VILIM NIČE

BEITRÄGE ZUM BÜSCHEL DER REYESCHEN TETRAEDRALEN STRAHLENKOMPLEXE

PRILOZI PRAMENU REYEOVIH TETRAEDRALNIH KOMPLEKSA

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
ZAGREB

Vilim Niče

BEITRÄGE ZUM BÜSCHEL DER REYESCHEN TETRAEDRALEN STRAHLENKOMPLEXE

I. Die Achsenkongruenz der Strahlenzylinder 2. Grades eines tetraedralen Strahlenkomplexes. Der Reyesche tetraedrale Strahlenkomplex ist vom 2. Grade, und alle einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Komplexes bilden daher einen Kegel 2. Grades. Alle diese Kegel enthalten, wie bekannt, die vier Scheitelpunkte des Haupttetraeders dieses tetraedralen Strahlenkomplexes. Die Komplexstrahlen der ∞^2 unendlichfernen Punkte des Raumes bilden ∞^2 Strahlenzylinder 2. Grades dieses tetraedralen Strahlenkomplexes, und jeder dieser Zylinder hat eine Achse im Endlichen und zwei unendlichferne Achsen. Die im Endlichen befindlichen Achsen dieser Zylinder 2. Grades bilden also eine quadratische stetige Strahlenmenge, die unter dem Namen Strahlenkongruenz bekannt ist. Im ersten Teile dieser Arbeit werden wir die Klasse und die Ordnung dieser Achsenkongruenz betrachten und feststellen.

Die Scheitelpunkte des Haupttetraeders eines tetraedralen Strahlenkomplexes seien mit A, B, C, D bezeichnet, die diesen Scheitelpunkten gegenüberliegenden Seitenebenen dieses Tetraeders mit $\alpha = (B\,C\,D)$, $\beta = (A\,C\,D)$, $\gamma = (A\,B\,D)$ und $\delta = (B\,C\,A)$. Die Schnittpunkte jedes Strahles des tetraedralen Strahlenkomplexes mit den Seitenebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$, während wir die Ebenen dieser Strahlen, die die Scheitelpunkte A, B, C, D enthalten, mit $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}$ bezeichnen werden. Es ist bekannt, dass für jeden tetraedralen Strahlenkomplex $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = p$ gilt und dass dieses Doppelverhältnis und sein Wert p als eine charakteristische Konstante dieses tetraedralen Strahlenkomplexes bekannt ist [1]. Unter den vielen bekannten Eigenschaften des tetraedralen Strahlenkomplexes erwähnen wir folgende: Alle einen Punkt einer Seitenebene des Haupttetraeders eines tetraedralen Strahlenkomplexes enthaltenden Strahlen dieses Strahlenkomplexes bilden einen Strahlenbüschel, dessen Ebene den dieser Seitenebene gegenüberliegenden Scheitelpunkt enthält. Der Strahlenkegel 2. Grades eines derartigen Punktes in einer Seitenebene zerfällt in zwei Strahlenbüschel. Einer dieser Strahlenbüschel ist der vorher erwähnte, und der andere liegt in der Seitenebene des Punktes.

Eine Ebene ϱ des Scheitelpunktes A schneide die Seitenebene α in der Geraden r (Abb. 1.), die die Kantengerade BC im Punkt M schnei-

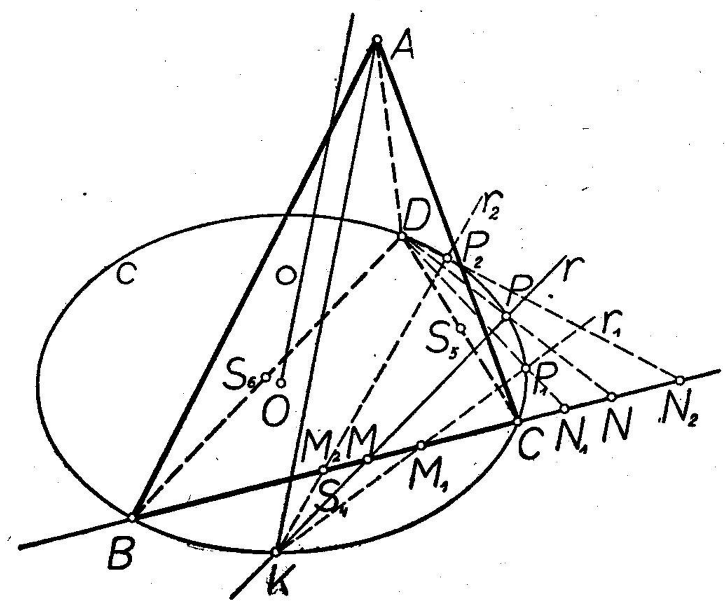

Abb. 1 – Sl. 1

det. Ein Punkt P auf der Geraden r sei der Scheitel des Strahlenbüschels (P) der Komplexstrahlen eines tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $ABCD$, der in der Ebene ϱ liegt. Die Verbindungsgerade DP schneide die Kantengerade BC im Punkt N. Da die die Scheitelpunkte A, B, C, D enthaltenden Ebenen aller Strahlen des Strahlenbüschels (P) in der Ebene ϱ die Kantengerade BC in denselben Punkten M, B, C, N schneiden, ist dieser tetraedrale Strahlenkomplex durch die Ebene ϱ und den Punkt P bestimmt, da das Doppelverhältnis $(MBCN) = p$ und sein Wert p, eine charakteristische Konstante dieses tetraedralen Strahlenkomplexes ist. Mittels des bekannten Satzes von Pappus kann dies auf folgende Weise bewiesen werden: Schneidet man vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer Geraden s mit einer Ebene φ einer Geraden p in vier Geraden a, b, c, d, die die Gerade p in den Punkten A, B, C, D schneiden, so gilt nach dem Satz von Pappus $(A\,B\,C\,D) = (a\,b\,c\,d)$. Man schneide ferner die Ebenen α, β, γ, δ in den Geraden $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ mit einer auf die Gerade s lotrechten Ebene τ, die die Ebene φ in der Geraden t schneidet. Die Gerade t schneide die Geraden a, b, c, d der Ebene φ in den Punkten A_1, B_1, C_1, D_1. Nach dem Satz von Pappus gilt $(A\,B\,C\,D) = (A_1\,B_1\,C_1\,D_1) = (a\,b\,c\,d)$, und $(A_1\,B_1\,C_1\,D_1) = (\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d})$. Es gilt also auch $(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}) = (A\,B\,C\,D) = (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$. In unseren Betrachtungen haben wir anstatt der Punkte A, B, C, D die Punkte M, B, C, N und an Stelle der Geraden s die Strahlen des Strahlenbüschels (P) in der Ebene ϱ.

