwähnte Regelfläche 12. Grades bilden. Man sieht also, dass diese Kurve 6. Ordnung die Schnittkurve der Ebene α und der oben beschriebenen Fläche Θ ist. Die Fläche Θ ist also. 6. Ordnung.

2. **Einige Eigenschaften der Fläche** Θ. Alle Bisekanten und Berührungsgeraden der räumlichen Grundkurve 4. Ordnung I. Art eines Büschels polarer Räume sind bekanntlich Strahlen des diesem Büschel zugeordneten Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes. Die Zentralpunkte der Berührungsgeraden dieser Raumkurve sind deren Berührungspunkte auf dieser Kurve. Da die Berührungsgeraden der Grundkurve eines Büschels polarer Räume auch Strahlen des diesem Büschel zugeordneten tetraedralen Strahlenkomplexes sind, schen wir, dass die Regelfläche 8. Grades der Berührungsgeraden dieser Grundraumkurve 4. Ordnung I. Art sich in der beschriebenen Strahlenkongruenz (K) dieses Büschels befindet, und dass die dieser Kongruenz zugeordnete Fläche Θ diese Grundkurve enthält.

Man bezeichne mit A, B, C, D die Eckpunkte des gemeinsamen polaren Tetraeders des Büschels $[P]$ polarer Räume, und die Grundkurve 4. Ordnung I. Art dieses Büschels soll auch weiterhin mit k bezeichnet werden. Da das Tetraeder $A\,B\,C\,D$ auch Haupttetraeder des dem Büschel $[P]$ zugeordneten tetraedralen Strahlenkomplexes R_p ist, sind alle Geraden der Eckpunkte $A, B, C, D,$ so wie auch alle Geraden der Seitenebenen dieses Tetraeders Strahlen des tetraedralen Komplexes R_p. Hieraus folgt weiter, dass die bekannten Kegel 2. Grades der Bisekanten der Grundkurve k mit den Scheiteln A, B, C, D sich in der Kongruenz (K) des Büschels $[P]$ befinden. Hälftet man auf den Erzeugenden dieser Kegel 2. Grades den Abstand ihrer Schnittpunkte auf der Grundkurve k, so werden alle vier geometrischen Örter auf den vier Kegeln dieser Hälftepunkte sich auf der dem Büschel $[P]$ zugeordneten Fläche Θ befinden. Jeder dieser vier geometrischen Örter ist wieder eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art, da sie durch die quadratische Transformation der bekannten allgemeinen Inversion, die mittels der Scheitel A, B, C, D als Pole und einer Inzidenzfläche des Büschels $[P]$ durchgeführt wird, aus den unendlich fernen Kurven 2. Grades dieser Kegel entstanden ist. Die der unendlich fernen Ebene in dieser Transformation zugeordnete Fläche 2. Grades schneidet nämlich den beschriebenen Kegel 2. Grades ihres Pols in einer Raumkurve 4. Ordnung I. Art, auf der sich die erwähnten Hälftepunkte auf den Erzeugenden dieses Kegels befinden. Alle vier derartigen Grundkurven 4. Ordnung I. Art k_a, k_b, k_c, k_d befinden sich auf der Fläche Θ des Büschels $[P]$.

Diejenigen Geraden der Eckpunkte $A, B, C, D,$ die mit den gegenüberliegenden Seitenebenen des Tetraeders $A\,B\,C\,D$ parallel liegen, sind auch Strahlen des dem Büschel $[P]$ angehörenden Majcenschen kubischen Komplexes M_p, deren Zentralpunkte diese Eckpunkte sind. Diese vier Strahlenbüschel gehören also der dem Büschel $[P]$ gehörenden Kongruenz (K) an. Auf Grund der vorher erwähnten Eigenschaft des dem Büschel $[P]$ angehörenden tetraedralen Strahlenkomplexes R_p folgt also, dass auch die Punkte A, B, C, D sich auf der Fläche Θ befinden.

Es wurde oben bewiesen, dass jede Ebene des Raumes die Fläche Θ in einer Kurve 6. Ordnung schneidet, und diese Kurve die Zentralpunkte der sechs in dieser Ebene sich befindenden Strahlen der Kongruenz (K) enthält. Jede Ebene des Eckpunktes A schneidet die der gegenüberliegenden Seitenebene parallel liegende Ebene dieses Punktes in einem Strahle der Kongruenz (K), für den der Eckpunkt A Zentralpunkt ist. Alle in den Ebenen des Eckpunktes A liegenden Schnittkurven 6. Ordnung der Fläche Θ enthalten also diesen Eckpunkt. Es folgt hieraus weiter, dass der Eckpunkt A und demgemäss auch die Eckunkte B, C und D, mehrfache singuläre Punkte der Fläche Θ sind.

3. **Die Ordnung und einige Eigenschaften der Fläche Γ.** Man weiss, dass im Büschel $[P]$ polarer Räume jedem Punkte des Raumes ein Strahl des diesem Büschel angehörenden tetraedralen Strahlenkomplexes R_p zugeordnet ist. Den Punkten einer Geraden s sind auf diese Weise im Komplex R_p Strahlen zugeordnet, die eine Schar von Erzeugenden einer Regelfläche 2. Grades bilden. Ist die Gerade s ein Strahl des Komplexes R_p, dann sind den Punkten dieses Strahles s die Erzeugenden eines Kegels 2. Grades zugeordnet ([3], S. 46). Dem Scheitel dieses Kegels ist im Komplex R_p der Strahl s zugeordnet.

