

VILIM NIČE

ERGÄNZENDE BEITRÄGE ZUM MAJCENSCHEN
KUBISCHEN STRAHLENKOMPLEX

DOPUNSKI PRILOZI MAJCENOVOM KUBIČNOM
KOMPLEKSU

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
Z A G R E B

VILIM NIČE

ERGÄNZENDE BEITRÄGE
ZUM MAJCENSCHEN KUBISCHEN
STRAHLENKOMPLEX

EINFÜHRUNG. Werden durch zwei Flächen 2. Grades zwei polare Räume bestimmt, so sind auf jeder Geraden des Raumes durch diese polaren Räume zwei kollokale involutorische Reihen von Paaren konjugierter Punkte bestimmt. Wie bekannt, haben zwei kollokale involutorische Punktreihen, wenn wenigstens eine dieser Punktreihen elliptisch ist, ein Paar konjugierter Punkte gemein. Wenn beide kollokalen involutorischen Punktreihen hyperbolisch sind, kann das gemeinsame Punktpaar reell oder imaginär sein. Alle Geraden des Raumes, auf denen ein Punkt dieses gemeinsamen Punktpaares konjugierter Punkte dieser zwei kollokalen involutorischen Punktreihen sich unendlich fern befindet, bilden einen durch die zwei gegebenen Flächen 2. Grades bestimmten Strahlenkomplex der von Georg Majcen entdeckt und betrachtet wurde. Deswegen werden wir diesen Strahlenkomplex als Majcenschen Strahlenkomplex bezeichnen. Der gemeinsame Zentralpunkt dieser zwei kollokalen involutorischen Punktreihen auf jedem Komplexstrahl soll Mittelpunkt dieses Komplexstrahles genannt werden. In der Abhandlung »O jednoj posebnoj vrsti kubičnog kompleksa« (Über eine besondere Art des kubischen Komplexes), Rad Jugosl. akad., 155 (1903), p. 159–170, hat Majcen den Grad drei dieses Strahlenkomplexes bestimmt. In dieser Arbeit hat Majcen seinen Strahlenkomplex als den geometrischen Ort jener Strahlen des Raumes definiert, auf denen die zwei erwähnten kollokalen involutorischen Punktreihen ihren gemeinsamen Zentralpunkt haben. Jeder Strahl des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes hat nur einen Mittelpunkt, und jeder Punkt des Raumes ist Mittelpunkt nur eines Strahles dieses Strahlenkomplexes. In der erwähnten

Abhandlung sind folgende Sätze über diesen kubischen Strahlenkomplex abgeleitet:

a) Jeder Raumpunkt ist der Mittelpunkt eines Strahles des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes.

b) Jeder Punkt des Raumes enthält nur eine Ebene, deren Komplexkurve 3. Klasse, die durch die Strahlen des Majcenschen Komplexes in dieser Ebene eingehüllt wird, diesen Punkt enthält.

Die Berührungsgerade dieser Kurve in diesem Punkt P ist der Komplexstrahl dieses Mittelpunktes, und die Ebene dieser Kurve 3. Klasse oskuliert in diesem Punkt P die Raumkurve der auf den Komplexstrahlen dieses Punktes sich befindenden Mittelpunkte.

c) Die Mittelpunkte der Strahlen des Majcenschen Komplexes, die einen Punkt des Raumes enthalten, bilden eine Raumkurve 4. Ordnung.

d) Diejenigen Strahlen des Majcenschen Komplexes, die die Inzidenzflächen φ_1, φ_2 der Polarräume dieses Komplexes berühren, bilden eine Strahlenkongruenz 12. Ordnung und 8. Klasse.

e) Die Strahlen des Majcenschen Komplexes, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, die kein Komplexstrahl ist, bilden eine Regelfläche 3. Grades.

f) Alle Strahlen des Majcenschen Strahlenkomplexes, deren Mittelpunkte auf einem Strahle dieses Komplexes liegen, bilden eine Cayleysche Regelfläche 3. Grades.

g) Die Strahlen des Majcenschen Komplexes, deren Mittelpunkte sich auf den die Mittelpunkte der Inzidenzflächen enthaltenden Geraden befinden, bilden hyperbolische Paraboloiden.

h) Die Strahlen des Majcenschen Komplexes, deren Mittelpunkte in einer Ebene liegen, bilden eine Strahlenkongruenz 4. Ordnung und 4. Klasse.

Majcen hat auch einige singuläre Eigenschaften seines Komplexes betrachtet, die wir später berücksichtigen werden. Dieser Komplex hat ausser der von Majcen betrachteten Eigenschaften noch weitere interessante Eigenschaften, die wir in dieser Arbeit betrachten werden.