Die mit den Strahlen des Strahlenbüschels (P) parallel liegenden Strahlenzylinder 2. Grades der Komplexstrahlen des betrachteten tetraedralen Strahlenkomplexes schneiden die Seitenebene α in Kurven 2. Grades, die die Punkte B, C, D und P enthalten. Diese Kurven bilden also einen Kurvenbüschel 2. Grades, der durch die Grundpunkte B, C, D, P bestimmt ist. Die Achsen der erwähnten Strahlenzylinder 2. Grades schneiden die Seitenebene α in den Mittelpunkten dieser Schnittkurven der erwähnten Strahlenzylinder, und wie bekannt, liegen alle derartigen Mittelpunkte auf einer Kurve k 2. Grades [1].

Ist nämlich ein Kurvenbüschel 2. Grades durch vier seiner Grundpunkte bestimmt, so bilden die Mittelpunkte der Kurven dieses Büschels eine Kurve 2. Grades, die die Mittelpunkte der sechs Seiten des Grundpunktvierecks und die drei Schnittpunkte der drei Paare seiner gegenüberliegenden Seitengeraden enthält.

Jede mit der Ebene ϱ im Raum parallel liegende Ebene schneidet diese Mittelpunktkurve 2. Grades in zwei Punkten. In jeder derartigen Ebene befinden sich also die Achsen zweier mit der Ebene ϱ parallelen Strahlenzylinder 2. Grades unseres tetraedralen Strahlenkomplexes. Jeder Ebene ϱ_i des Scheitels A, die die Seitenebene α in der Geraden r_i, und die Kantengerade $B\,C$ im Punkt M_i schneidet, kann durch das Doppelverhältnis $(M_i\,B\,C\,N_i) = p$ (die charakteristische Konstante) der Punkt N_i auf der Geraden $B\,C$ bestimmt werden, und mittels der Verbindungsgeraden $D\,N_i$ kann auch der Punkt P_i der Ebene ϱ_i, als ihr Schnittpunkt auf der Geraden r_i, konstruiert werden. Die Strahlen des

Punktes P_i in jeder derartigen Ebene ϱ_i sind Komplexstrahlen des durch das Doppelverhältnis $(M\,B\,C\,N) = p$ bestimmten tetraedralen Strahlenkomplexes. Was also für die Ebene ϱ des Scheitelpunktes A gültig ist, gilt auch für jede Ebene ϱ_i dieses Scheitels. Da aber jede Ebene des Raumes mit einer Ebene ϱ_i des Scheitels A parallel liegt, sehen wir, dass sich in jeder Ebene des Raumes zwei Achsen der betrachteten Strahlenzylinder 2. Grades des durch die charakteristische Konstante $(M\,B\,C\,N) = p$ bestimmten tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$ befinden. Die Achsenkongruenz der Strahlenzylinder 2. Grades des Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes ist also von der 2. Klasse.

In der Seitenebene α wähle man jetzt ganz beliebig einen Punkt O, welcher der Mittelpunkt einer durch diesen Mittelpunkt und die Punkte B, C, D bestimmten Kurve 2. Grades c sein soll. Auf der Kantengerade $B\,C$ wähle man ferner ein Punktepaar M, N so aus, dass man durch die Punkte M, N die charakteristische Konstante $(M\,B\,C\,N) = p$ unseres tetraedralen Strahlenkomplexes erhält. Die Verbindungsgerade $D\,N$ schneide den Kegelschnitt c im Punkte P, und die Verbindungsgerade $P\,M$ schneide diesen Kegelschnitt im Punkte K (Abb. 1.). Die Strahlen des Strahlenbüschels (P) des Punktes P in der Ebene $A\,P\,K$ sind, wie bekannt, Strahlen des bekannten tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$. Der mit der Geraden $o \parallel A\,K$ parallele Strahlenzylinder 2. Grades des betrachteten tetraedralen Strahlenkomplexes, dem auch die Gerade $A\,K$ als Erzeugende gehört, schneidet die Seitenebene α in einer Kurve 2. Grades, die die Punkte B, C, D, K, P enthält, also mit unserer Kurve c identisch ist. Es folgt daher, dass die den Mittelpunkt O enthaltende Gerade $o \parallel A\,K$ ein Strahl unserer betrachteten Achsenkongruenz ist.

Zu jedem Punkte O_i der Seitenebene α kann auf diese Weise der diesem Punkte zugeordnete und ihn enthaltende Strahl der betrachteten Achsenkongruenz bestimmt werden. Die Achsen der mit den Strahlen des Strahlenbüschels (P) parallelen Strahlenzylinder unseres tetraedralen Strahlenkomplexes schneiden, wie bekannt, die Seitenebene α in Punkten einer Kurve 2. Grades k, die die Mittelpunkte S_4, S_5, S_6 der Seiten $B\,C, C\,D$ und $D\,B$ enthält, sowie auch den Punkt O, da dieser der Mittelpunkt der Kurve c ist, die zugleich die Schnittkurve der Ebene α und eines der erwähnten Strahlenzylinder 2. Grades ist.

Man ordne jetzt jedem Punkte M_i der Kantengerade $B\,C$ auf dieser Geraden einen Punkt N_i so zu, so dass dadurch die charakteristische