Man wähle im Raum eine beliebige Gerade s, die kein Strahl des zum Büschel $[P]$ gehörenden Komplexes R_p ist. Die den Punkten dieser Geraden zugeordneten Strahlen im Komplex R_p bilden, wie bekannt, eine Erzeugendenschar einer Regelfläche 2. Grades. Unter den Eigenschaften eines Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes befindet sich auch die folgende: In einer Schar von Erzeugenden einer Regelfläche 2. Grades befinden sich höchtens sechs Strahlen eines Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes.

In der den Punkten der Geraden s zugeordneten Erzeugendenschar einer Regelfläche 2. Grades im Komplex R_p des Büschels $[P]$ befinden sich also sechs Erzeugende, die auch Strahlen des dem Büschel $[P]$ angehörenden Majcenschen kubischen Komplexes sind, also auch als Strahlen zu der Kongruenz (K) des Büchels $[P]$ gehören. Die diesen sechs Strahlen durch den Strahlenkomplex R_p zugeordneten Punkte auf der Geraden s befinden sich also auf der dem Büschel $[P]$ angehörenden Fläche Γ, und können in Paaren auch konjugiert-imaginär sein. Man sieht also, dass alle Geraden des Raumes, die keine Strahlen des dem Büschel $[P]$ angehörenden tetraedralen Strahlenkomplexes R_p sind, die Fläche Γ des Büschels $[P]$ in sechs Punkten schneiden.

Wie schon erwähnt, sind den Punkten der Geraden s, falls diese ein Strahl des Komplexes R_p ist, die Erzeugenden eines Kegels 2. Grades in diesem Komplex zugeordnet. Dem Scheitel dieses Kegels ist im R_p-Komplex der Strahl s zugeordnet. Auf diesem Kegel befinden sich sechs Strahlen des Majcenschen Komplexes M_p, da dieser vom dritten Grade ist. Die diesen sechs Erzeugenden dieses Kegels zugeordneten Punkte auf dem Strahle s befinden sich also auf der Fläche Γ. Alle Strahlen des dem Büschel $[P]$ angehörenden tetraedralen Strahlenkomplexes R_p haben also mit der diesem Büschel angehörenden Fläche Γ sechs Punkte gemein. Da jede Gerade des Raumes als Strahl dem Komplexe R_p entweder angehört, oder nicht angehört, sehen wir, dass jede Gerade des Raumes mit der dem Büschel $[P]$ angehörenden Fläche Γ sechs gemeinsame Punkte hat. Die dem Büschel $[P]$ angehörende und durch ihm bestimmte Fläche Γ ist also sechster Ordnung.

Da die Berührungsgeraden der Grundkurve k des Büschels $[P]$ ihren Berührungspunkten auf dieser Kurve auf die beschriebene Weise durch den R_p-Komplex, wie auch durch den M_p-Komplex des Büschels zugeordnet sind, folgt, dass auch die dem Büschel $[P]$ angehörende Fläche Γ diese Grundkurve k 4. Ordnung I. Art dieses Büschels polarer Räume enthält.

Man hat die Fläche Θ als eine stetige Menge derjenigen Punkte des Raumes definiert, die durch die Zentralpunkte derjenigen Strahlen des einem Büschel $[P]$ polarer Räume angehörenden Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes M_p gebildet ist, die auch als Strahlen zu dem diesem Büschel angehörenden tetraedralen Komplexe R_p gehören. Die Fläche Γ ist, wie bekannt, durch diejenigen Punkte des Raumes gebildet, denen die gemeinsamen Strahlen der Komplexe M_p und R_p des Büschels $[P]$ durch den Komplex R_p zugeordnet sind.

In der gemeinsamen Strahlenkongruenz der Komplexe R_p und M_p wähle man einen Strahl p, als Strahl des Majcenschen M_p Komplexes, der mit einem Strahl t_1 des tetraedralen Komplexes R_p identisch ist. Also $p \equiv t_1$. Dem Strahl $p \equiv t_1$, als Strahl des R_p-Komplexes sei im Raum der Punkt T_1 zugeordnet. Der Punkt T_1 befindet sich, wie bekannt, auf der Fläche Γ. Die den Punkt T_1 enthaltende und mit dem Strahl $p \equiv t_1$ parallel liegende Gerade p_1, also $p \parallel p_1$, ist bekanntlich ein Strahl des unserem Polarraumbüschel zugeordneten Strahlenkomplexes M_p, dessen Zentralpunkt der Punkt T_1 ist. Der Zentralpunkt des Strahls $p \equiv t_1$ des Komplexes M_p sei mit T bezeichnet, und von diesen Punkt T weiss man nur dass er sich irgendwo auf der Geraden p_1 befindet. Da die Gerade $p \equiv t_1$ ein Strahl des R_p Komplexes ist, bilden die allen Punkten dieser Geraden in dem R_p-Komplex zugeordneten Strahlen einen Kegel 2. Grades, dessen Scheitel sich im Punkt T_1 befindet. Also auch der dem auf der Geraden $p \equiv t_1$ sich befindendem Punkte T ist im Strahlenkomplex R_p ein Strahl t zugeordnet der den Punkt T_1

