NOVI PRILOZI REYOVIM TETRAEDARNIM KOMPLEKSIMA

V. NIČE, ZAGREB

Extrait du Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, XIV Beograd, 1962.

Bulletin de la Société des mathématiciens
et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. XIV, 1—4 (1962), Beograd
Yougoslavie

NOVI PRILOZI REYEOVIM TETRAEDRALNIM KOMPLEKSIMA

VILKO NIČE, ZAGREB

Ovo izlaganje razdijelit ću u tri glavna dijela. U prvom ću dijelu izložiti neke osobine tetraedralnog kompleksa, koje su mi služile u daljnjim istraživanjima. U drugom dijelu izložit ću dobivene rezultate tih istraživanja, a u trećem dijelu nabrojit ću nekoliko neriješenih problema u području tetraedralnog kompleksa.

DIO I. Reyeov tetraedralni kompleks poznat je kao neprekinuti trodimenzionalni skup pravaca, koji sačinjavaju spojnice parova pridruženih točaka dvaju kolinearnih prostora. Poznato je također, da je taj skup spojnica identičan sa skupom presječnica parova pridruženih ravnina dvaju kolinearnih prostora. Znade se također, da tetraedralni kompleks čine oni parovi pridruženih pravaca dvaju kolinearnih prostora, koji se sijeku. Uz dva kolinearno pridružena prostora postoji uvijek i jedan tetraedar, kojega su vrhovi, bridovi i pobočke u tim prostorima sami sebi pridruženi. Tetraedralni kompleks ima u vezi s ovakvim tetraedrom dvaju kolinearnih prostora ove osobine: a) Isti dvoomjeri probodišta svih zraka tetraedralnog kompleksa s ravninama pobočaka tog tetraedra, imaju uvijek jednaku vrijednost. Ovaj se tetraedar zove glavni tetraedar tog tetraedralnog kompleksa, a spomenuti dvoomjer i njegova vrijednost su jedna njegova karakteristična invarijanta. b) Ovaj dvoomjer probodišta zraka tog kompleksa jednak je dvoomjeru ravnina tih zraka, položenih suprotnim vrhovima pobočaka tog tetraedra, c) Iz a) i b) izlazi, da je svaki tetraedralni kompleks određen ovakvim glavnim tetraedrom i jednom svojom zrakom. d) Tetraedralni kompleks je drugog stepena, tj. sve njegove zrake, koje prolaze jednom tačkom prostora, čine stožac 2. stupnja, a sve njegove zrake, koje leže u jednoj ravnini, omataju krivulju 2. razreda. e) Svih ∞^3 ovakvih stožaca prolazi vrhovima glavnog tetraedra, a svih ∞^3 spomenutih krivulja 2. razreda dira pobočne ravnine glavnog tetraedra. f) Zrake tetraedralnog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom pobočne ravnine glavnog tetraedra, čine pramen pravaca, kojega ravnina prolazi nasuprotnim vrhom toj pobočki, a drugi pramen zraka kompleksa te tačke leži u toj pobočnoj ravnini. Isto se tako raspadaju zrake tetraedralnog kompleksa u svakoj ravnini vrha glavnog tetraedra u dva pramena pravaca. Vrh jednog pramena je u tom vrhu, a drugi leži u tragu te ravnine u tom vrhu nasuprotnoj pobočnoj ravnini. g) Stošci zraka tetraedralnog kompleksa, čiji se vrhovi nalaze na jednoj njegovoj zraci, sijeku pobočke glavnog tetraedra u pramenovima krivulja 2. stupnja, kojima su temeljne tačke vrhovi tog tetraedra u toj ravnini i njeno probodište s tom zrakom. h) Stošci zraka tetraedralnog kompleksa, kojima su vrhovi na zraci jednog vrha glavnog tetraedra, sijeku nasuprotnu pobočku tom vrhu u istoj krivulji 2. stupnja.