Konstante $(M_i B C N_i) = p$ erhalten wird. Da die so durch das Doppelverhältnis $(M_i B C N_i) = p$ bestimmten Punktreihen (M_i), (N_i) projektiv zugeordnet sind, da also $(M_i) \overline{\wedge} (N_i)$ gilt, bilden die Verbindungsgeraden $K M_i$ und $D N_i$ zwei projektiv zugeordnete Strahlenbüschel $(K) \overline{\wedge} (D)$, als deren Erzeugnis man unsere Kurve c 2. Grades erhält. Die Kurve c ist also der geometrische Ort der den Punktepaaren M_i, N_i auf die beschriebene Weise zugeordneten Punkte P_i. Jeder dieser Punkte P_i ist der Scheitel eines in der Ebene $A K P_i$ sich befindenden Komplexstrahlenbüschels, und jedem dieser Strahlenbüschel (P_i) ist auf die vorher beschriebene Weise eine Mittelpunktkurve 2. Grades k_i zugeordnet. Alle diese Mittelpunktkurven k_i enthalten die Punkte S_4, S_5, S_6, sowie auch den Punkt O. Den Punkt O enthält diese Mittelpunktkurve auf Grund der Tatsache, dass alle Ebenen $A K P_i$ die Gerade $A K$ gemein haben, und dass in jedem dieser Strahlenbüschel (P_i) sich ein mit der Geraden $A K$ paralleler Strahl befindet. Alle diese Mittelpunktkurven k_i bilden also einen durch die Grundpunkte S_4, S_5, S_6, O bestimmten Kegelschnittbüschel (k_i). Da jeder Punkt N_i der Schnittpunkt der gegenüberliegenden Seiten $B C, D P_i$ des Grundpunktvierecks B, C, D, P_i eines Schnittkurvenbüschels 2. Grades der Ebene α und der mit den Strahlen des Strahlenbüschels (P_i) parallelen Komplexstrahlenzylinder 2. Grades unseres tetraedralen Strahlenkomplexes ist, enthält jede den Punkten P_i, N_i zugeordnete Mittelpunktkurve k_i den Punkt N_i. Da aber der Strahlenbüschel (D) durch die Verbindungsgeraden des Punktes D und der Punkte N_i gebildet wird, und die Gerade $B C$ den Grundpunkt S_4 enthält, befinden sich der Strahlenbüschel (D) und der Kegelschnittbüschel (k_i) in projektiver Zuordnung $(D) \overline{\wedge} (k_i)$. Wir haben schon erwähnt, dass sich die Punktreihen (M_i), (N_i), auf Grund des Doppelverhältnisses $(M_i B C N_i) = p$, in projektiver Zuordnung $(M_i) \overline{\wedge} (N_i)$ befinden. Auf Grund dieser projektiven Zuordnung sind auch die schon erwähnten Strahlenbüschel $(D) \overline{\wedge} (K)$ projektiv zugeordnet. Ferner folgt auf Grund dieser projektiven Zuordnung auch die projektive Zuordnung $(K) \overline{\wedge} (k_i)$ des Strahlenbüschels (K) und des Kegelschnittbüschels (k_i). Jedem Strahle des Strahlenbüschels (K) ordne man ferner diejenige Ebene der Geraden $o \parallel AK$ zu, die mit diesem Strahle parallel ist. Der auf diese Weise enthaltende Ebenenbüschel $[o]$ ist mit dem Strahlenbüschel (K) perspektiv, und dadurch auch dem Kegelschnittbüschel (k_i) projektiv zugeordnet. Das Erzeugnis der projektiv zugeordneten Büschel $[o] \overline{\wedge} (k_i)$ ist eine in der Ebene α sich befindende

Kurve 3. Ordnung s_1 [1]. Der Punkt O, als ein Grundpunkt des Kegelschnittbüschels (k_i), ist der Doppelpunkt dieser Kurve s_1. In jeder Ebene des Strahles o befindet sich, nebst diesem Strahle, noch ein Strahl unserer betrachteten Achsenkongruenz, da sie von der 2. Klasse ist. Die Schnittpunkte dieser in den Ebenen des Strahles o sich befindenden Strahlen der betrachteten Achsenkongruenz, bilden in der Ebene α die vorher erwähnte Kurve s_1 3. Ordnung.

Man wähle ferner in der Seitenebene $\delta = ABC$ den Schnittpunkt O^1 der Geraden o mit dieser Ebene als Mittelpunkt einer durch die Punkte A, B, C bestimmten Kurve 2. Grades c^1, und führe alle bisherigen Betrachtungen in der Ebene α auch in dieser Ebene durch. Auch in dieser Ebene werden wir auf dieselbe Weise eine Kurve 3. Ordnung s_2 erhalten deren Doppelpunkt wieder der Punkt O^1 sein wird. In jeder Ebene der Geraden o befindet sich eine Gerade, die ausser der Geraden o und der Kurve s_1 auch die Kurve s_2 schneidet. Alle diese Geraden sind Strahlen der betrachteten Achsenkongruenz und bilden eine Regelfläche, die durch die Leitlinien o, s_1, s_2 bestimmt ist. Da der Hälftungspunkt S_4 der Kante BC ein gemeinsamer Grundpunkt der erwähnten Kegelschnittbüschel (k_i) in der Ebene α und δ ist, liegt er auf den beiden Leitkurven 3. Ordnung s_1 und s_2. In den Ebenen des Ebenenbüschels $[o]$, die die Kurve s_1 im Doppelpunkt O berühren, befindet sich in jeder dieser Ebenen noch ein dem Strahle o unendlich benachbarter Strahl unserer betrachteten Achsenkongruenz. Dies folgt auf Grund der Tatsache, dass jeder Punkt der Seitenebenen α, β, γ, δ nur einen Strahl unserer Achsenkongruenz enthält, der nicht in diesen Ebenen liegt. Diese zwei Berührungsebenen sind also Torsalebenen der erwähnten Regelfläche, die auch die Kurve s_2 im Doppelpunkt O^1 berühren. Der Strahl o ist also eine doppeltorsale Doppelerzeugende dieser Fläche. Da ferner die Leitgerade o die Doppelpunkte O, O^1 der Leitkurven 3. Ordnung s_1, s_2 enthält, und die Kurven s_1, s_2 den gemeinsamen Punkt S_4 haben, wird diese Regelfläche vom $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 - (2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1) = 5$. Grade [2]. Die Gerade o ist eine doppeltorsale Doppelerzeugende und eine Doppelgerade, also eine vierfache Gerade dieser Regelfläche.

Jeder Punkt des Strahles o enthält ausser dem Strahle o noch zwei weitere Erzeugende dieser Regelfläche 5. Grades, die auch, wie schon erwähnt, Strahlen der betrachteten Achsenkongruenz sind. Was für den Strahl o gilt, gilt selbstverständlich auch für alle anderen Strahlen der betrachteten Achsenkongruenz, da jeder Punkt O_n der Seitenebene α nur einen Strahl unserer Achsenkongruenz enthält, der sich ausserhalb dieser Ebene α befindet. Jeder Punkt jedes Strahles der Achsenkongruenz, die wir betrachten, enthält also drei Strahlen dieser Strahlenkongruenz.

Auf Grund aller unserer Betrachtungen erhält man folgenden Satz: Die Achsenkongruenz der Strahlenzylinder 2. Grades eines Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes ist 2. Klasse und 3. Ordnung.

II. Der Achsenkomplex der Strahlenzylinder 2. Grades der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe eines Büschels derartiger Strahlenkomplexe. In der Arbeit »Die Büschel der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe und ihre projektive Zuordnung« wurden alle Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe eines Haupttetraeders betrachtet, die einen Büschel derartiger Komplexe bilden. Wählt man von den sechs untereinander abhängigen charakteristischen Konstanten in der bekannten Form des Doppelverhältnisses eine aus, und betrachtet ihren Wert p als Parameter, so wird durch jeden Wert dieses Parameters ein tetraedraler Strahlenkomplex des gegebenen Haupttetraeders bestimmt. Wie bekannt, sind die Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe vom 2. Grade. Die Strahlenkegel dieser Strahlenkomplexe aller Raumpunkte sind 2. Ordnung, und enthalten alle vier Scheitelpunkte des diesem Strahlenkomplex angehörigen Haupttetraeders, während die in den Ebenen des Raumes liegenden Strahlen dieses Strahlenkomplexes Kurven 2. Klasse umhüllen, die die vier Seitenebenen des Haupttetraeders berühren.