enthält. Dem Strahl $p \equiv t_1$, als dem Strahl des R_p Komplexes, ist, wie bekannt im Komplex M_p der den Punkt T_1 enthaltende Strahl p_1 so zugeordnet, dass $p_1 \parallel p \equiv t_1$ liegt. Aber der diesem Strahl p, als dem Strahl des M_p-Komplexes, zugeordneter Strahl t des R_p-Komplexes enthält auch den Punkt T_1, und zwar so, dass $t \parallel p$ ist, da die einem Punkt im Raum zugeordneten Strahlen in den Komplexen R_p und M_p eines Polarraumbüschels im Raum parallel liegen. Es folgt also, dass auch $p_1 \equiv t$ gilt, wenn $p \equiv t_1$ ist. Auf Grund unserer vorigen Ausführungen weiss man, dass wegen $p \equiv t_1$ der Punkt T auf der Fläche Θ, und der Punkt T_1 auf der Fläche Γ sich befindet. Da aber auch $p_1 \equiv t$ gilt, also die Gerade $p_1 \equiv t$ auch ein gemeinsamer Strahl der Komplexe R_p und M_p unseres Polarraumbüschels $[P]$ ist, befindet sich der Punkt T auch auf der Fläche Γ und der Punkt T_1 auch auf der Fläche Θ. Da eine derartige ein-eindeutige involutorische Zuordnung für jeden Strahl der gemeinsamen Strahlenkongruenz der Komplexe R_p und M_p gilt, sieht man, dass jede Θ-Fläche auch eine Γ-Fläche ist, und jede Γ-Fläche auch eine Θ-Fläche. Also die Flächen Θ, Γ sind identisch und es sei diese neuentdeckte Fläche mit $\Theta \equiv \Gamma$ bezeichnet. So wie in der gemeinsamen Strahlenkongruenz der Komplexe R_p und M_p deren Strahlen in ein-eindeutigen involutorischen Paaren paralleler Strahlen geordnet sind, so sind auch auf der Fläche $\Theta \equiv \Gamma$ deren Punkte in ein-eindeutig involutorische Paare geordnet. In dieser ein-eindeutigen involutorischen Zuordnung fallen in der gemeinsamen Strahlenkongruenz der Komplexe R_p und M_p diejenigen parallelen Strahlenpaare zusammen, die die Grundkurve 4. Ordnung I Art des Büschels der Inzidenzflächen unseres Polarraumbüschels berühren. Die Berührungspunkte der zusammenfallenden Strahlenpaare, dass heisst die Punkte dieser Grundraumkurve 4. Ordnung, sind die Doppelpunkte der ein-eindeutigen involutorischen Flächenpunktzuordnung auf der Fläche $\Theta \equiv \Gamma$. Es gilt also für ein Polarraumbüschel folgender Satz:

In jedem Polarraumbüschel besteht eine gemeinsame Strahlenkongruenz 6. Grades der diesem Büschel zugeordneten Majcenschen und tetraedralen Strahlenkomplexe. Jedem Strahl dieser Kongruenz ist einer von deren Punkten als Zentralpunkt im Majcenschen Komplex zugeordnet, und demselben Strahl ist noch ein Punkt auserhalb des Strahles, als dem Strahle des tetraedralen Strahles zugeordnet. Alle ∞^2 dieser Punktepaare bilden eine Fläche 6. Ordnung, die die Grundkurve 4. Ordnung I Art des Inzidenzflächenbüschels 2. Grades des Polarraumbüschels enthalten. Die Strahlen jedes Strahlenpaares in der Kongruenz 6. Grades, und die die Punkte der ihnen zugeordneten Punktepaare auf der Fläche 6. Ordnung sind ein-eindeutig und involutorisch einnander zugeordnet. Die Erzeugenden der Tangentenfläche der erwöhnten Grundkurve 4. Ordnung sind Doppelgeraden in der ein-eindeutigen involutorischen Strahlenzuordnung, und *die Punkte dieser Grundkurve sind Doppelpunkte in der ein-eindeutigen involutorischen Punktzuordnung auf der erwönten Fläche 6 Ordnung.*

4. **Ein anderer Beweiss für den Grad des Majcenschen Komplexes.** Den Grad seines Komplexes bestimmte Majcen so, dass er die Klasse drei für diesen Komplex fand, und dadurch auch der Grad drei dieses Komplexes bewiesen war. Im Majcenschen Beweis für die Klasse dieses Komplexes hüllen die Strahlen dieses Komplexes in jeder Ebene des Raumes eine Kurve 3. Klasse ein, die als Erzeugnis einer Punktreihe 2. Ordnung und einer unendlich fernen Punktreihe 1. Ordnung betrachtet werden kann. Mit der Bestimmung der Ordnung seines Komplexes befasste sich Majcen nicht, da er den Grad schon durch die Klasse bewiesen hatte. In unseren weiteren Ausführungen werden wir auch die Ordnung bestimmen, da uns die Art auf die diese Bestimmung durchgeführt wird in unseren weiteren Ausführungen nützlich sein wird.