Budući da svaka četvorka tačaka ili ravnina jednog pravca ima 24 dvoomjera, među kojima postoji šest grupa po četiri sa istim vrijednostima, koje su na poznati međusobno povezane, to i svaki tetraedralni kompleks ima šest karakterističnih, međusobno ovisnih invarijanata.

DIO II. Reyeov tetraedralni kompleks ima ∞^3 zraka, a svih pravaca u prostoru ima ∞^4. Zadamo li prema tome neki glavni tetraedar $ABCD$, moguće je sve pravce prostora složiti u ∞^1 tetraedralnih kompleksa, koji će svi imati zajednički ovaj glavni tetraedar. Ravnine nasuprotnih pobočaka vrhovima A, B, C, D ovog tetraedra označimo s $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Sjecišta ovih ravnina sa zrakama jednog Reyeovog tetraedralnog kompleksa, kojemu je ovaj tetraedar glavni, označimo s $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$. Neka je dvoomjer $(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) = p$ jedna karakteristična invarijanta takvog kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$. On je tom invarijantom i određen kada je p jedna zadana određena vrijednost. Znamo međutim da je i $(\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}\,\bar{\delta}) = (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) = p$, ako su $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ ravnine zraka tog kompleksa, koje prolaze vrhovima A, B, C, D. Uzmimo, da je p sada parametar. Svaka vrednost parametra p tj. dvoomjera $(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) = (\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\,\bar{\gamma}\,\bar{\delta})$, određuje kao nova karakteristična invarijanta novi tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $ABCD$. Budući da dva tetraedralna kompleksa jednog glavnog tetraedra ne mogu imati zajedničkih zraka, osim onih koje prolaze vrhovima i leže u pobočkama tog glavnog tetraedra, vidimo, da se svi pravci prostora mogu u istinu svrstati u ∞^1 tetraedalnih kompleksa jednog glavnog tetraedra. Svi ovi kompleksi čine pramen tetraedralnih kompleksa tog glavnog tetraedra. Budući da zrake tetraedralnog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom prostora, čine stožac 2. stupnja, koji prolazi vrhovima A, B, C, D njegovog glavnog tetraedra, čine stošci zraka ove tačke svih tetraedralnih kompleksa ovakvog pramena pramen stožaca s tim zajedničkim vrhom, kojemu temeljne četiri izvodnice prolaze vrhovima A, B, C, D zajedničkog glavnog tetraedra.