I. EINIGE NEUE DEFINITIONEN UND EIGENSCHAFTEN DES MAJCENSCHEN KUBISCHEN STRAHLENKOMPLEXES

Schon in der vorher erwähnten Arbeit von Majcen steht, dass die zwei durch die Schnittpunkte der Inzidenzflächen φ_1, φ_2 2. Grades auf jedem Strahl des Majcenschen Komplexes entstandenen Strecken einen gemeinsamen Mittelpunkt haben. Durch die Tatsache, dass nur in diesem Falle die zwei vorher beschriebenen Punktreihen auf jedem Komplexstrahl von den Punkten des gemeinsamen konjugierten Punktepaars einen Punkt unendlich fern haben, ist die erwähnte Eigenschaft augenscheinlich. Dies alles aber beruht weiter auf der Tatsache, dass die Schnittpunkte der Komplexstrahlen und der Inzidenzflächen φ_1, φ_2 Doppelpunkte der bekannten kollokalen involutorischen Punktreihen sind, die mit jedem Paare konjugierter Punkte ihrer involutorischen Reihen harmonische Punktquadrupel bilden. Durch die Inzidenzflächen φ_1, φ_2 der polaren Räume des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes ist ein Flächenbüschel $\{\varphi\}$ von Flächen 2. Grades, oder ein Büschel polarer Räume bestimmt. Die Schnittpunkte $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots$ der Strahlen des Majcenschen Komplexes und der Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ des Flächenbüschels $\{\varphi\}$ bilden, wie bekannt, eine involutorische Punktreihe, in deren Doppelpunkten diese Strahlen zwei Flächen dieses Büschels berühren. Der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt der Strahlen des Majcenschen Komplexes sei mit S und S_n bezeichnet. Die Schnittpunktepaare $A_1 B_1, A_2 B_2$ sind, wie bekannt, Doppelpunkte der hyperbolischen involutorischen Punktreihen konjugierter Punktepaare bezüglich der Flächen 2. Grades φ_1 und φ_2 , auf denen also $(A_1 B_1 S S_n) = (A_2 B_2 S S_n) = -1$ gilt. Da die involutorische Punktreihe der Schnittpunkte der Flächen des Büschels $\{\varphi\}$ und der Komplexstrahlen durch die Schnittpunktepaare $A_1 B_1, A_2 B_2$ bestimmt ist, wird durch die Tatsache dass $(A_1 B_1 S S_n) = (A_2 B_2 S S_n) = (A_3 B_3 S S_n) = \dots = -1$ ist, bewiesen, dass S, S_n die Doppelpunkte der involutorischen Punktreihe der konjugiert zugeordneten Schnittpunktepaare $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots$ sind. Da ferner durch jedes Schnittpunktepaar $A_n B_n$ jedes Komplexstrahles und einer Fläche φ_n des Flächenbüschels $\{\varphi\}$ eine involutorische Punktreihe auf diesem Strahle bestimmt ist, deren Zentralpunkte und die ihnen konjugiert unendlich fern zugeordnete Punkte S, S_n sind, kann der Majcensche kubische Strahlenkomplex auch folgendermassen definiert werden:

Der Majcensche kubische Strahlenkomplex wird durch diejenigen Strahlen des Raumes gebildet, die die Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades in symmetrischen involutorischen Punktreihen schneiden.

Da die Punkte S, S_n der Komplexstrahlen, als Doppelpunkte der erwähnten Schnittpunktepaareninvolutions, Berührungspunkte dieser Strahlen mit zwei Flächen des Flächenbüschels $\{\varphi\}$ sind, gilt für den Majcenschen Komplex auch folgende Definition:

Alle Geraden des Raumes, die die Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades unendlich fern berühren, bilden den Majcenschen kubischen Strahlenkomplex.

Auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen gilt auch folgender Satz:

Wird der Majcensche kubische Strahlenkomplex durch die Inzidenzflächen φ_1, φ_2 , zweier polarer Räume bestimmt, so ist dieser Strahlenkomplex durch die polaren Räume je zweier Flächen 2. Grades des durch die Flächen φ_1, φ_2 gebildeten Flächenbüschels $\{\varphi\}$ bestimmt.

Durch jeden Punkt des Raumes, der nicht auf der Grundkurve 4. Ordnung eines Flächenbüschels 2. Grades liegt, ist eine Fläche dieses Büschels bestimmt, die diesen Punkt enthält. Dies gilt selbstverständlich auch für die unendlich fernen Punkte. In jedem Punkte einer Fläche 2. Grades berühren diese Fläche die Geraden eines in der Berührungsebene sich befindenden Strahlenbüschels. Für unendlich ferne Berührungspunkte sind das Büschel paralleler Strahlen. Für den Majcenschen Strahlenkomplex gilt also auch folgender Satz:

Jeder unendlich ferne Punkt des Raumes ist der Scheitel eines Büschels gleichlaufender und in einer Ebene sich befindender Komplexstrahlen des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes.

Dasselbe wird auch durch folgenden Satz ausgesprochen:

Alle gleichlaufenden Strahlen des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes liegen in einer Ebene, und alle Strahlen dieses Komplexes sind in ∞^2 derartigen Ebenen angeordnet.

Diesen letzten Satz erhielt auch Majcen in seiner erwähnten Arbeit, aber auf eine ganz andere Art, die in dieser Arbeit in späteren Ausführungen in Betracht gezogen wird.

II. ÜBER EINEN MAJCENSCHEN SATZ,
DER VON SEINEM STRAHLENKOMPLEX HANDELT

In Majcens erwähnter Arbeit ist sein Strahlenkomplex immer durch zwei Flächen 2. Grades φ_1, φ_2 bestimmt, die als Inzidenzflächen zweier polarer Räume betrachtet werden. Man weiss, dass die Polarebenenpaare zweier polarer Räume bezüglich aller Raumpunkte sich in Geraden schneiden, die Strahlen eines Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes sind. Das Haupttetraeder dieses Komplexes ist, wie bekannt, das gemeinsame Polartetraeder der Flächen φ_1, φ_2 . Die den Punkten einer Ebene auf diese Weise zugeordneten Strahlen dieses tetraedralen Strahlenkomplexes bilden, wie bekannt, eine Strahlenkongruenz I. Ordnung 3. Klasse. Diese Kongruenz ist die Bisekantenkongruenz der Raumkurve 3. Ordnung, die durch die Pole der erwähnten Ebene bezüglich aller Flächen 2. Grades des durch die Flächen φ_1, φ_2 bestimmten Flächenbüschels $\{\varphi\}$ gebildet wird. Den Punkten der unendlich fernen Ebene des Raumes ist auf diese Weise die Bisekantenkongruenz der die Mittelpunkte aller Flächen des Büschels $\{\varphi\}$ enthaltenden Raumkurve 3. Ordnung eineindeutig zugeordnet. In seiner bekannten Arbeit brachte Majcen über seinen kubischen Strahlenkomplex, den er Strahlenkomplex K der Flächen φ_1, φ_2 nannte, folgenden Satz: Der kubische Strahlenkomplex K ist mit jener der unendlichfernen Ebene zugeordneten Strahlenkongruenz 1. Ordnung 3. Klasse des durch die Polarsysteme $[\varphi_1], [\varphi_2]$ der Flächen φ_1, φ_2 entstandenen tetraedralen Strahlenkomplexes inzident.