Man nehme jetzt dieselben Bezeichnungen des Haupttetraeders an, die in dem ersten Teile dieser Arbeit angenommen wurden. Die charakteristische Konstante eines tetraedralen Strahlenkomplexes sei das Doppelverhältnis $(A\,B\,C\,D) = (\overline{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta}) = p$. Nimmt man den Wert als Parameter an, so wird, wie schon erwähnt, jedem Werte dieses Parameters ein tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$ zugeordnet, und alle diese Strahlenkomplexe bilden den bekannten Büschel tetraedraler Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$. Die Strahlenkegel 2. Grades der Strahlenkomplexe dieses tetraedralen Strahlenkomplexbüschels jedes Raumpunktes, bilden einen Kegelbüschel 2. Grades mit gemeinsamem Scheitel in jedem dieser Raumpunkte, der durch die vier Verbindungsgeraden dieser Raumpunkte mit den Scheitelpunkten des Haupttetraeders als Grunderzeugenden bestimmt ist. Die durch die Strahlen aller Strahlenkomplexe dieses Strahlenkomplexbüschels in jeder Raumebene eingehüllten Kurven 2. Klasse bilden einen

Kurvenbüschel 2. Klasse, dessen vier Grundtangenten in den vier Seitenebenen des Haupttetraeders liegen. Alle ∞^3 derartigen Strahlenkegelbüschel 2. Grades sind untereinander projektiv zugeordnet, wenn die Strahlenkegel eines tetraedralen Strahlenkomplexes in diesem Strahlenkomplexbüschel einander zugeordnet sind [3]. Dasselbe gilt auch dual für die Kurvenbüschel 2. Klasse in allen Ebenen des Raumes. Was für die Raumpunkte im Endlichen gilt, gilt selbstverständlich auch für die ∞^2 unendlichfernen Punkte. Es folgt also, dass die Strahlenzylinder 2. Grades gleicher Richtung aller tetraedraler Strahlenkomplexe eines Büschels derartiger Komplexe eines gemeinsamen Haupttetraeders einen Strahlenzylinderbüschel 2. Grades bilden, dessen vier Grunderzeugende die Scheitelpunkte des Haupttetraeders enthalten. Die Achsen der Zylinder eines derartigen Strahlenzylinderbüschels bilden einen Zylinder 2. Grades, und die Erzeugenden aller ∞^2 derartigen Achsenzylinder 2. Grades sind Strahlen eines Strahlenkomplexes, dessen Grad wir in diesem Teile unserer Arbeit bestimmen wollen.

Dass die Achsen der Zylinder eines solchen Strahlenzylinderbüschels 2. Grades einen Achsenzylinder 2. Grades bilden, folgt aus der Tatsache, dass jede Ebene des Raumes einen Zylinderbüschel 2. Grades in einem Kurvenbüschel 2. Grades schneidet, dessen Grundpunkte die Schnittpunkte der Grunderzeugenden sind, wobei die Mittelpunkte der Kurven dieses Büschels sich auf den Achsen des Zylinderbüschels befinden. Wie bekannt, bilden alle diese Mittelpunkte eine Kurve 2. Grades, die die sechs Hälftungspunkte der Seiten des Grundvierecks und die drei Schnittpunkte der Gegenseiten dieses Grundvierecks enthalten. Auf Grund der Tatsache, dass die Grunderzeugenden der ∞^2 Strahlenzylinderbüschel 2. Grades die Scheitelpunkte des Haupttetraeders enthalten, folgt ferner aus dem oben Erwähnten, dass die Achsenzylinder 2. Grades aller ∞^2 dieser Strahlenzylinderbüschel 2. Grades die sechs Hälftungspunkte der Kanten des Haupttetraeders enthalten.

Die Hälftungspunkte der Kanten AB, AC, AD, BC, BD und CD des Haupttetraeders $ABCD$ bezeichne man mit $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$. Die Strahlen der Strahlenbündel dieser sechs Punkte sind auch Strahlen unseres betrachteten Strahlenkomplexes, die aber in unsere Betrachtungen nicht eingehen.

Es sei durch das Haupttetraeder $ABCD$ und durch die charakteristische Konstante $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = (\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,\overline{\delta}) = p$ ein Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex bestimmt. Wird der Wert p als Parameter genommen, so bekommt man, wie schon erwähnt, einen Reyeschen tetraedralen

Strahlenkomplexbüschel dieses Haupttetraeders. Wie schon in dem ersten Teile dieser Arbeit, wähle man auch jetzt eine Ebene ϱ des Scheitels A, die die Seitenebene $\alpha = B\,C\,D$ in der Geraden r schneidet. Eine in der Ebene α durch einen beliebigen Mittelpunkt O und die Punkte B, C, D bestimmte Kurve c 2. Grades schneide die Gerade r in den Punkten P und K (Abb. 2.). Die Gerade r schneidet, wie bekannt, die Kantengerade $B\,C$ im Punkt M, und die Verbindungsgerade $D\,P$ schneidet diese Kantengerade in dem bekannten Punkt N. Wie schon oben erwähnt wurde, ist $(M\,B\,C\,N) = (\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,\overline{\delta}) = p$ die charakteristische Konstante desjenigen tetraedralen Strahlenkomplexes, in dem die Geraden des Punktes P in der Ebene ϱ Komplexstrahlen sind.

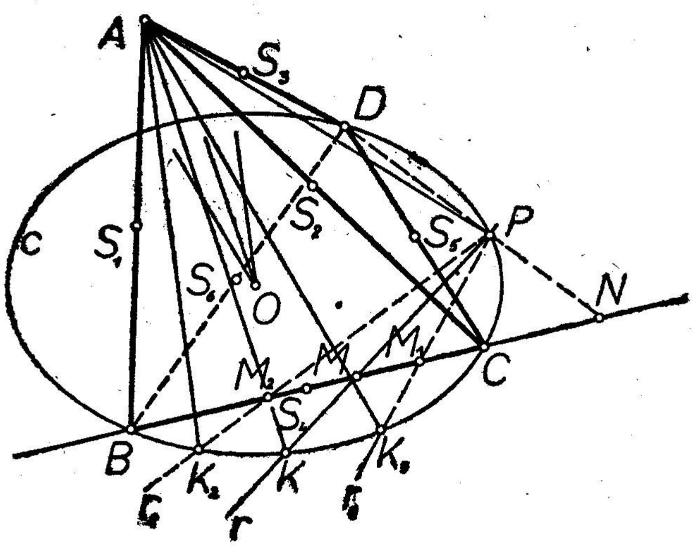

Abb. 2 – Sl. 2

Die Ebenen des Ebenenbüschels $[l]$, dessen Büschelachse die Verbindungsgerade $A\,P = l$ ist, schneiden die Kantengerade $B\,C$ in der Punktreihe (M_i). Durch jede Ebene dieses Ebenenbüschels $[l]$, also auch durch jeden Punkt M_i der Punktreihe (M_i) ist ein tetraedraler Strahlenkomplex des Strahlenkomplexbüschels des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$ bestimmt, dessen charakteristische Konstante durch das Doppelverhältnis $(M_i\,B\,C\,N) = p$ bestimmt ist. Da der Punkt P, also dadurch auch der Punkt N, neben den festen Punkten B, C fest bleibt, erteilt jeder neue Punkt M_i der Punktreihe (M_i), also auch die dem Punkte zugeordnete neue Ebene λ_i des Ebenenbüschels $[l]$, dem Parameter p einen neuen Wert. Wie schon erwähnt, sind alle Geraden des Punktes