Im Büschel $[P]$ polarer Räume wähle man beliebig zwei polare Räume mit ihren inzidenten Flächen A, B 2. Grades und im Raum ebenfalls ganz nach Belieben einen Punkt S. Auf jedem Strahle des Punktes S befindet sich eine involutorische Punktreihe konjugierter Punktepaare bezüglich der Fläche A, und eine solche bezüglich der Fläche B. Die Zentralpunkte dieser involutorischen Punktreihen bezüglich der Fläche A auf allen Geraden des Punktes S bilden eine Fläche A_s 2. Grades, die den Mittelpunkt O_1 der Fläche A und den Punkt S enthält, wie auch die Berührungskurve 2. Grades der Berührungsebenen des Punktes S auf der Fläche A. Auf den Geraden des Punktes S, die die Fläche A reell schneiden, sind die Punkte der Fläche A_s Mittelpunkte der durch diese Schnittpunkte bestimmten Strecke. Die Fläche A_s ist deswegen 2. Grades, da sie die durch die bekannte räumliche quadratische Transformation in der allgemeinen Inversion der Fläche A bezüglich des Pols S transformierte unendlich ferne Ebene ist [4]. Mittels der Fläche B und des Pols S wird durch eine derartige quadratische Transformation die unendlich ferne Ebene in eine analoge Fläche B_s 2. Grades transformiert, die wieder den Punkt S und analoge Elemente der Fläche B, wie es vorher bei der Fläche A war, enthält.

Jeder Punkt der Fläche A_s, bzw. der Fläche B_s, ist der Zentralpunkt der involutorischen Punktreihe der konjugierten Punktepaare auf der Verbindungsgeraden dieses Punktes und des Punktes S bezüglich der Fläche A, resp. der Fläche B. Die Flächen A_s und B_s haben, wie bekannt, eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art gemein, die den Punkt S enthält, da er sich auf beiden diesen Flächen befindet. Man bezeichne diese so dem Punkt S zugeordnete Raumkurve mit k_s. Die gemeinsame Raumkurve der Flächen A, B ist, wie bekannt, die Grundkurve k 4. Ordnung I. Art des Büschels $[P]$. Jedem Punkte S des Raumes ist selbstverständlich eine derartige Kurve k_s, bezüglich der Flächen A, B, zugeordnet. Auf Grund des vorher Erwähnten folgt,dass die Punkte der Kurve k_s, auf ihren Verbindungsgeraden mit dem Punkt S, Zentralpunkte der beiden erwähnten involutorischen Punktreihen bezüglich der Flächen A, B sind. Diese Zentralpunkte sind also auf derartigen die Flächen A, B reell schneidenden Geraden des Punktes S die gemeinsamen Mittelpunkte der durch ihre Schnittpunkte mit diesen Flächen bestimmten Strecken. Auf Grund der Definition des Majcenschen Komplexes der polaren Räume der Flächen A, B folgt weiter, dass die Verbindungsgeraden des Punktes S und der Punkte der Kurve k_s alle den Punkt S enthaltenden Strahlen des den vorher erwähnten polaren Räumen zugeordneten Majcenschen Komplexes sind. Wie bekannt, bilden alle Bisekanten einer Raumkurve 4. Ordnung I. Art, die einen ihrer Punkte enthalten, einen Kegel 3. Ordnung. Da für unsere Ausführungen jeder Punkt des Raumes als Punkt S in Betracht gezogen werden kann, folgt also, dass der Majcensche Strahlenkomplex der polaren Räume der Inzidenzflächen A, B 3. Ordnung ist.

Bei Majcens Betrachtungen wurde sein Strahlenkomplex durch zwei polare Räume bestimmt. Durch zwei polare Räume ist aber ein Büschel polarer Räume bestimmt, und es wurde später bewiesen, dass durch zwei beliebig gewählte polare Räume in einem Büschel derartiger Räume immer derselbe Majcensche Strahlenkomplex bestimmt ist, also, durch jeden Büschel $[P]$ polarer Räume ist ein Majcenscher kubischer Strahlenkomplex M_p bestimmt [2]. Die Strahlen aller Raumpunkte S schneiden die ∞^1 Inzidenzflächen des durch die Flächen A, B bestimmten Flächenbüschels in involutorischen Punktreihen, die durch ihre Schnittpunktepaare mit den Flächen A, B bestimmt sind. Die Zentralpunkte der Strahlen des durch die Flächen A, B bestimmten Majcenschen Komplexes hälften, wie bekannt, die durch diese Scnittpunktepaare begrenzten Strecken. Auf Grund der bekannten harmonischen Eigenschaft der hyperbolischen involutorischen Punktreihe folgt, dass diese Zentralpunkte die Mittelpunkte der durch die Schnittpunktepaare dieser Strahlen mit allen Flächen des durch die Flächen A, B bestimmten Flächenbüschels begrenzten Strecken sind. Es folgt also gleich weiter, dass die den Flächen $A, B, C, D \ldots$ des Flächenbüschels (AB) auf die beschriebene Weise zugeordneten Flächen $A_s, B_s, C_s, D_s, \ldots$ eines Punktes S alle die diesem Punkte zugeordnete Raumkurve k_s enthalten, also auch einen Flächenbüschel 2. Ordnung bilden. Man sieht also auch hier, dass man für jeden Punkt S des Raumes denselben Strahlenkegel 3. Grades des Majcenschen Komplexes bekommt, falls die polaren Räume irgendwelcher zwei Inzidenzflächen in dem durch die Flächen A, B bestimmten Flächenbüschel (AB) gewählt sind.

Die Flächen jedes Paares zugeordneter Flächen $A—A_s$, $B—B_s$, $C—C_s$, $D—D_s, \ldots$ sind homothetisch, da die Flächen jedes dieser

Paare eine gemeinsame reelle oder imaginäre unendlich ferne Kurve 2. Grades haben.