Durch diesen Satz behauptet also Majcen, dass sich in dem durch die Flächen φ_1, φ_2 bestimmten Majcenschen kubischen Strahlenkomplex die Bisekantenkongruenz der Raumkurve 3. Ordnung befindet, welche die Mittelpunkte der Flächen des durch die Flächen φ_1, φ_2 bestimmten Flächenbüschels enthält. Dies stimmt aber nicht! Vielleicht wollte Majcen dem Worte »Inzidenz« einen anderen Sinn geben, aber das ist nicht allzu wahrscheinlich, wie wir etwas später sehen werden.)

Majcen wählt einen unendlich fernen Punkt und die diesem Punkte polarzugeordneten Ebenen α_1, α_2 (Diametralebenen) bezüglich der Flächen φ_1, φ_2 . Jede diesen unendlich fernen Punkt enthaltende Gerade schneidet die Flächen φ_1, φ_2 in Punktpaaren, durch die Strecken begrenzt sind, die durch ihre Schnittpunkte mit der Ebene α_1 , bzw. α_2 , gehälftet sind. Alle diejenigen Geraden dieses unendlich fernen Punktes,

die die Schnittgerade a der Ebenen α_1, α_2 schneiden, sind Strahlen des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes, da der Schnittpunkt dieser Geraden und der Schnittgeraden a der gemeinsame Mittelpunkt der durch die Flächen φ_1, φ_2 auf diesen Geraden ausgeschnittenen Strecken ist. Dass derartige Gerade Strahlen des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes sind, hat Majcen schon am Anfange seiner erwähnten Arbeit bemerkt. Es wurde schon erwähnt, dass die den unendlich fernen Punkten zugeordnete Geraden a eine Strahlenkongruenz 1. Ordnung 3. Klasse bilden, die durch die Bisekanten der Raumkurve 3. Ordnung der Mittelpunkte der Flächen des Flächenbüschels $[\varphi]$ gebildet wird. Jeder Strahl a dieser Kongruenz enthält eine Ebene β , in der ein Büschel gleichlaufender Strahlen des Majcenschen Strahlenkomplexes liegt, deren Mittelpunkte sich auf der Geraden a befinden. Da jeder Punkt der Geraden a Mittelpunkt eines Komplexstrahles in der Ebene β ist, kann die Gerade a kein Komplexstrahl sein, da im gegenteiligen Fall ein Punkt der Geraden a Mittelpunkt zweier nicht zusammenfallenden Komplexstrahlen wäre, was unmöglich ist. In seiner Arbeit hat Majcen bewiesen, dass jeder Punkt der Mittelpunkt nur eines Strahles seines kubischen Strahlenkomplexes sein kann. Es folgt also, dass die zitierte Majcensche Behauptung nicht stimmt, wenn die Deutung des Wortes »Inzidenz« im gewöhnlichem Sinn angenommen wird. Wenn Majcen mit dem Worte Inzidenz vielleicht die Tatsache aussagen wollte, dass alle Punkte der Geraden a Mittelpunkte der Komplexstrahlen sind, hat dies auch keinen besonderen Sinn, da in diesem Falle alle möglichen Strahlenkongruenzen sich in dem Majcenschen Strahlenkomplexe befinden müssten. Man könnte das Ergebnis der um diesen Satz ausgeführten Betrachtungen in folgender Weise erklären:

Wird ein Majcenscher kubischer Strahlenkomplex durch einen Flächenbüschel $\{\varphi\}$ 2. Grades gegeben, dann enthält jeder Strahl der Kongruenz der Bisekanten der die Mittelpunkte der Flächen des Büschels enthaltenden Raumkurve eine Ebene, die einen Büschel paralleler Komplexstrahlen enthält.

Auch Majcen hat schon bemerkt, dass alle Strahlen seines kubischen Komplexes sich in ∞^2 Büscheln gleichlaufender Strahlen befinden, aber er zog keine weiteren Konsequenzen heraus.

III. WEITERE EIGENSCHAFTEN DES MAJCENSCHEN KUBISCHEN STRAHLENKOMPLEXES

Aus unseren bisherigen Betrachtungen folgt klar, dass die Punkte der unendlich fernen Ebene eineindeutig den Strahlen der betrachteten Strahlenkongruenz 1. Ordnung 3. Klasse zugeordnet sind. Die einer unendlich fernen Geraden k^n bezüglich der Flächen φ_1, φ_2 konjugiert zugeordneten Geraden k^1, k^2 (Durchmesser) enthalten, wie bekannt, die Mittelpunkte dieser Flächen. Die den Punkten der Geraden k^n bezüglich der Fläche φ_1 polar zugeordnete Ebenen bilden den der Punktreihe (k^n) projektiv zugeordneten Ebenenbüschel $[k^1]$ der Geraden k^1 , und die bezüglich der Fläche φ_2 polar zugeordneten Ebenen bilden den dieser Punktreihe (k^n) projektiv zugeordneten Ebenenbüschel $[k^2]$ der Geraden k^2 . Da wegen $[k^1] \bar{\wedge} (k^n)$ und $[k^2] \bar{\wedge} (k^n)$ auch $[k^1] \bar{\wedge} [k^2]$ gilt, und das Erzeugnis der Ebenenbüschel $[k^1] \bar{\wedge} [k^2]$ ein System der Erzeugenden einer Regelfläche 2. Grades ist, sehen wir, dass die den Punkten der unendlich fernen Geraden k^n auf die beschriebene Weise zugeordneten Geraden a ein System der Erzeugenden einer Regelfläche 2. Grades bilden. Die Ebenen β^n die durch die Punkte der Punktreihe k^n und die deren Punkten zugeordneten Geraden a bestimmt sind, bilden also ein kubisches Ebenengewinde. Da die Punkte jeder Geraden a Mittelpunkte der parallelliegenden Komplexstrahlen in der dieser Geraden a zugeordneten Ebene β sind, und jeder Punkt der unendlich fernen Geraden k^n Scheitel eines derartigen Komplexstrahlenbüschels parallel liegender Strahlen ist, gilt auch folgender Satz:

Die Mittelpunkte der mit einer Ebene im Raum parallel liegenden Strahlen des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes bilden eine Regelfläche 2. Grades.