Vrhom A položena ravnina ρ neka siječe pobočku BCD u pravcu r, koji siječe brid BC u točki M. Zrake našeg tetraedralnog kompleksa u toj ravnini neka čine pramen pravca (P), kojemu je vrh P, kao što znamo, u tragu r. Spojnica DP neka siječe brid BC u točki N. Ravnine svake zrake ovog pramena položene vrhovima A, B, C, D, sijeku brid BC u točkama M, B, C, N, dakle će na temelju Papusova stavka biti $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} = \overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}\overline{\delta} = (MBCN) = p$ jedna karakteristična invarijanta tog našeg tetraedralnog kompleksa, gdje p ima neku zadanu vrijednost. Shvatimo li p kao parametar, a točke M, B, C ostavimo na miru, dobit će točka N na bridu BC za svaku novu vrijednost parametra p novo mjesto, a prema tome će to isto vrijediti i za točku P na tragu r. Izlazi prema tome, da će vrhovi P pramenova zraka u ravnini ρ svih tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, činiti niz točaka na tragu r, a svakom tačkom P_i tog niza na pravcu r, određen je prema tome jedan tetraedralni kompleks tog glavnog tetraedra. Jedan pravac l vrha A u ravnini ρ neka probada ravninu pobočke BCD u tački L na pravcu r, a tačkama P_1, P_2, P_3, P_4 na pravcu r neka su na opisani način zadana četiri tetraedralna kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$. Stošci zraka ovih tetraedralnih kompleksa svih tačaka pravca l sijeku ravninu pobočke BCD u istim krivuljama c_1, c_2, c_3, c_4 2. stupnja. Ove krivulje zadanih četiriju tetraedralnih kompleksa bit će određene tačkama B, C, D, L i po jednom od tačaka P_1, P_2, P_3, P_4. Takve krivulje svih tačaka pravca l za sve tetraedalne komplekse glavnog tetraedra $ABCD$ čine prema tome pramen krivulja (c_n) 2. stupnja, kojemu su temeljne točke B, C, D, L. Ako za tačke P_1, P_2, P_3, P_4 na pravcu r vrijedi $(P_1\, P_2\, P_3\, P_4) = -1$, mi kažemo, da krivulje c_1, c_2, c_3, c_4 čine harmonijsku četvorku, a prema tome takvu četvorku čine i odgovarajući stošci zajedničkih vrhova, kojima su te krivulje osnovke u ravnini pobočke BCD. Vidimo dakle, ako stošci zraka četirju tetraedralnih kompleksa, glavnog tetraedra $ABCD$ jedne tačke pravca l čine harmonijsku četvorku, onda takve četvorke čine stošci zraka ovih četiriju tetraedralnih kompleksa u svim tačkama pravca l. Što vrijedi za pravac l, koji smo odabrali po volji u ravnini ρ, vrijedi i za sve ostale pravce vrha A u ravnini ρ, a što vrijedi za ravninu ρ pravca l, vrijedi i za sve druge ravnine tog pravca. Ako naime pravac r siječe krivulje c_1, c_2, c_3, c_4 u harmonijskoj četvorci tačaka $(P_1\, P_2\, P_3\, P_4) = -1$, siječi će u takvoj četvorci te krivulje i svi ostali pravci r_i ravnina ρ_i koje prolaze tačkom L, što proizlazi iz poznate osobine pramena krivulja 2. stupnja, Vidimo dakle, ako stošci zraka četiriju tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra čine harmonijsku četvorku, onda takvu četvorku čine takvi stošci tih tetraedralnih kompleksa u svih ∞^3 tačaka prostora. Što vrijedi za harmonijsku četvorku, vrijedi naravski i za bilo koji drugi dvoomjer bilo koje četvorke takvih stožaca. Ukratko, pramenovi stožaca zraka svih tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra u svim tačkama prostora međusobno su projektivno pridruženi, kad u tim pramenovima jednoznačno pridružimo stošce pojedinih tetraedralnih kompleksa. Očito je, da dva ili više ovakvih pramenova tetraedralnih kompleksa možemo međusobno projektivno pridružiti na isti način, kao recimo dva pramena pravaca, ili dva pramena krivulja 2. stupnja. Tako projektivno pridruženi pramenovi tetraedralnih kompleksa daju i razne proizvode, koji su uz ovo dosadanje opisani u radnji „Reyeovi tetraedralni kompleksi jednog, dvaju, triju i četiriju glavnih tetraedara", koja je izašla u Radu Jug. akad. nauka u Zagrebu.

Sličnim prostornim razmatranjima može se izvesti da će ovakva dva pramena tetraedralnih kompleksa biti i onda projektivno pridružena, ako u njima pridružimo one tetraedralne komplekse, kojima karakteristične invarijante imaju jednake vrijednosti. Naravski, u oba pramena svi tetraedralni kompleksi moraju imati jednake invarijante. Sve što je izvedeno za stošce zraka opisanog pramena tetraedralnih kompleksa, vrijedi dualno i za krivulje 2. stupnja u ravninama prostora, koji omataju u njima zrake tih kompleksa. U svakoj ravnini prostora imamo pramen krivulje 2. stupnja, određen s četiri temeljne tangente, koje leže u pobočkama glavnog tetraedra, a svi su ovakvi pramenovi međusobno projektivno pridruženi na isti način, kao stožci malo prije.