5. **Die Majcenschen kubischen Strahlenkomplexe in einem Bündel polarer Räume.** Wird ein Bündel polarer Räume in eine Menge von ∞^1 Büschel polarer Räume zerlegt, dann ist durch jeden dieser Büschel $[P^n]$ auf bekannte Weise ein dem Büschel zugeordneter tetraedraler quadratischer Strahlenkomplex $R_p{}^n$ und ein diesem Büschel zugeordneter kubischer Majcenscher Strahlenkomplex $M_p{}^n$ bestimmt. In unseren weiteren Betrachtungen wird diese Menge von ∞^1 Majcenschen Strahlenkomplexen des Bündels polarer Räume erfasst.

Ein Bündel polarer Räume sei durch die Inzidenzflächen A, B, C dreier polaren Räume, die keinem Flächenbüschel 2. Ordnung angehören, gegeben. Die einem Raumpunkt S zugeordneten Polarebenen in den polaren Räumen der Inzidenzflächen A, B, C haben einen gemeinsamen Punkt S_1, den aber die Polarebenen (∞^2) des Punktes S in allen polaren Räumen unseres Bündels enthalten. Eine derartige Raumtransformation der Punkte S in die Punkte S_1 ist eine kubische ([3], S. 140—143), und die Verbindungsgeraden der zugeordneten Punktepaare SS_1 bilden einen kubischen Strahlenkomplex. Durch jeden Bündel polarer Räume ist ein solcher kubischer Strahlenkomplex bestimmt. Die den Punkten S einer Geraden p zugeordneten Punkte S_1 bilden eine Raumkurve p_1 3. Ordnung, und die den Punkten S einer Ebene a zugeordneten Punkte S_1 bilden eine Fläche a_1 3. Ordnung. Die den Punkten S^n der unendlich fernen Ebene a^n zugeordneten Punkte $S_1{}^n$ bilden also auch eine Fläche $a_1{}^n$ 3. Ordnung, und diese Punkte S_1 sind die Mittelpunkte der Inzidenzflächen aller polaren Räume unseres Bündels. Jeder einem unendlich fernen Punkte S^n zugeordnete Punkt $S_1{}^n$ liegt auf dieser Fläche $a_1{}^n$ und die Punkte $S^n, S_1{}^n$ sind auf ihrer Verbindungsgeraden konjugiert in allen polaren Räumen unseres Bündels. Da sich aber Punkt S^n unendlich fern befindet, folgt, dass der Punkt $S_1{}^n$ der Zentralpunkt der involutorischen Punktreihen auf dieser Verbindungsgeraden aller ∞^2 in unserem Bündel sich befindenden polaren Räume ist. Man sieht also, dass die Verbindungsgeraden $S^n S_1{}^n$ der Punkte der unendlich fernen Ebene a^n und der ihnen zugeordneten Punkte auf der Fläche $a_1{}^n$, gemeinsame Strahlen der ∞^1 Majcenschen Komplexe aller ∞^1 Büschel $[P^n]$ polarer Räume sind, die sich in unserem Bündel derartiger Räume befinden. Da die unendlich fernen Punkte S^n, wie auch die diesen Punkten zugeordneten Punkte $S_1{}^n$ auf der Fläche $a_1{}^n$, stetige quadratische Mengen bilden, bilden die Verbindungsgeraden der Punktepaare $S^n S_1{}^n$ eine Strahlenkongruenz, die sich in jedem Majcenschen Strahlenkomplex aller Büschel polarer Räume des betrachteten Bündels befindet, und die wir mit Δ bezeichnen werden. Diese Strahlenkongruenz Δ ist also gewissermassen eine Grundkongruenz eines Büschels Majcenscher Komplexe, der durch den betrachteten Bündel polarer Räume bestimmt ist. Diese Strahlenkongruenz Δ wollen wir jetzt etwas näher untersuchen.

Jede Ebene β des Raumes schneidet dessen unendlich ferne Ebene in einer unendlich fernen Geraden p^n. Den Punkten P^n dieser Geraden sind in unserer kubischen Transformation die Punkte $P_1{}^n$ einer Raumkurve $p_1{}^n$ 3. Ordnung zugeordnet, die sich selbstverständlich auf der vorher erwähnten Fläche $\alpha_1{}^n$ befindet. Die Ebene β schneidet diese Raumkurve $p_1{}^n$ in drei Punkten, deren Verbindungsgeraden mit den ihnen zugeordneten Punkten, also drei Strahlen der Kongruenz Δ, in dieser Ebene β liegen. Da sich in jeder Ebene β des Raumes drei Strahlen der Kongruenz Δ befinden, ist diese Kongruenz von der Klasse drei.