Durch jede Ebene des Raumes ist ihre unendlich ferne Gerade bestimmt. Auf Grund dieser letzten Eigenschaft des Majcenschen Strahlenkomplexes kann eine weitere Eigenschaft dieses Strahlenkomplexes abgeleitet werden. Da Majcens Strahlenkomplex kubisch ist, bilden die einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Komplexes einen Kegel 3. Ordnung, und alle in einer Ebene liegenden Komplexstrahlen hüllen eine Kurve 3. Klasse um. Die Mittelpunkte der Strahlen des erwähnten Kegels 3. Ordnung bilden die von Majcen entdeckte Raumkurve 4. Ordnung. Und was bilden nun die Mittelpunkte der in einer Ebene sich befindenden Komplexstrahlen?

Durch jede Ebene ϱ des Raumes ist eine unendlich ferne Gerade bestimmt, die von allen Geraden dieser Ebene, also auch von den in dieser Ebene liegenden Komplexstrahlen geschnitten wird. Etwas weiter oben fanden wir, dass die Mittelpunkte aller eine unendlich ferne Gerade schneidenden Komplexstrahlen, eine Regelfläche 2. Grades bilden. Also die Mittelpunkte aller mit der Ebene ϱ parallelen und in der Ebene ϱ liegenden Komplexstrahlen bilden auch eine Regelfläche 2. Grades. Die Mittelpunkte der in der Ebene ϱ liegenden Komplexstrahlen bilden daher die Schnittkurve dieser Regelfläche 2. Grades und der Ebene ϱ . Man erhält also folgenden Satz:

Die Mittelpunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes, die eine Kurve 3. Klasse umhüllen, bilden eine Kurve 2. Grades.

In unseren weiteren Betrachtungen wollen wir folgende Aufgabe lösen: Was für ein geometrisches Gebilde wird durch die Mittelpunkte der eine beliebige Gerade p schneidenden Strahlen des Majcenschen Strahlenkomplexes gebildet?

Durch alle Komplexstrahlen, deren Mittelpunkte auf der Geraden p liegen, wird nach Majcen eine Regelfläche 3. Grades gebildet, für die diese Gerade p offensichtlich die einfache Leitgerade sein kann. Der letztangeführte Satz kann sehr leicht auch mittels dieser Eigenschaft des Majcenschen Strahlenkomplexes bewiesen werden. Die jeden Punkt der Geraden p enthaltende Komplexstrahlen bilden, wie bekannt, einen Kegel 3. Grades, und die Mittelpunkte seiner Erzeugenden bilden eine Raumkurve 4. Ordnung. Der von uns betrachtete geometrische Ort wird also durch die auf diese Weise den Punkten der Geraden p zugeordneten Raumkurve 4. Ordnung gebildet, die stetig angeordnet auf einer Fläche liegen und diese Fläche bilden. Die Gerade p ist eine gewöhnliche Gerade dieser Fläche, da jeder Punkt dieser Geraden der Mittelpunkt nur eines Komplexstrahles ist. In jeder Ebene der Geraden p hüllen die Komplexstrahlen, wie bekannt, eine Kurve 3. Klasse ein, deren Mittelpunkte sich auf einer Kurve 2. Grades befinden. Diese Fläche muss also offenbar dritter Ordnung sein. Dass dies tatsächlich der Fall ist, kann auf folgende Weise bewiesen werden: Wir sahen, dass jedem unendlich fernen Punkte auf die beschriebene Weise ein Strahl a der Strahlenkongruenz der Bisekanten jener Raumkurve 3. Ordnung zugeordnet ist, die durch die Mittelpunkte der Flächen des durch die Inzidenzflächen φ_1, φ_2 des Majcenschen Strahlenkomplexes bestimmten

Flächenbüschel $\{\varphi\}$ 2. Grades gebildet wird. Auf der Geraden a befinden sich, wie bekannt, die Mittelpunkte jener Komplexstrahlen des Majcenschen Komplexes, die den dieser Geraden a zugeordneten unendlich fernen Punkt enthalten. Ferner sahen wir, dass die den Punkten einer unendlich fernen Geraden zugeordneten Geraden a ein System der Erzeugenden einer Regelfläche π 2. Grades bilden. Jede Ebene dieser unendlich fernen Geraden schneidet die Fläche π in einer Kurve 2. Grades, die durch die Mittelpunkte der in dieser Ebene sich befindenden Komplexstrahlen gebildet wird. Jeder Ebene der Geraden p , bzw. der unendlich fernen Geraden dieser Ebene, ist also auf die beschriebene Weise eine Regelfläche 2. Grades zugeordnet, die die bekannte Raumkurve 3. Ordnung der Mittelpunkte der Flächen des Flächenbüschels $\{\varphi\}$ enthält. Ausser dieser Raumkurve enthält jede dieser den Ebenen der Geraden p zugeordnete Regelfläche auch die dem unendlich fernen Punkte der Geraden p zugeordnete Gerade a , da alle Ebenen der Geraden p ihren unendlich fernen Punkt enthalten. Alle diese den Ebenen des Ebenenbüschels $[p]$ zugeordneten Regelflächen 2. Grades π_n bilden also einen Flächenbüschel $[\pi]$ 2. Grades, deren Grundkurve in die erwähnte Raumkurve 3. Ordnung und die erwähnte Gerade a zerfällt. Aus den Eigenschaften der polaren Verhältnisse folgt, dass der Flächenbüschel $[\pi]$ und der Ebenenbüschel $[p]$ projektiv zugeordnet sind. Da jede Ebene des Ebenenbüschels $[p]$ die ihr zugeordnete Fläche des Flächenbüschels $[\pi]$ in der Kurve der Mittelpunkte der in dieser Ebene liegenden Komplexstrahlen schneidet, folgt, dass unsere betrachtete Fläche das Erzeugnis dieser zwei projektiv zugeordneten Büschel ist. Wie bekannt, ist dies die bekannte Steinersche Erzeugungsart der Flächen 3. Ordnung, und es gilt also auch folgender Satz:

Die Mittelpunkte der Strahlen des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes, die eine beliebige Gerade schneiden und eine Strahlenkongruenz 3. Ordnung und 3. Klasse bilden, liegen auf einer Fläche 3. Ordnung, die durch diese Komplexstrahlenmittelpunkte gebildet ist.