Znamo, da u jednoj četvorci tačaka, ili ravnina, možemo složiti 24 dvoomjera, od kojih po 4 imaju uvijek jednaku vrijednost, a šest na taj način postojećih vrijednosti tih dvoomjera su međusobno ovisni na poznati način. Projektivan odnos dvaju opisanih pramenova tetraedralnih kompleksa, možemo mi na spomenuti način pomoću jednakih vrijednosti parametra provesti samo onda, ako unapred odredimo, odnosno zadamo, oblik dvoomjera karakteristične invarijante u oba pramena, nakon što smo obilježili vrhove njihovih temeljnih tetraedara. Zadamo li mi međutim samo vrijednost karakteristične invarijante, onda se može pokazati, da postoji šest raznih oblika karakteristične invarijante za tu istu vrijednost, koja u opisanom pramenu tetraedralnih kompleksa daje šest tetraedralnih kompleksa. Ovakvi tetraedralni kompleksi označeni su kao parametarske šestorke jednog pramena tetraedralnih kompleksa. Za vrijednost —1 postoje u takvom pramenu samo 3 tetraedralna kompleksa, koji su nazvani harmonični tetraedralni kompleksi. Opširnija razmatranja o takvim parametarskim šestorkama mogu se naći u radnji „Parametrische Sextupel Reyescher tetraedraler Strahlenkomplexe eines u. zweier Haupttetraeder", koja je izašla u Glasniku mat. fiz. i astr. u Zagrebu.

Već smo spomenuli, da je Reyeov tetraedralni kompleks kvadratni, tj. njegove zrake, koje prolaze jednom tačkom prostora čine stožac 2. stupnja. Za neizmjerno daleke tačke prelaze ti stošci u valjke, a svaki taj valjak ima svoju os. Kvadratni skup ovakvih neprekidno povezanih osi u prostoru čini jednu kongruenciju, koja ima svoj razred i svoj red. Svi ovakvi valjci zraka, koji su usporedni s nekom ravninom α, sijeku svaku pobočnu ravninu glavnog tetraedra u pramenu krivulja 2. stupnja. Središta tih krivulja leže naravski na osima tih valjaka, a sva ta središta leže, kao što je poznato, na jednoj krivulji 2. stupnja. Svaka ravnina prostora $\alpha_n//\alpha$ siječe tu krivulju središta u dvije tačke, dakle se u njoj nalaze osi dvaju tih valjaka. Budući da α_n može biti bilo koja ravnina prostora, vidimo da je opisana kongruencija osi spomenutih valjaka 2. razreda. Odaberemo li u pobočnoj ravnini BCD glavnog tetraedra $ABCD$ našeg tetraedralnog kompleksa, kojemu je karakteristična invarijanta $(MBCN)=p$, po volji tačku O kao središte krivulje k 2. stupnja, koja prolazi vrhovima B, C, D, odredit ćemo zraku naše kongruencije, koja prolazi točkom O, ovako: Spojnica DN neka siječe krivulju k u točki P, a spojnica PM neka siječe tu krivulju u točki K. Pravac $o//AK$ bit će zraka naše konguuencije, koja prolazi točkom O. Sve zrake naše kongruencije, koje sijeku zraku o, čine pravčastu plohu 5. stepena, kojoj je taj pravac dvostruka izvodnica i dvostruki pravac, a svakom tačkom tog pravca prolaze još daljnje dvije izvodnice te plohe. Budući da je tačka O odabrana po volji u ravnini BCD, a svakom tačkom prolazi samo jedna zraka naše kongruencije izvan ravnina pobočaka glavnog tetraedra, to vidimo, da svakom tačkom svake zrake naše kongruencije prolaze još daljnje dvije zrake, tj. ta je kongruencija 3. reda. Referat o ovoj kongruenciji iznesen je prije nekoliko dana na matematičkom kongresu u Innsbrucku, a potanja razlaganja o njoj naći će se u prvom dijelu radnje „Neki novi prilozi pramenu tetraedralnih kompleksa“, koja će vjerojatno biti objelodanjena u Radu Jug. akad. nauka u Zagrebu.