Die Ordnung der Kongruenz Δ kann auf folgende Weise bestimmt werden: In unserem Bündel polarer Räume wähle man ganz nach Belieben drei polare Räume so aus, dass die Inzidenzflächen A, B, D 2. Ordnung dieser Räume sich nicht in einem Flächenbüschel 2. Ordnung befinden. Ganz beliebig wähle man weiter einen Raumpunkt S mit dem Bündel $[S]$ seiner Strahlen. Durch die Flächen A, B, C ist, wie bekannt, der Flächenbündel inzidenter Flächen 2. Grades aller polaren Räume unseres Bündels bestimmt. Die Zentralpunkte der involutorischen Punktreihen auf den Strahlen des Bündels $[S]$ der bezüglich der Fläche A konjugierten Punktepaare, befinden sich, wie wir schon vorher sahen, auf der beschriebenen Fläche A_s 2. Grades, die ausser den vorher erwähnten Elementen der Fläche A auch den Punkt S enthält. Die Fläche A_s entstand, wie bekannt, durch die beschriebene quadratische Transformation der unendlich fernen Ebene. Jeder Punkt der Fläche A_s ist auf seiner Verbindungsgeraden mit dem Punkt S dem unendlich fernen Punkte dieser Verbindungsgeraden bezüglich der Fläche A konjugiert. Auf dieselbe Weise wie durch die Fläche A ist dem Punkte S auch durch die Fläche B eine Fläche B_s 2. Grades zugeordnet. Die Durchdringungskurve r_1 der Flächen A_s, B_s ist eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art, die den Punkt S enthält. Wie es schon in Absatz 4. dieser Arbeit besprochen wurde, sind die den Punkt S enthaltenden Bisekanten der Raumkurve r_1 Strahlen des den polaren Räumen der Inzidenzflächen A, B zugeordneten Majcenschen Komplexes. Der Grad drei dieses Kegels ist selbstverständlich dem Grade dieses Komplexes gleich. Wie durch die Flächen A, B bestimmen wir weiter zum Punkt S auch die durch die Fläche C zugeordnete Fläche C_s, die auch vom 2. Grade ist, und wieder ausser den bekannten Elementen der Fläche C auch den Punkt S enthält. Die Raumkurve r_1 hat ausser dem Punkt S mit der Fläche C_s noch sieben weitere Punkte gemein, die mit dem Punkt S die acht bekannten assoziierten Punkte bilden. Es ist klar, dass einige dieser Punkte, ausser dem Punkte S, in Paaren auch konjugiert-imaginär sein können.

Wie schon erwähnt, ist jeder Punkt der Fläche A_s, oder der Fläche B_s, oder der Fläche C_s, auf seiner Verbindungsgeraden mit dem Punkt S konjugiert bezüglich der Fläche A, resp. der Fläche B, resp. der Fläche C, dem unendlich fernen Punkte dieser Verbindungsgeraden. Es folgt also, dass auf den Verbindungsgeraden des Punktes S und der sieben Schnittpunkte der Raumkurve r_1 und der Fläche C_s diese Schnittpunkte den unendlich fernen Punkten ihrer Verbindungsgeraden konjugiert sind bezüglich aller drei Flächen A, B und C. Wie schon erwähnt, hat der durch die Inzidenzflächen A, B bestimmte Büschel polarer Räume einen ihm zugeordneten Majcenschen kubischen Strahlenkomplex, dessen den Punkt S enthaltende Strahlen den Bisekantenkegel der Raumkurve r_1 bilden. Ein derartiger, in unserem Bündel durch die Inzidenzflächen A, C bestimmter Büschel polarer Räume hat ebenfalls eine ihm zugeordnete Raumkurve r_2 3. Ordnung des Punktes S, die, wie bekannt, die Durchdringungskurve der Flächen A_s und B_s ist. Die Erzeugenden des Bisekantenkegels dieser Raumkurve r_2 mit dem Scheitel S sind wieder Strahlen des dem durch die Flächen A, C bestimmten Büschel polarer Räume zugeordneten Majcenschen Strahlenkomplexes. Die auf der Fläche A_s sich befindenden Raumkurven r_1 und r_2 schneiden sich in den erwähnten acht assoziierten Punkten. Die polaren Räume unseres Bündels können in ∞^1 derartige Büschel verteilt werden, von denen jeder durch die Inzidenzfläche C und durch eine der Inzidenzflächen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ des durch die Flächen A, B bestimmten Flächenbüschels bestimmt ist. Die durch die Paare der Flächen $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$ bestimmten Büschel polarer Räume bezeichne man mit $(A\,B)$, $(A_1\,C)$, $(A_2\,C)$, $(A_3\,C), \ldots$. Man sah oben, das die sieben Schnittpunkte der Raumkurven r_1, r_2 auf der Fläche A_s gleichfalls Schnittpunkte der Raumkurve r_1 und der Fläche C_s sind. Da aber alle Flächen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ des Büschels $(A\,B)$ gepaart mit der Fläche A immer einen und denselben Büschel $(A\,B)$ bilden, also jedem Paare dieser Flächen immer dieselbe Raumkurve r_1 zugeordnet ist, müssen alle den Büscheln $(CA_1), (CA_2), (CA_3), \ldots$ zugeordneten Raumkurven r_n die Schnittpunkte der Raumkurven r_1 und der Fläche C_s enthalten. Es folgt also, dass die irgendeinem Büschel polarer Räume unseres Bündels zugeordnete Raumkurve r_n des Punktes S immer ausser dem Punkte S auch die sieben beschriebenen Schnittpunkte enthält, die mit dem Punkt S acht assoziierte Punkte bilden. Da der Punkt S jeder Punkt des Raumes sein kann, folgt, dass jeder Punkt des Raumes sieben Geraden enthält, die Strahlen der Majcenschen kubischen Komplexe sind, welche allen in einem Bündel sich befindenden Büscheln polarer Räume zugeordnet sind, und durch diese Büschel auch bestimmt sind. Für einen Bündel polarer Räume gilt also der folgende Satz:

Die allen in einem Bündel sich befindenden Büscheln polarer Räume zugeordneten Majcenschen kubischen Strhalenkomplexe haben eine Strahlenkongruenz 7. Ordnung und 3. Klasse gemeinsam. Auf jedem Strahle dieser Kongruenz haben alle diese Majcenschen

Strahlenkomplexe einen gemeinsamen Zentralpunkt, und alle diese Zentralpunkte sind die Mittelpunkte der Inzidenzflächen aller in dem Bündel sich befindenden polaren Räume.