Es ist offensichtlich, dass diese Fläche die Gerade p , wie auch die dem unendlich fernen Punkte dieser Geraden zugeordnete Gerade a (linearer Teil der Grundkurve des Büschels $[\pi]$) enthält.

Nimmt man die Gerade p als Strahl des gegebenen Majcenschen Strahlenkomplexes an, so werden alle betrachteten Schnittkurven 2. Grades der Ebenen des Büschels $[p]$ und der ihnen zugeordneten Flächen des Flächenbüschels den Mittelpunkt des Komplexstrahles p ent-

halten. Man sieht also, dass die betrachtete Fläche 3. Ordnung in dem Mittelpunkte des Komplexstrahles p einen Doppelpunkt erhält. Der Majcensche Strahlenkomplex hat also die folgende Eigenschaft:

Die Mittelpunkte derjenigen Strahlen des Majcenschen Strahlenkomplexes, die einen Strahl s dieses Komplexes schneiden, bilden eine Fläche 3. Ordnung, die in dem Mittelpunkt des Komplexstrahles s einen Doppelpunkt hat.

Es ist klar, dass dieser Doppelpunkt der Kuspidualpunkt der Cayleyschen Regelfläche 3. Grades ist, die durch die Komplexstrahlen gebildet wird, deren Mittelpunkte sich auf dem Komplexstrahl s befinden.

IV. SINGULÄRE EBENEN DES MAJCENSCHEN STRAHLENKOMPLEXES

Am Ende der besprochenen Arbeit betrachtete Majcen die Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_1 , φ_2 und die Scheitel des gemeinsamen Polartetraeders dieser Flächen als 6 singuläre Punkte des Majcenschen Strahlenkomplexes. Ferner betrachtete er die singulären Ebenen dieses Komplexes. Als singuläre Ebenen des Majcenschen Strahlenkomplexes bezeichnete Majcen diejenigen Ebenen des Raumes, in denen die Komplexkurve 3. Klasse der Komplexstrahlen in einen Geradenbüschel erster Klasse und einen Geradenbüschel zweiter Klasse, oder drei Geradenbüschel erster Klasse zerfällt. Durch seine Untersuchungen fand Majcen, dass der durch die Inzidenzflächen 2. Grades φ_1 , φ_2 bestimmte kubische Strahlenkomplex $6 \infty^1$ derartiger singulärer Ebenen enthält. Dieser richtig bewiesene Satz ist aber nicht ganz vollständig, da es noch weitere singuläre Ebenen in diesem Strahlenkomplexe gibt, die Majcens Aufmerksamkeit entgangen sind.

Alle einen unendlich fernen Punkt enthaltende Komplexstrahlen liegen, wie wir sahen, in einer Ebene β , welche die dem unendlich fernen Punkte zugeordnete Gerade a enthält. Wie bekannt, fand Majcen, dass alle Strahlen seines Komplexes, deren Mittelpunkte auf einem Komplexstrahl s liegen, eine Cayleysche Fläche 3. Grades bilden, zu welcher der Komplexstrahl s als Doppelgerade und Torsalgerade gehört. Jede Ebene des Strahles s schneidet diese Cayleysche Fläche noch in einer Geraden, die auch Komplexstrahl mit dem Mittelpunkte S auf dem Strahle s ist.

Dies gilt selbstverständlich für alle parallelliegenden Komplexstrahlen in der Ebene β . Jeden dieser gleichlaufenden Komplexstrahlen in der Ebene β schneidet also noch ein Komplexstrahl l in dieser Ebene, der auf dem betreffenden gleichlaufendem Strahle seinen Mittelpunkt hat. Wir sehen also, dass in der Ebene β weitere ∞^1 Komplexstrahlen liegen, die untereinander nicht parallel sind. Da die in einer Ebene liegende Strahlen des Majcenschen Strahlenkomplexes eine Kurve 3. Klasse umhüllen, die in einen Geradenbüschel und eine Kurve 2. Klasse zerfallen kann, und das geschieht in jeder der ∞^2 von uns beschriebenen Ebenen β , so gilt für den Majcenschen kubischen Strahlenkomplex auch dieser Satz:

Ausser den 6 ∞^1 singulären Ebenen, die Majcen in seinem Strahlenkomplex betrachtet hat, gibt es in diesem Strahlenkomplex noch weitere ∞^2 singuläre Ebenen, in denen die Komplexkurven 3. Klasse der Komplexstrahlen in einen Büschel gleichlaufender Strahlen und eine Kurve 2. Klasse zerfällt.

Da die Mittelpunkte der Strahlen des betrachteten Strahlenkomplexes in einer Ebene, wie bekannt, eine Kurve 2. Grades bilden, zerfällt diese Kurve in allen singulären β -Ebenen in die diesen Ebenen angehörige Gerade a , und noch eine Gerade m , die alle Mittelpunkte S der besprochenen Strahlen l in der Ebene β enthält. Dass alle Mittelpunkte S_n derartiger Strahlen l_n in jeder Ebene β auf einer Geraden m liegen, kann folgendermassen bewiesen werden: Durch jede Ebene β ist eine unendlich ferne Gerade bestimmt. Den Punkten dieser Geraden ist ein Erzeugendensystem a einer Regelfläche π 2. Grades zugeordnet, deren Punkte Mittelpunkte aller mit der Ebene β im Raum parallel liegenden Komplexstrahlen sind. Die Mittelpunkte der in allen mit der Ebene β parallelen Ebenen sich befindenden Komplexstrahlen bilden also die Schnittkurve dieser parallelen Ebenen und der Regelfläche π 2. Grades. Dies gilt selbstverständlich auch für die Ebene β . Da diese Ebene β schon die ihr zugeordnete Erzeugende a der Fläche π enthält, schneidet sie diese Fläche noch in einer weiteren Geraden m , deren Punkte auch Mittelpunkte der in der Ebene β liegenden Komplexstrahlen sind, da die vorher besprochene Kurve 2. Grades der Mittelpunkte aller in jeder Ebene liegenden Komplexstrahlen in den Ebenen β in die Gerade a , und nur noch in eine Gerade (m) zerfallen kann.