Svaki tetraedralni kompleks, u sprijeda opisanom pramenu tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra, ima svoju ovakvu kongruenciju osi valjaka njegovih zraka. Sve ovakve kongruencije tog pramena tetraedralnih kompleksa čine zajedno pravčasti kompleks 3. stepena. O ovom kompleksu iznesen je kratki referat (saopćenje) na ovom kongresu, a potanja razmatranja o njemu moći će se naći u drugom dijelu malo prije spomenute radnje.

Sve polarne ravnine jedne tačke prostora, obzirom na polarne prostore jednog pramena takvih prostora, prolaze kao što je poznato, jednim pravcem. Svih ∞^3 takvih pravaca, pridruženih tačkama prostora, čine tetraedralni kompleks, kojemu je glavni tetraedar autopolarni tetraedar tog pramena polarnih prostora. U svežnju polarnih prostora ima neizmjerno mnogo takvih pramenova polarnih prostora, a vrhovi od neizmjerno mnogo autopolarnih tetraedara leže na jednoj prostornoj krivulji 6. reda. Očito je, da ovdje postoji i neizmjerno mnogo tetraedralnih kompleksa. Postoji međutim i jedan specijalan svežanj polarnih prostora samo s jednim autopolarnim tetraedrom, a neizmjerno mnogo spomenutih tetraedralnih kompleksa čine ovdje već sprijeda spomenuti pramen tetraedralnih kompleksa tog zajedničkog autopolarnog tetraedra kao glavnog tetraedra. Svakom kompleksu ovog pramena pridružen je pramen polarnih prostora sa svojom temeljnom krivuljom 4. reda I. vrste. Svih ovakvih ∞^1 krivulja 4. reda I. vrste čine zanimivu plohu 4. reda s 12 dvostrukih tačaka. Daljnja razmatranja o takvoj plohi, kao i o čitavom pramenu takvih ploha, mogu se naći u radnji „Prilog svežnju polarnih prostora s jednim zajedničkim polarnim tetraedrom", koja će doskora izaći u Glasniku mat. fiz. i astr. u Zagrebu.

Dio III. Istraživanja o tetraedralnim kopleksima nisu još uvijek završena. Kao što smo istražili geometrijsko mjesto osi valjaka zraka jednog tetraedralnog kompleksa, kao i kod svih kompleksa u jednom pramenu takvih kompleksa, može se istražiti kod svih takvih valjaka a) geometrijsko mjesto žarišnih osi, b) geometrijsko mjesto hiperoskulacionih kružnih valjaka.

Nadalje bi trebalo istražiti geometrijsko mjesto osi svih stožaca zraka jednog tetraedralnog kompleksa. Zanimivo bi bilo znati što čine osi takvih stožaca kad su im vrhovi u jednoj ravnini (kongruencija), ili na jednom pravcu (pravčasta ploha).

Što čine konjugirano imaginarne i izotropne zrake tetraedralnog kompleksa?

Kakve osobitosti se javljaju kod tetraedralnih kompleksa, kojima se jedan ili oba para pobočnih ravnina glavnog tetraedra raspadnu u par konjugirano imaginarnih ili izotropnih ravnina?

Zrake tetraedralnog kompleksa u jednoj ravnini prostora omataju krivulju 2. razreda, koja ima središte u dva žarišta.

a) Što čine središta tih krivulja u ravninama jednog pramena?

b) Što čine žarišta tih krivulja u ravninama jednog pramena?

c) Što čine središta tih krivulja u ravninama jednog svežnja?

d) Što čine žarišta tih krivulja u ravninama jednog svežnja?

e) Kako izgledaju problemi a)—d) u pramenu tetraedralnih kompleksa?

Ovo je samo jedan dio problema u okolini tetraedralnog kompleksa, koji čekaju na svoje rješenje. Iznesao sam ih ovdje zato, da eventualno probudim malo jači interes kod mladih matematičara za ovu lijepu geometrijsku granu u matematici, koja u sebi krije još toliko zanimivih i jednostavnih matematičkih istina. Sintetička geometrija živi danas u sjeni modernih matematičkih smjerova, ali matematičke istine jednako su vrijedne, bile one otkrivene bilo kako i bilo gdje.