Wie bekannt, bilden alle diese Mittelpunkte eine Fläche 3. Ordnung.

Mathematisches Institut
der Universität in Zagreb

LITERATUR:

[1] *J. Majcen*, O jednoj posebnoj vrsti kubičnog kompleksa, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **155** (1903), 159—172,

[2] *V. Niče*, Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex, Rad. Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **235** (1962), 107—125,

[3] *T. Reye*, Die Geometrie der Lage, III Abt., 1910,

[4] *V. Niče*, Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn **278** (86) (1945), 153—194.

O NEKIM NOVIM OSOBINAMA PRAMENA I SVEŽNJA POLARNIH PROSTORA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Zadamo li pramen polarnih prostora pramenom ploha 2. stupnja, koje su u tim prostorima incidentne, onda polarne ravnine jedne tačke prostora u svim prostorima tog pramena čine, kao što je poznato, pramen ravnina. Osi tih pramenova pridruženih svim tačkama prostora čine poznati Reyeov tetraedralni kompleks drugog stupnja, kojemu je zajednički autopolarni tetraedar tog pramena glavni tetraedar. One zrake ovog kompleksa na kojima leže njima pridružene tačke omataju prostornu krivulju 4. reda I vrste, a njima pridružene tačke su njihova dirališta na toj krivulji. Ova je prostorna krivulja k temeljna krivulja pramena $[P]$ incidentnih ploha 2. stupnja našeg pramena polarnih prostora.

Izdvojimo li iz pramena $[P]$ po volji dvije plohe $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ bit će njima određena dva polarna prostora u našem pramenu polarnih prostora. Svaki polarni prostor određuje na svakom pravcu prostora involutoran niz parova konjugiranih tačaka tog prostora, kojemu su dvostruke tačke prohodišta tog pravca s incidentnom plohom tog prostora. Polarni prostori incidentnih ploha $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ određuju prema tome na svakom pravcu prostora po dva takva kolokalna involutorna niza. Svaka dva kolokalna involutorna niza imaju uvijek jedan zajednički par pridruženih tačaka, koji u sasma specijalnom slučaju

može biti i konjugirano imaginaran. Oni pravci prostora na kojima jedna tačka takvog para leži neizmjerno daleko, tj. na kojima spomenuti kolokalni involutorni nizovi imaju zajedničku centralnu tačku, čine pravčasti kompleks 3. stupnja koji je otkrio Juraj Majcen, pa je on već ranije nazvan njegovim imenom. Osim Majcenovih osobina kod takvog kompleksa istražene su i objelodanjene i daljnje njegove osobine. Svaka zraka Majcenovog kompleksa ima svoju centralnu tačku i obrnuto. Ovo međutim ne vrijedi samo za vrhove zajedničkog polarnog tetraedra polarnih prostora incidentnih ploha $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$. Svi pravci ovih vrhova koji su usporedni s ravninom nasuprotne pobočke su zrake Majcenovog kompleksa, kojima je taj vrh centralna tačka.

Odaberemo li u Majcenovom kompleksu neku bilo kakvu kongruenciju, dakle skup od ∞^2 neprekinuto smještenih zraka u prostoru, ležat će centralne tačke tih zraka na nekoj plohi. Sve zrake Majcenovog kubičnog kompleksa koje sijeku neki pravac imaju centralne tačke koje čine opću plohu 3. reda.

Među nedavno objelodanjenim osobinama Majcenovog kompleksa nalaze se i ove: Bilo koja dva polarna prostora u pramenu takvih prostora određuju uvijek isti Majcenov kubični kompleks. Vidimo prema tome da je svakim pramenom polarnih prostora, odnosno pramenom njihovih incidentnih ploha 2. stupnja, određen jedan Reyeov kvadratni tetraedralni kompleks, kao i jedan Majcenov kubični kompleks. Ova dva kompleksa imaju zajedničku kongruenciju 6. stupnja, koja je prema tome također određena svakim pramenom polarnih prostora i u svakom pramenu polarnih prostora nalazi se po jedna takva kongruencija. Označimo ju sa (K). U ovoj smo radnji istražili plohu Θ, koju čine centralne tačke svih zraka ove kongruencije. Svakom pramenu polarnih prostora pridružena je prema tome i jedna takva ploha. Uz pomoć nekih osobina Reyeovog i Majcenovog kompleksa izvedeno je da *centralne tačke zraka Majcenovog kubičnog kompleksa pridruženog jednom pramenu polarnih prostora, koje su i zrake tom pramenu pridruženog tetraedralnog kompleksa, čine opću plohu 6. reda.*

Očito je da su sve bisekante i tangente temeljne prostorne krivulje 4. reda I vrste jednog pramena polarnih prostora zrake Majcenovog kubičnog kompleksa pridruženog tom pramenu. Centralne tačke tangenata te prostorne krivulje su njihova dirališta. Budući da ovo isto vrijedi i za tetraedralni kompleks pridružen na poznati način tom pramenu polarnih prostora vidimo, da ploha tangenata te prostorne krivulje, koja je kao što znamo 8. stupnja, leži u opisanoj kongruenciji (K), a sama ta krivulja nalazi se na plohi Θ. Vrhovi autopolarnog tetraedra našeg pramena polarnih prostora su višestruke singularne tačke te plohe.