Da die singulären β -Ebenen des Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes durch die Punkte des unendlich fernen Punktfeldes und durch

die diesen Punkten zugeordneten Geraden a_n bestimmt sind, wobei die Geraden a_n Bisekanten der bekannten Mittelpunktraumkurve 3. Ordnung der Flächen 2. Grades des Büschels $\{\varphi\}$ sind, bilden die β -Ebenen im Raum eine quadratische stetige Ebenenmenge, durch die eine Fläche eingehüllt ist. Diese Fläche wollen wir aber in dieser Arbeit nicht betrachten.

*Lehrstuhl für darstellende Geometrie
Fakultät für Architektur, Bauwesen und Geodäsie
der Universität in Zagreb*

Angenommen zur Veröffentlichung 6. XI. 1961. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

VILIM NIČE

DOPUNSKI PRILOZI MAJCENOVOM KUBIČNOM KOMPLEKSU

UVOD. Zadamo li dvjema plohama 2. stupnja, kao incidentnim plohama, dva polarna prostora, bit će na svakom pravcu prostora određen po jedan involutoran niz parova konjugiranih točaka svakog ovog polarnog prostora. Poznato je da svaka dva kolokalna involutorna niza, ako je bar jedan od njih eliptičan, imaju uvijek jedan par realnih zajedničkih pridruženih točaka. Ako su oba involutorna niza hiperbolička, može takav zajednički par pridruženih točaka biti ili realan ili imaginaran. Svi pravci prostora na kojima je jedna točka od takvog zajedničkog para pridruženih točaka na tom pravcu neizmjereno daleko čine pravčasti kompleks, koji je prvi razmatrao Jůraj Majcen, pa ćemo ga zato prozvati Majcenovim kompleksom. Onu zajedničku centralnu točku spomenutih dvaju kolokalnih involutornih nizova zvat ćemo *središnjom točkom* kompleksnih zraka. U svojoj radnji »O jednoj posebnoj vrsti kubičnog kompleksa« (Rad Jug. akad., knj. 155, str. 159-170) odredio je Majcen stupanj tri tome kompleksu. Očito je da svaka zraka Majcenova kompleksa ima samo jednu središnju točku. U spomenutoj radnji izveo je Majcen još i ove osobine svog kubičnog kompleksa:

- a) Svaka točka prostora središnja je točka samo jedne zrake Majcenova kompleksa.
- b) Središnje točke zraka Majcenova kompleksa koje prolaze jednom točkom prostora (čine stožac 3. reda) čine prostornu krivulju 4. reda.
- c) Svakom točkom prostora prolazi samo jedna ravnina kojoj krivulja 3. razreda koju omataju zrake Majcenova kompleksa u toj ravnini (kompleksna krivulja) prolazi tom točkom.

d) One zrake Majcenova kompleksa koje diraju jednu ili drugu incidentnu plohu polarnih prostora tog kompleksa, čine kongruenciju 12. reda i 8. razreda.

e) Sve zrake Majcenova kompleksa kojima središnje točke leže na jednom pravcu koji nije zraka tog kompleksa čine pravčastu plohu 3. stupnja.

f) Sve zrake Majcenova kompleksa, kojima središnje točke leže na jednoj zraci tog kompleksa čine Cayleyevu pravčastu plohu 3. stupnja.

g) Sve zrake Majcenova kompleksa kojima središnje točke leže na pravcu jednog ili drugog središta incidentnih ploha polarnih prostora tog kompleksa čine hiperbolički paraboloid.

h) Zrake Majcenova kompleksa kojima središnje točke leže u jednoj ravnini čine kongruenciju 4. reda i 4. razreda.

Osim ovih osobina istražio je Majcen i neke singularne osobine tog kompleksa na koje ćemo se kasnije osvrnuti. Budući da ovaj kompleks osim nabrojenih ima još čitav niz osobina koje Majcen nije obuhvatio u svom radu, zabavit ćemo se mi njima u ovom radu.

I. NEKE DRUGE DEFINICIJE MAJCENOVA KOMPLEKSA

U malo prije spomenutom radu spominje Majcen da one dvije dužine na svakoj zraci njegovog kompleksa koje na njima određuju incidentne plohe zadanih dvaju polarnih prostora, nazovimo ih φ_1 , φ_2 , imaju zajedničku središnju točku. Ovo je očito, budući da samo u ovakvom slučaju oba opisana involutorna niza na tim zrakama mogu imati takav zajednički par pridruženih točaka kojemu je jedna točka tog para u neizmjernosti. Plohama φ_1 , φ_2 određen je pramen $\{\varphi\}$ ploha 2. stupnja, odnosno pramen njihovih polarnih prostora. Svaki pravac prostora, pa prema tome i zrake Majcenova kompleksa, sijeku plohe tog pramena u involutornom nizu u čijim dvostrukim točkama takav pravac dira dvije plohe tog pramena. Središnju i neizmjereno daleku točku svake zrake Majcenova kompleksa označimo sa S i S_n . Lako se može dokazati da su točke S , S_n svake zrake Majcenova kompleksa dvostruke točke onog involutornog niza koji nastaje presjekom te zrake s plohama pramena ploha $\{\varphi\}$, određenog incidentnim plohama φ_1 , φ_2 . Nazovemo li ovakav involutorni niz simetričnim involutornim nizom, možemo Majcenov kubični kompleks definirati i ovako:

Majcenov kubični kompleks sastoji se od onog skupa pravaca u prostoru koji neki pramen ploha 2. stupnja sijeku u simetričnim involutornim nizovima.

Iz ove definicije izlazi i ova osobina Majcenova kompleksa:

Zadamo li Majcenov kompleks dvjema plohama 2. stupnja kao incidentnim plohama dvaju polarnih prostora, onda je taj isti kompleks određen s bilo kojim dvjema plohama 2. stupnja, odnosno njihovim polarnim prostorima, u pramenu takvih ploha koji je određen tim dvjema incidentnim plohama zadanih polarnih prostora.