P in jeder Ebene λ_i des Ebenenbüschels $[l]$ Strahlen des dieser Ebene zugeordneten tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$. Die Ebenen λ_i des Ebenenbüschels $[l]$ schneiden die Kurve c 2. Grades in den Punkten K_i. Die Strahlenbüschel des gemeinsamen Punktes P in den Ebenen λ_i bezeichne man wieder mit (P_i). Zu jedem tetraedralen Strahlenkomplex des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$ gehört ein derartiger Strahlenbüschel (P_i). Die mit den Strahlen dieser Strahlenbüschel (P_i) parallel liegenden Strahlenzylinder 2. Grades der ihnen zugehörigen tetraedralen Strahlenkomplexe schneiden die Ebene α in den Kurven 2. Grades eines Kurvenbüschels, der durch die Grundpunkte B, C, D, P bestimmt ist. Da die durch jeden der Strahlenbüschel (P_i) bestimmten ∞^1 Strahlenzylinder 2. Grades jedes tetraedralen Strahlenkomplexes unseres tetraedralen Strahlenkomplexbüschels die Ebene α in Kurven 2. Grades schneiden, welche die Punkte B, C, D, P enthalten, handelt es sich hier also nur um einen Kurvenbüschel 2. Grades mit den Grundpunkten B, C, D, P. Jede Kurve dieses Kurvenbüschels enthält also einen Strahlenzylinder 2. Grades jedes tetraedralen Strahlenkomplexes des betrachteten Strahlenkomplexbüschels des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$.

Die Mittelpunkte der Kurven dieses Kurvenbüschels 2. Grades bilden, wie bekannt, eine Kurve 2. Grades, die die Hälftungspunkte S_4, S_5, S_6 und den Punkt O enthält, da sich die Kurve c mit dem Mittelpunkt O auch in diesem Kurvenbüschel befindet. Jeder Punkt dieser Mittelpunktkurve enthält also die Achse eines Strahlenzylinders 2. Grades jedes tetraedralen Strahlenkomplexes des betrachteten Strahlenkomplexbüschels. Der Punkt O enthält also die Achse eines Strahlenzylinders 2. Grades in jedem tetraedralen Strahlenkomplex des tetraedralen Strahlenkomplexbüschels des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$, da, wie wir schon sahen, durch jeden Strahlenbüschel (P_i) und die ihm zugeordneten Ebene λ_i des Ebenenbüschels $[l]$ ein tetraedraler Strahlenkomplex des Strahlenkomplexbüschels bestimmt ist. Jede dieser ∞^1 den Punkt O enthaltenden Achsen ist mit der ihr zugeordneten Verbindungsgeraden $A\,K_i$ parallel, da die Verbindungsgerade $A\,K_i$ eine Erzeugende desjenigen Strahlenzylinders 2. Grades jedes tetraedralen Komplexes des Komplexbüschels des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$ ist, der die Kurve c mit dem Mittelpunkt O enthält. Alle diese den Punkt O enthaltenden Achsen, die Strahlen unseres betrachteten Achsenkomplexes sind, bilden also einen Kegel 2. Grades, der dem Kegel mit dem Scheitel A und der Basiskurve c in der Ebene α kongruent ist und im Raume mit ihm parallel liegt. Jeder dieser Strahlenkegel 2. Grades der in der Ebene sich befindenden Punkte O_n unserer betrachteten Achsenkongruenz, enthält, wie schon erwähnt, die Hälftungspunkte S_1, S_2, S_3, die sich nicht in der Ebene α befinden. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für derartige Strahlenkegel 2. Grades, die ihre Scheitel in den Ebenen β, γ und δ haben. Alle unsere Betrachtungen und Schlussfolgerungen, die sich auf den Punkt O beziehen, gelten selbstverständlich für alle Punkte der Seitenebenen α, β, γ und δ.

Auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen gilt also Folgendes: Die einen Punkt einer Seitenebene des Haupttetraeders $ABCD$ enthaltenden Strahlen des Achsenkomplexes der Strahlenzylinder 2. Grades aller tetraedralen Strahlenkomplexe des tetraedralen Strahlenkomplexbüschels dieses Haupttetraeders bilden einen Kegel 2. Grades.

Eine beliebige Ebene τ des Raumes schneide die Seitenebenen α, δ in den Geraden s^1, s^2. Jeder Punkt dieser Geraden ist der Scheitel eines Strahlenkegels 2. Grades der Strahlen unseren betrachteten Achsenkomplexes. Jeder dieser Kegel schneidet die Ebene τ in zwei Erzeugenden so, dass jeder Punkt dieser Geraden zwei dieser Schnitterzeugenden enthält, die natürlich Strahlen unseres Achsenkomplexes sind. Durch diese Schnitterzeugendenpaare jedes Punktes dieser Geraden sind ein-zweideutig zugeordnete Punktreihen auf diesen Geraden erzeugt. Verbindet man diese zwei ein-zweideutig zugeordneten Punktreihen (s^1), (s^2) mit irgend einem Punkte der Ebene τ, so werden dadurch zwei kollokale ein-zweideutig zugeordnete Strahlenbüschel erzeugt, die, wie bekannt, drei Doppelstrahlen haben [2]. Die Verbindungsgeraden der zugeordneten Punkte der Punktreihen (s^1), (s^2) hüllen also eine Kurve in der Ebene τ ein, auf die man von jedem Punkte der Ebene τ drei Berührungsgeraden ziehen kann. Diese Kurve ist also 3. Klasse.

Da die Ebene τ irgend eine Ebene des Raumes sein kann, gilt ferner auch Folgendes: Die in jeder Ebene des Raumes liegenden Strahlen des Achsenkomplexes der ∞^3 Strahlenzylinder 2. Grades aller in einem Büschel eines Haupttetraeders sich befindenden tetraedralen Strahlenkomplexe hüllen eine Kurve 3. Klasse ein. Dieser Achsenkomplex ist also 3. Klasse.