Spomenuli smo da je pomoću pramena polarnih prostora svakoj tački prostora pridružen po jedan pravac, a svi takvi pravci čine spomenuti tetraedralni kompleks. Vrijedi naravski i obrat. Svakoj kongruenciji ovog kompleksa pridružena je prema tome jedna ploha, na kojoj je svakoj njenoj tački pridružena jedna zraka te kongruencije. Na taj način pridružene tačke zrakama naše kongruencije (K) čine također plohu, koju ćemo označiti s Γ. Služeći se osobinama obaju spomenutih kompleksa izvedeno je za plohu Γ da je ona 6. reda kao i ploha Θ. Iz osobina pramena polarnih prostora te njemu pridruženih Majcenovog i tetraedralnog kompleksa izlazi, da se i na plohi Γ nalazi temeljna prostorna krivulja 4. reda I vrste takvog pramena.

Uzmemo li jednu zraku p kongruencije (K) i njoj pridruženu centralnu tačku T_1 na njoj u Majcenovom kubičnom kompleksu, te njoj pridruženu tačku T_1 u tetraedralnom kompleksu, može se dokazati da je tačka T_1 centralna tačka jedne zrake Majcenovog kompleksa koja je usporedna sa zrakom p, a koja je i zraka tetraedralnog kompleksa pridružena tački T. Odavle izlazi da su plohe Θ i Γ identične, tj. $\Theta \equiv \Gamma$ i da na toj plohi postoji dvodimenzionalni skup jedno-jednoznačno involutorno pridruženih tačaka, kojega dvostruke tačke tvore temeljnu prostornu krivulju 4. reda I vrste našeg pramena polarnih prostora.

Stupanj svog kompleksa odredio je Majcen pomoću njegovog razreda. Red ovog kompleksa, dakle i njegov stupanj, može se odrediti i ovako: Centralne tačke involutornih nizova parova konjugiranih tačaka na svim zrakama jedne tačke S obzirom na jednu plohu 2. stupnja čine plohu 2. stupnja. (Posveopćena kvadratna inverzija neizmjerno daleke ravnine). Sve takve plohe jedne tačke S obzirom na incidentne plohe pramena polarnih prostora čine pramen ploha, kojemu temeljna krivulja 4. reda I vrste prolazi tačkom S. Bisekante te prostorne krivulje koje prolaze tačkom S su zrake pripadnog Majcenovog kompleksa. Sve takve bisekante tačke S čine, kao što znamo, stožac 3. reda, dakle je i Majcenov kompleks 3. stupnja.

Razdijelimo li svežanj polarnih prostora u ∞^1 pramenova takvih prostora, tad svaki takav pramen ima svoj tetraedralni kompleks i svoj Majcenov kompleks. Svežanj polarnih prostora zadajmo incidentnim plohama triju takvih prostora koji se ne nalaze u jednom pramenu. Svakoj tački P prostora pridružene polarne ravnine u svim polarnim prostorima svežnja prolaze, kao što je poznato, jednom tačkom P_1. Pridruženost ovakvih parova tačaka u prostoru je kubična, a geometrijsko mjesto njihovih spojnica je kubični kompleks. Tačkama neizmjerno daleke ravnine pridružene su na taj način tačke jedne opće plohe 3. reda, a tačke te plohe su središta svih ∞^2 incidentnih ploha polarnih prostora u našem svežnju. Na svakoj spojnici ovakvog para pridruženih tačaka ona tačka na plohi 3. reda je centralna tačka svih involutornih nizova u polarnim prostorima našeg svežnja. Spojnice ovakvih ∞^2 parova pridruženih tačaka su prema tome zrake Majcenovih kompleksa svih ∞^1 pramenova polarnih prostora u našem svežnju. Sve takve spojnice čine prema tome jednu kongruenciju koju označujemo s Δ.

Svaka ravnina prostora siječe neizmjerno daleku ravninu u jednom neizmjerno dalekom pravcu p^n. Tačkama tog pravca pridružene tačke u našoj kubičnoj transformaciji leže na prostornoj krivulji 3. reda, koju ta ravnina siječe u tri tačke. Ove tri tačke spojene s njima pridruženim na pravcu p^n daju tri zrake kongruencije Δ, dakle je ona trećeg razreda. Zgodnom primjenom kvadratno transformirane neizmjerno daleke ravnine u malo prije spomenutoj posveopćenoj inverziji kroz svaku tačku prostora kao pol, izvedeno je da je red kongruencije Δ šesti.

Za svežanj polarnih prostora vrijedi prema tome ovaj stavak:

Majcenovi kubični kompleksi svih pramenova polarnih prostora u jednom svežnju takvih prostora imaju jednu zajedničku kongruenciju 7. reda 3. razreda. Centralne tačke zraka te kongruencije su središta svih incidentnih ploha u polarnim prostorima tog svežnja i čine, kao što je poznato, opću plohu 3. reda.

Institut za matematiku
Sveučilišta u Zagrebu

(Primljeno 15. IX 1962.)