KOMPLEKS OSI VALJAKA ZRAKA TETRAEDARNIH KOMPLEKSA U JEDNOM PRAMENU TAKVIH KOMPLEKSA

V. NIČE, ZAGREB

Extrait du Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, XIV Beograd, 1962.

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. XIV, 1—4 (1962), Beograd
Yougoslavie

KOMPLEKS OSI VALJAKA ZRAKA TETRAEDRALNIH KOMPLEKSA U JEDNOM PRAMENU TAKVIH KOMPLEKSA

VILKO NIČE, ZAGREB

Označimo ravnine pobočaka jednog tetraedra s α, β, γ, δ, a tim pobočkama nasuprotne vrhove s A, B, C, D. Svi pravci prostora, koji ravnine α, β, γ, δ probadaju u tačkama A_n, B_n, C_n, D_n tako, da za sve nastale četvorke točaka bude $(A_n\, B_n\, C_n\, D_n)=k$, gdje je k neka konstanta, čine zrake poznatog kvadratnog tetraedalnog kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$. Oblik i vrijednost ovog dvoomjera zove se karakteristična invarijanta tog kompleksa. Uzmemo li vrijednost k kao parametar, biće svakom vrijednošću tog parametra određen po jedan takav kompleks istog glavnog tetraedra $ABCD$. Svi ovi kompleksi čine pramen tetraedalnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$. Zrake tetraedalnog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom prostora čine stožac 2. stupnja, koji prolazi vrhovima A, B, C, D glavnog tetraedra tog kompleksa. Takvi stošci jedne tačke prostora svih kompleksa spomenutog pramena kompleksa, čine prema tome pramen stožaca 2. stupnja sa zajedničkim vrhom u toj tački, a četiri temeljne izvodnice tog pramena prolaze vrhovima A, B, C, D. Neizmjerno dalekim tačkama prostora prolaze naravski takvi valjci 2. stupnja, a svaki takav valjak ima i svoju os. U jednom tetraedalnom kompleksu ima očito ∞^2 takvih valjaka, dakle njihove osi čine neku kongruenciju. Ova je kongruencija istražena, te je 3. reda i 2. razreda. Međutim takve kongruencije svih tetraedalnih kompleksa u jednom pramenu takvih kompleksa čine neki kompleks, o kojemu želim ovde nešto reći.

Položimo li bilo kojom zrakom tetraedalnog kompleksa, određenog karakterističnom invarijantom $(A_n\, B_n\, C_n\, D_n)=k$, ravnine vrhovima A, B, C, D, koje označimo s $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, onda vrijedi za svaku zraku tog kompleksa $(A_n, B_n, C_n, D_n)=(\bar{\alpha}\;\bar{\beta}\;\bar{\gamma}\;\bar{\delta})=k$. Presijecimo ravninu α pobočke BCD nekom ravninom ρ točke A u pravcu r, koji pravac brida BC siječe u tački M. Pomoću dvoomjera $(MBCN)=(\bar{\alpha}\;\bar{\beta}\;\bar{\gamma}\;\bar{\delta})=k$ dobivenu točku N na bridu BC spojimo s vrhom D, a spojnicu DN neka siječe trag r u tački P. Pravci točke P u ravnini ρ su zrake našeg tetraedalnog kompleksa, budući da svakom zrakom ovog pramena položene ravnine $\bar{\alpha}\;\bar{\beta}\;\bar{\gamma}\;\bar{\delta}$ sijeku brid

BC u istim točkama M, B, C, N. Sa svakom zrakom pramena (P) u ravnini ρ leži u prostoru usporedan jedan valjak 2. stupnja zraka našeg koompleksa, a osnovke tih valjaka u ravnini α čine pramen krivulja 2. stupnja temeljnih tačaka B, C, D, P. Središta tih krivulja leže, kao što je poznato, na jednoj krivulji 2. stupnja. U pobočnoj ravnini BCD odaberimo tačku O kao središte krivulje c 2. stupnja, koja prolazi tačkama B, C, D, a njima je i određena. Pravac r neka siječe tu krivulju recimo baš u tački P i nekoj drugoj tački K. Zrake pramena pravaca (P) u ravnini ρ znamo da su zrake našeg tetraedralnog kompleksa, kojemu je karakteristična invarijanta $(MBCN) = (A_n\, B_n\, C_n\, D_n) = (\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma}\ \bar{\delta}) = k$. Zrakom ovog pramena (P), koja je usporedna sa spojnicom AK, određen je valjak usporednih zraka ovog kompleksa sa ovom spojnicom, a kojemu je osnovka u ravnini α naša krivulja c. Točkom O prolazi os tog valjka, kao zraka našeg istraživanog kompleksa. Budući da je svakom tačkom O u ravnini BCD na opisani način određena samo jedna krivulja c vidi se, da svakom tom tačkom prolazi samo jedna zraka već spomenute kongruencije. Vrtimo li ravninu ρ oko pravca AP nastat će pramen ravnina, koje će brid BC sjeći u tačkama M_i, dok će tačke B, C, N ostati na miru. Za svaku novu tačku M_i bit će vrijednost k druga, tako da k postaje sada parametar. Svakoj vrijednosti ovog parametra bit će pridružena jedna opisana tačka M_i, a prema tome i jedan novi tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $ABCD$. Ovakvim ravninama spojnice AP određen je dakle pramen tetraedralnih kompleksa tog glavnog tetraedra, a svaka ta ravnina (odnosno njen trag r_i) siječe krivulju c osim u tački P još i u nekoj tački K_i. Središtem O krivulje c prolazi dakle po jedna os valjka zraka svakog tetraedralnog kompleksa ovog našeg pramena, jer svi oni prolaze krivuljom c, a usporedne su te osi sa spojnicama AK_i, kao što smo malo prije vidjeli. Sve te osi tačke O, koje su osi našeg istraživanog kompleksa, čine dakle stožac 2. stupnja, koji je sukladan i usporedan sa stošcem vrha A i osnovke c. Zrake našeg istraživanog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom ravnine pobočke BCD, a prema tome i tačkama drugih triju pobočaka, a koje ne leže u tim ravninama, čine stožac 2. stupnja.

Presijecimo bilo kojom ravninom π prostora pobočne ravnine BCA i BCD u pravcima s_1 i s_2. Svaka tačka ovih pravaca je vrh jednog malo prije opisanog stošca zraka našeg istraživanog kompleksa. Naša po volji odabrana ravnina π prostora siječe svaki od njih u dvije izvodnice, a sve su te izvodnice zrake našeg kompleksa u toj ravnini. Budući da one nastaju kao spojnice dvaju jedno-dvoznačno pridruženih nizova s_1, s_2, u kojima je sjecište nosilaca s_1, s_2 na bridu BC pridruženo samo sebi, omataju sve te zrake u ravnini π neku krivulju 3. razreda. Budući da svaki kompleks ima red i razred isti, tj. ima samo stepen, dobivamo ovo:

Kompleks osi valjaka zraka tetraedralnih kompleksa jednog pramena takvih kompleksa sa zajedničkim glavnim tetraedrom, je trećeg stepena.