Bei einem Strahlenkomplex sind aber die Klasse und die Ordnung gleich, er hat nur einen Grad. Dadurch gilt auch Folgendes: Der Achsenkomplex der Strahlenzylinder 2. Grades aller in einem Büschel eines Haupttetraeders sich befindenden Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe ist vom 3. Grade.

Die einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Achsenkomplexes bilden also einen Kegel 3. Ordnung, der die sechs Hälftungspunkte der Kanten des Haupttetraeders enthält. Die den unendlichfernen Punkten und den Punkten der Seitenebenen des Haupttetraeders zugeordneten derartigen Kegel 3. Ordnung zerfallen in je einen Kegel 2. Grades und einen Strahlenbüschel mit demselben Scheitel. Dieser Strahlenbüschel befindet sich in der unendlichfernen Ebene, resp. in den erwähnten Seitenebenen des Haupttetraeders.

III. Über eine Eigenschaft des Tetraeders. Dass jede Ebene einen durch vier Grunderzeugende bestimmten Zylinderbüschel 2. Grades in einem Kurvenbüschel 2. Grades schneidet, ist offensichtlich. Die Achsen der Zylinder dieses Zylinderbüschels 2. Grades bilden einen mit den Zylindern dieses Zylinderbüschels parallelen Zylinder 2. Grades. Aus der bekannten Eigenschaft eines Kurvenbüschels 2. Grades, dass die Mittelpunkte der Kurven dieses Büschels eine Kurve 2. Grades bilden, die die Hälftungspunkte der sechs Seiten des Grundvierecks und die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seitengeraden dieses Grundvierecks enthält, folgt, dass der Zylinder 2. Grades der Achsen aller Zylinder eines Zylinderbüschels 2. Grades, dessen Grunderzeugende die Scheitelpunkte A, B, C, D des Haupttetraeders enthalten, die sechs Hälftungspunkte der Kanten dieses Haupttetraeders enthält. Auf Grund der erwähnten Eigenschaft des Kurvenbüschels 2. Grades folgt ferner, dass drei Erzeugende des erwähnten Achsenzylinders des Zylinderbüschels 2. Grades mit den Scheitelpunkten $A, B, C, D,$ Transversalen der gegenüberliegenden Kantengeraden des Tetraeders $ABCD$ sind. Also, die mit irgend einer Geraden des Raumes parallelen Transversalen der Gegenkantengeraden $AB - CD, AC - BD$ und $BC - AD,$ und die mit dieser Geraden parallelen Geraden, die die Hälftungspunkte S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 und S_6 enthalten, liegen auf einem Zylinder 2. Grades. Jede Erzeugende dieses Zylinders ist Achse eines mit der erwähnten Geraden parallelen, und die Scheitelpunkte A, B, C, D enthaltenden Zylinders 2. Grades. Alle derartigen mit einer Geraden parallelen und die Scheitelpunkte A, B, C, D enthaltenden Zylinder 2. Grades bilden, wie bekannt, einen Zylinderbüschel, und die Erzeugenden jedes Zylinders dieses Zylinderbüschels sind Strahlen eines Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $ABCD$.

Durch jedes beliebige Tetraeder $ABCD$ ist ein tetraedraler Strahlenkomplexbüschel bestimmt, dessen Haupttetraeder dieses Tetraeder

A B C D ist. Die Achsen der Strahlenzylinder 2. Grades der tetraedralen Strahlenkomplexe dieses Strahlenkomplexbüschels bilden, auf Grund unserer Betrachtungen im Teil II dieser Arbeit, einen Strahlenkomplex 3. Grades. Die jeden Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Achsenkomplexes bilden einen Kegel 3. Ordnung, der, wie bekannt, die Hälftungspunkte $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ der Kanten des Haupttetraeders *A B C D* und die Transversalen der gegenüberliegenden Kantengeraden des Haupttetraeders enthält. Da durch die sechs Verbindungsgeraden eines Raumpunktes und der Hälftungspunkte $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$, und durch die drei diesen Raumpunkt enthaltenden Transversalen der gegenüberliegenden Kantengeraden des Haupttetraeders ein Kegel 3. Ordnung bestimmt ist [4], gilt das Folgende:

Durch jedes Tetraeder ist ein Strahlenkomplex 3. Grades bestimmt, dessen Strahlenkegel 3. Ordnung jedes Raumpunktes durch folgende neun Erzeugende bestimmt ist: Sechs dieser Erzeugenden sind Verbindungsgeraden dieses Punktes und der Hälftungspunkte der Kanten dieses Tetraeders, während drei weitere die diesen Raumpunkt enthaltenden Transversalen der gegenüberliegenden Kantengeraden dieses Tetraeders sind. Dasselbe Tetraeder ist, wie bekannt, das Haupttetraeder eines tetraedralen Strahlenkomplexbüschels. Die Achsen der Strahlenzylinder 2. Grades der tetraedralen Strahlenkomplexe dieses Komplexbüschels bilden den beschriebenen Achsenkomplex 3. Grades. Mittels der in diesem Teile unserer Arbeit durchgeführten Betrachtungen haben wir die interessante Tatsache entdeckt, dass diese zwei Strahlenkomplexe 3. Grades jedes Tetraeders identisch sind.

IV. Eine besondere Strahlenkongruenz des Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes. Es war schon mehrmals vorher erwähnt, dass durch jedes Tetraeder ein tetraedraler Strahlenkomplexbüschel bestimmt ist. Die Strahlen der tetraedralen Strahlenkomplexe dieses Komplexbüschels umfassen alle ∞^4 Geraden des Raumes. Jedem derartigen tetraedralen Strahlenkomplexbüschel eines Tetraeders ist ein, im II. Teil dieser Arbeit beschriebener, Achsenkomplex 3. Grades zugeordnet. Da die Strahlen der tetraedralen Strahlenkomplexe des erwähnten Komplexbüschels alle Geraden des Raumes umfassen, befinden sich also auch die Strahlen des diesem Strahlenkomplexbüschel zugeordneten Achsenkomplexes 3. Grades unter den Strahlen der Komplexe des Strahlenkomplexbüschels. Einige Strahlen, wahrscheinlich ∞^2 dieses Achsenkomplexes, müssen sich also in jedem tetraedralen Strahlenkomplexe des Strahlenkomplexbüschels befinden. Was bilden derartige Strahlen in jedem Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplex?

Da das Haupttetraeder jedes Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes immer das Haupttetraeder eines tetraedralen Strahlenkomplexbüschels ist, werden unsere weitere Betrachtungen und Schlüsse für jeden tetraedralen Strahlenkomplex gelten, ganz gleich ob wir ihn in einem Komplexbüschel betrachten oder nicht.