Znamo da su dvostruke točke involutornog niza parova probodišta nekog pravca s plohama 2. stupnja u pramenu takvih ploha, dirališta tog pravca s dvjema plohama tog pramena. Budući da je na svakoj zruci Majcenova kompleksa jedna od tih dvostrukih točaka neizmjereno daleko, može se on definirati i ovako:

Majcenov kompleks sačinjava onaj skup pravaca u prostoru koji neizmjereno daleko diraju plohe 2. stupnja u nekom pramenu takvih ploha.

Znamo da svakom točkom prostora, pa i neizmjereno dalekima, prolazi po jedna ploha 2. stupnja u nekom pramenu takvih ploha, ako ta točka nije na temeljnoj krivulji tog pramena. U svakoj točki plohe 2. stupnja dira ju pramen tangenata u dirnoj ravnini s vrhom u diralištu. Iz posljednje definicije izlazi dakle i ova osobina Majcenova kompleksa:

Svakom neizmjereno dalekom točkom prostora prolazi pramen usporednih zraka Majcenova kubičnog kompleksa koje su u jednoj ravnini.

Ovu osobinu svog kompleksa otkrio je i Majcen u svojoj radnji, ali posve na drugi način. Na taj ćemo se način osvrnuti malo kasnije.

II. O JEDNOM MAJCENOVU STAVKU U VEZI S NJEGOVIH KOMPLEKSOM

Kao što smo spomenuli, zadaje Majcen svoj kompleks incidentnim plohama φ_1, φ_2 2. stupnja dvaju polarnih prostora. Poznato je da se polarne ravnine svih točaka prostora kao polova s obzirom na plohe φ_1, φ_2 sijeku u pravcima koji su zrake Reyeovog tetraedrnog kompleksa. Glavni tetraedar tog kompleksa je poznati zajednički polarni tetraedar ploha φ_1, φ_2 . Točkama neke ravnine na taj način pridružene zrake ovog tetraedrnog kompleksa čine, kao što je poznato, kongruenciju 1. reda 3. razreda bisekanata jedne prostorne krivulje 3. reda. Ova je krivulja sastavljena od toj ravnini pridruženih polova obzirom

na sve plohe 2. stupnja u pramenu takvih ploha određenom plohama φ_1, φ_2 . Neizmjereno dalekoj ravnini pridružena je na taj način krivulja središta svih ploha u tom pramenu, a svakoj točki te neizmjereno daleke ravnine pridružena je jedna bisekanta te prostorne krivulje 3. reda spomenutih središta. U spomenutoj radnji iznosi Majcen i ovu osobinu svog kompleksa, koji on naziva kompleksom K ploha φ_1, φ_2 : Kubični kompleks K incidentan je s onom kongruencijom 1. reda 3. razreda tetraedralnog kompleksa s obzirom na polarne sisteme $[\varphi_1], [\varphi_2]$, koja odgovara neizmjereno dalekoj ravnini. \square

Iz ovog Majcenova stavka izlazi prema tome da se kongruencija bisekanata prostorne krivulje 3. reda svih središta ploha 2. stupnja u pramenu takvih ploha određenom plohama φ_1, φ_2 nalazi u Majcenovu kubičnom kompleksu, koji je određen polarnim prostorima ploha φ_1, φ_2 . To međutim nije istina. Majcen uzima jednu neizmjereno daleku točku i toj točki pridružene polarne (dijametralne) ravnine α_1, α_2 ploha φ_1, φ_2 . Svaki pravac prostora koji prolazi tom neizmjereno dalekom točkom (snop usporednih pravaca) siječe plohe φ_1 i φ_2 u paru točaka kojih razmak će raspolavljati probodište tih pravaca s ravninom α_1 , odnosno α_2 . Svi pravci ovog snopa usporednih pravaca koji sijeku presječnicu a dijametralnih ravnina α_1, α_2 , dakle leže u jednoj ravnini β , bit će zrake Majcenova kompleksa, budući da će njihovo sjecište s pravcem a biti zajedničko polovište dužina omeđenih probodištima tih zraka s plohama φ_1, φ_2 . Znamo već da svi pravci a čine kongruenciju bisekanata prostorne krivulje središta ploha u gore spomenutom pramenu $\{\varphi\}$ takvih ploha. Svakom zrakom a te kongruencije prolazi dakle jedna ravnina β u kojoj se nalazi pramen usporednih zraka Majcenova kompleksa kojima središnje točke leže na zraci a te ravnine. Budući da svakom točkom pravca a prolazi jedna zraka tog kompleksa u pripadnoj ravnini β , ne može ta zraka a biti zraka Majcenova kompleksa, jer kad bi ona to bila, njena bi središnja točka bila središnja točka dviju zraka Majcenova kompleksa, što nije moguće. Da to nije moguće dokazao je Majcen sasvim ispravno u svojoj sprijeda spomenutoj radnji. Rezultat Majcenovih razmatranja u tom smislu mogao bi se izreći ovako:

Zadamo li Majcenov kubični kompleks polarnim prostorima dvaju ploha 2. stupnja kojima je određen jedan pramen takvih ploha, onda svakom zrakom kongruencije bisekanata prostorne krivulje 3. reda koja se sastoji iz središta ploha tog pramena prolazi jedna ravnina u kojoj se nalazi pramen usporednih zraka tog kompleksa.

III. NEKE DALJE OSOBINE MAJCENOVA KOMPLEKSA

Između zraka malo prije opisane kongruencije 1. reda 3. razreda i točaka neizmjereno daleke ravnine, uspostavljena je, kao što smo vidjeli, jednojednoznačna pridruženost. Točkama nekog neizmjereno dalekog pravca bit će na taj način pridružene izvodnice jednog sistema jedne pravčaste plohe 2. stupnja, unutar spomenute kongruencije. Neizmjereno daleki pravac određen je u konačnosti jednom ravninom, a svaki usporedan pravac s tom ravninom siječe taj njen pravac. Na temelju svega toga izlazi za Majcenov kubični kompleks i ovaj stavak:

Središnje točke zraka Majcenova kubičnog kompleksa koje su usporedne s jednom ravninom leže na jednoj pravčastoj plohi 2. stupnja.