Der Reyesche tetraedrale Strahlenkomplex ist vom 2. Grade, und der dem Haupttetraeder dieses tetraedralen Strahlenkomplexes zugeordnete bekannte Achsenkomplex ist vom 3. Grade. Die gemeinsamen Strahlen dieser zwei Strahlenkomplexe bilden den gesuchten geometrischen Geradenort. Wie bekannt, haben zwei Strahlenkomplexe n-ten und m-ten Grades immer eine Strahlenkongruenz $n \cdot m$-ten Grades gemeinsam, da sich die Strahlenkegel dieser Komplexe jedes Raumpunktes in $n \cdot m$ Erzeugenden durchdringen, und die von den Strahlen dieser Komplexe eingehüllten Kurven n-ter und m-ter Klasse haben in jeder Ebene des Raumes $n \cdot m$ gemeinsame Tangenten. Die betrachteten Strahlenkomplexe 2-ten und 3-ten Grades haben also eine Strahlenkongruenz 6-ten Grades gemeinsam. Jeder Reyesche tetraedrale Strahlenkomplex besitzt also folgende Eigenschaft:

In jedem Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplex befindet sich eine Strahlenkongruenz 6. Grades, deren Strahlen die Achsen der Strahlenzylinder 2. Grades der anderen tetraedralen Strahlenkomplexe des Haupttetraeders des betrachteten Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes sind.

LITERATUR

[1] *Dr. Th. Reye:* Die Geometrie der Lage, Abt. III, Leipzig: Krömer, 1910.

[2] *Dr. E. Müller – Dr. J. Krames:* Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III., Leipzig: Deuticke, 1931.

[3] *V. Niče:* Die Büschel der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe und ihre projektive Zuordnung. RAD Jug. akad. z. i umj., Knj. *314*.

[4] *Dr. G. Peschka:* Darstellende und projektive Geometrie, Bd. II., Wien: Gerold, 1884.

Lehrstuhl für darstellende Geometrie
Fakultät für Architektur, Bauwesen und Geodäsie
der Universität in Zagreb

Angenommen zur Veröffentlichung 9. XII. 1960. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

Vilim Niče

PRILOZI PRAMENU REYEOVIH TETRAEDRALNIH KOMPLEKSA

I. Kongruencija osi valjaka 2. stupnja zraka Reyeovog tetraedralnog kompleksa. Reyeov tetraedralni kompleks jest, kao što je poznato, 2. stupnja. To znači, da sve zrake takvog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom prostora, čine stožac 2. stupnja. Poznato je također, da svi takvi stošci prolaze vrhovima glavnog tetraedra tog tetraedralnog kompleksa. Ovakvi stošci neizmjerno dalekih tačaka prostora prelaze u valjke 2. stupnja, a svaki takav valjak ima jednu svoju os u konačnosti. Budući da takvih valjaka ima ∞^2, ima toliko i njihovih konačnih osi. Sve te osi, kao neprekinuti kvadratni skup pravaca u prostoru, čine neku kongruenciju, kojoj ćemo mi u ovom dijelu radnje istražiti razred i red. Svi spomenuti valjci prolaze naravski također vrhovima glavnog tetraedra.

Označimo vrhove nekog tetraedra s A, B, C, D, a tim vrhovima nasuprotne pobočne ravnine s $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ($\alpha = BCD, \beta = ACD$, itd.). Probodišta nekog pravca s ravninama $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ označimo s $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$, a ravnine tog pravca koje prolaze vrhovima A, B, C, D označimo s $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$. Svi pravci prostora, koji ravnine $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tetraedra $ABCD$ probadaju u tačkama $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ tako, da za sve te pravce bude $(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) = p$, gdje je p neka stalna veličina, čine Reyeov tetraedralni kompleks, kojemu je taj tetraedar glavni. Tih pravaca ima ∞^3, a za sve njih vrijedi, kao što je poznato, i $(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}) = (\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}) = p$. Ovaj dvoomjer i njegova vrijednost p zovu se jedna karakteristična konstanta tog kompleksa. Uz ove, i cio niz drugih poznatih osobina, poznata je i ova osobina Reyeovog tetraedralnog kompleksa: Sve zrake tetraedralnog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom jedne pobočne ravnine njegovog glavnog tetraedra, čine pramen pravaca, kojega ravnina prolazi toj pobočki nasuprotnim vrhom.

Jedna ravnina ϱ vrha A neka siječe pobočnu ravninu α u pravcu r, koji pobočni brid BC u toj ravnini siječe u tački M. Tačka P na pravcu r neka bude vrh pramena pravaca (P) u ravnini ϱ, a spojnica DP neka siječe brid BC u tački N. Budući da za ravnine $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}$ svih zraka pramena (P) vrijedi $(\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,\overline{\delta}) = (MBCN)$, dakle je i $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = (MBC\,N)$, to vidimo, da su zrake tog pramena zrake tetraedralnog kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, kojemu je karakteristična konstanta dvoomjer $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = (\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,\overline{\delta}) = (MBCN) = p$.

Valjci 2. stupnja zraka ovog tetraedralnog kompleksa, koji su usporedni sa zrakama pramena (P), sijeku ravninu α u krivuljama 2. stupnja, koje prolaze tačkama B, C, D, P. Sve te krivulje čine prema tome pramen krivulja 2. stupnja, kojemu su tačke B, C, D, P temeljne. Osi ovih ∞^1 valjaka 2. stupnja usporednih s ravninom ϱ, probadaju ravninu α u središtima krivulja spomenutog pramena, a sva ta središta čine, kao što je poznato, krivulju 2. stupnja, koju označimo s k. Svaka s ravninom ϱ usporedna ravnina prostora siječe krivulju k u dvije tačke (realno ili imaginarno), dakle se u svakoj takvoj ravnini nalaze dvije osi naših opisanih valjaka 2. stupnja zraka spomenutog tetraedralnog kompleksa, kao zrake naše promatrane kongruencije.

Svakoj ravnini ϱ_i tačke A, odnosno njenom sjecištu M_i na bridu BC, možemo na tom bridu lako pomoću karakteristične konstante $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = (M_i B C N_i)$ odrediti pridruženu tačku N_i, a pomoću spojnice DN_i lako se na tragu r_i može odrediti i tačka P_i. Zrake pramena (P_i) u ravnini ϱ_i bit će opet zrake našeg tetraedralnog kompleksa. Naša razmatranja s ravninom ϱ možemo sada prenijeti na svaku ravninu ϱ_i vrha A, pa ćemo dobiti opet isto. Budući da je svaka ravnina prostora usporedna s jednom ravninom ϱ_i vrha A izlazi, da u svakoj ravnini prostora leže dvije zrake naše istraživane kongruencije. Vidimo dakle, da je kongruencija osi valjaka 2. stupnja zraka Reyeovog tetraedralnog kompleksa drugog razreda.