Na temelju ovoga stavka vrlo se lako dolazi i do slijedećeg:

Središnje točke zraka Majcenova kubičnog kompleksa koje leže u jednoj ravnini i omataju krivulju 3. razreda leže na jednoj krivulji 2. stupnja.

Pramen ravnina nekog pravca p siječe neizmjereno daleku ravninu u pramenu neizmjereno dalekih pravaca kojemu je vrh u neizmjereno dalekoj točki tog pravca. Pravcima tog neizmjereno dalekog pramena pravaca pridružene pravčaste plohe 2. stupnja na malo prije spomenuti način čine pramen takvih ploha kojemu se temeljna krivulja 4. reda raspala u prostornu krivulju 3. reda središta ploha 2. stupnja u sprijeda spomenutom pramenu takvih ploha, kao i onaj pravac a koji je pridružen neizmjereno dalekoj točki pravca p . Središnje točke kompleksnih zraka u ravninama pravca p leže, kao što smo vidjeli, na krivulji 2. stupnja koja je presijek te ravnine s njoj pridruženom plohom u pramenu ploha 2. stupnja one raspadnute temeljne krivulje 4. reda. Lako se može dokazati da su pramen ravnina $[p]$ i pramen tih ploha 2. stupnja projektivno pridruženi. Proizvod njihov je opća ploha 3. reda, kao što je to J. Steiner našao. Na temelju toga dobivamo za Majcenov kompleks i ovaj stavak:

Središnje točke zraka Majcenova kubičnog kompleksa koje sijeku neki pravac (kongruencija 3. reda i 3. razreda) čine opću plohu 3. reda.

Uzmemo li u obzir činjenicu da sve zrake Majcenova kompleksa kojima središnje točke leže na jednoj zruci tog kompleksa čine Cayleyevu pravčastu plohu 3. stupnja, lako se može izvesti i ovaj stavak:

Središnje točke zraka Majcenova kubičnog kompleksa koje sijeku jednu zraku tog kompleksa čine plohu 3. reda koja u središnjoj točki te zrake ima dvostruku točku.

Očito je da je ta zraka kubičnog kompleksa dvostruki i torzalan pravac spomenute Cayleyeve plohe, a dvostruka točka spomenute plohe 3. reda je kuspidalna točka te pravčaste plohe.

IV. O SINGULARNIM RAVNINAMA MAJCENOVA KOMPLEKSA

Osim singularnih točaka svoga kompleksa, a to su središta incidentnih ploha polarnih prostora tog kompleksa i vrhovi zajedničkog polarnog tetraedra tih ploha, promatrao je Majcen i singularne ravnine tog kompleksa. Pod singularnim ravninama svog kompleksa razumijeva Majcen one ravnine prostora u kojima se kompleksna krivulja zraka tog kompleksa, koja je 3. razreda, raspada u krivulju 2. razreda i jedan pramen zraka, ili u tri pramena zraka. Na temelju svojih razmatranja koja su potpuno u redu dobiva Majcen u svom kompleksu $6 \infty^1$ takvih singularnih ravnina. Ovo međutim nije posve ispravna tvrdnja, jer osim ovih singularnih ravnina ima još i drugih koje su izmakle Majcenovoj pažnji, ma da ih je u svojoj radnji zapazio, ali ne kao singularne. Naći ćemo ih ovako: Vidjeli smo da je svakoj neizmjereno dalekoj točki pridružen neki pravac a (bisekanta kongruencije 1. reda 3. razreda) na kojemu se nalaze središnje točke svih onih zraka Majcenova kompleksa koje prolaze tom neizmjereno dalekom točkom. Sve takve usporedne zrake kompleksa jedne neizmjereno daleke točke nalaze se u poznatoj ravnini β , koja je određena tom neizmjereno dalekom točkom i pripadnim pravcem a . Služeći se poznatom činjenicom da sve zrake Majcenova kompleksa kojima središnja točka leži na jednoj zraci tog kompleksa čine Cayleyevu pravčastu plohu 3. stupnja, kojoj je ta zraka dvostruki i torzalan pravac, lako se može vidjeti da u svakoj takvoj ravnini β osim usporednih kompleksnih zraka postoji još ∞^1 zraka kompleksa koje moraju omatati krivulju 2. razreda. Svaku usporednu zraku u takvoj ravnini siječe prema tome još jedna zraka u toj ravnini kojoj je središnja točka na toj usporednoj zraci. Vidimo dakle da su sve ravnine β singularne ravnine Majcenova kompleksa, a ima ih toliko koliko i neizmjereno dalekih točaka prostora. Za Majcenov kompleks vrijedi dakle i ovaj stavak:

Osim skupa od $6 \infty^1$ singularnih ravnina, koje je Majcen otkrio u svom kompleksu, postoji u tom kompleksu još jedan skup od ∞^2 singularnih ravnina u kojima se kompleksna krivulja 3. razreda raspada u pramen usporednih zraka i krivulju 2. razreda.

Krivulja 2. stupnja središnjih točaka kompleksnih zraka u ravninama β raspada se u toj ravnini pridruženi pravac a i još jedan pravac m . Imamo li neki neizmjereno daleki pravac, onda svim točkama tog pravca pridruženi pravci a čine jedan sistem izvodnica nekog jednoplošnog hiperboloida. Tim točkama i pravcima određene ravnine β sijeku taj hiperboloid u izvodnicama drugog sistema, a to su pravci m u tim ravninama.

Jednojednoznačnom pridruženošću neizmjereno dalekih točaka prostora i zraka a opisane kongruencije bisekanata prostorne krivulje 3. reda određen je neprekinuti smještaj svih ∞^2 ravnina β u prostoru koje prema tome omataju nekakovu plohu. Razmatranjem ove plohe zabavit ćemo se međutim kojom drugom prilikom.

*Katedra za nacrtnu geometriju
Arhitektonsko-građevinsko-geodetski fakultet
Sveučilišta u Zagrebu*

Primljeno za publikaciju 6. studenog 1961. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.