Bilo koja tačka O ravnine α neka je središte krivulje c 2. stupnja, koja prolazi tačkama B, C, D, a koja je tim tačkama i tim središtem određena. Na bridu BC odaberimo nekoliko tačaka M, N tako, da vrijedi $(\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,\overline{\delta}) = (\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = (MBCN)$. Spojnica DN neka siječe krivulju c u tački P, a spojnica PM neka je siječe u drugoj tački K. (Sl. 1).

Zrake pramena (P) tačke P u ravnini $A P K$ su zrake našeg već spomenutog tetraedralnog kompleksa glavnog tetraedra $A B C D$. Postavimo li sada u prostoru valjak 2. stupnja zraka ovog našeg tetraedralnog kompleksa, koji je usporedan sa spojnicom $A K$, sjeći će on ravninu α upravo u krivulji c, budući da ta presječna krivulja prolazi tačkama B, C, D, K, P, kojima je upravo ta krivulja i određena. Tačkom O povučen pravac $o \parallel A K$ je prema tome os tog valjka, dakle zraka naše promatrane kongruencije. Osim toga se vidi, da tačkom O prolazi samo jedna zraka te kongruencije, koja ne leži u ravnini α. U svakoj ravnini zrake o nalazi se, kao što smo vidjeli, još jedna zraka naše kongruencije, a sve te zrake čine neku pravčastu plohu, kojoj je zraka o višestruki pravac. Ravnine spojnice $A K$ neka sijeku brid $B C$ u tačkama M_i, a krivulju c u tačkama P_i. Spojnice $D P_i$ sjeći će brid $B C$ u tačkama N_i tako, da će za sve tako nastale parove M_i, N_i vrijediti $(M_i B C N_i) = (\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D}) = (\overline{\alpha} \overline{\beta} \overline{\gamma} \overline{\delta})$. Odnosno, zrake pramenova (P_i) tačaka P_i u svakoj takvoj ravnini, bit će zrake našeg poznatog tetraedralnog kompleksa. Svakom ovom pramenu pravaca (P_i) pridružen je na sprijeda opisani način pramen krivulja 2. stupnja temeljnih tačaka B, C, D, P_i, zajedno s njegovom krivuljom k_i 2. stupnja središta krivulja u tom pramenu. Ova krivulja k_i svake tačke P_i prolazi središtima S_4, S_5, S_6 bridova $B C$, $C D$ i $D B$, kao i tačkom O, budući da u svakom spomenutom pramenu pravaca (P_i) postoji jedna zraka, koja je usporedna sa spojnicom $A K$. Pravcem o postavljena ravnina usporedno s ravninom pramena pravaca (P_i) siječe pridruženu krivulju k_i u drugoj tački, kojom prolazi ona druga zraka naše kongruencije, koja leži u toj ravnini. Sve krivulje k_i, pridružene tačkama P_i, čine pramen (k_i) temeljnih tačaka S_4, S_5, S_6, O. Ravnine pravca o usporedne s ravninama pramenova (P_i) sijeku ravninu α u pramenu pravaca. Svaka ova presječnica pridružena je preko tačke P_i jednoj krivulji k_i pramena (k_i), a lako se može dokazati, da su ova dva pramena na ovaj način pridruženi projektivno. Budući da je tačka O temeljna tačka pramena (k_i), bit će proizvod tih dvaju pramenova krivulja 3. reda s_1, kojoj je tačka O dvostruka.

Uzmemo li sada u ravnini δ probodište O_1 pravca o na isti način u razmatranje, kao što smo to učinili s tačkom O u ravnini α, dobit ćemo i u toj ravnini analognu krivulju 3. reda s_2, kojoj će tačka O_1 biti dvostruka. Krivulje s_1, s_2 sijeku se u polovištu S_4 brida $B C$, jer je ta tačka temeljna tačka pramena krivulja (k_i) u ravnini α i u ravnini δ, tako da njom prolaze obje te krivulje. Pravci prostora, koji sijeku ove dvije krivulje 3. reda i naš pravac o, bit će zrake naše istraživane kongruencije. Svi ti pravci čine pravčastu plohu 5. stupnja, kojoj je pravac o dvostruki pravac te dvostruka i dvostruko torzalna izvodnica. Svakom tačkom pravca o prolaze još dvije izvodnice te plohe, koje su i zrake naše kongruencije. Što vrijedi za zraku o tačke O u ravnini α, vrijedi za zraku o_i svake tačke O_i u toj ravnini, a to su upravo sve zrake naše kongruencije. Vidimo dakle, da svakom tačkom svake zrake naše istraživane kongruencije prolaze još dalje dvije njene zrake. Izlazi prema tome ovo: Kongruencija osi valjaka 2. stupnja zraka Reyeovog tetraedralnog kompleksa je 3. reda i 2. razreda.

II. Kompleks osi valjaka 2. stupnja zraka svih tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra. Tetraedar $A\,B\,C\,D$ neka je opet glavni tetraedar Reyeovog tetraedralnog kompleksa, koji je određen svojom karakterističnom konstantom $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = (\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,\overline{\delta}) = p$. Uzmemo li sada p kao parametar, onda je svakom vrijednošću tog parametra određen po jedan tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $A\,B\,C\,D$, a svi ti tetraedralni kompleksi čine pramen takvih kompleksa tog glavnog tetraedra. Stošci 2. stupnja zraka svih tetraedralnih kompleksa tog pramena čine u svakoj tački prostora pramen stožaca 2. stupnja s tom tačkom kao zajedničkim vrhom, kojemu su temeljne izvodnice spojnice tog zajedničkog vrha s vrhovima glavnog tetraedra $A\,B\,C\,D$. Svi su ti pramenovi stožaca međusobno projektivno pridruženi, kad im međusobno pridružimo stošce svakog tetraedralnog kompleksa tog pramena. Stošci neizmjerno dalekih tačaka prostora prelaze u valjke, dakle svakom neizmjerno dalekom tačkom prostora prolazi opisani pramen valjaka 2. stupnja zraka spomenutih tetraedralnih kompleksa. Takvih valjaka ima u svakom tetraedralnom kompleksu našeg pramena ∞^2, dakle svih takvih valjaka ima ∞^3. Svaki od njih ima svoju os, a sve te osi čine prema tome pravčasti kompleks. U ovom dijelu radnje istražit ćemo stepen tog osnog kompleksa.

Ravnina ϱ vrha A neka opet siječe pobočnu ravninu α glavnog tetraedra $A\,B\,C\,D$ u tragu r. (Sl. 2). Kao i sprijeda neka je tačkom O kao središtem i tačkama B, C, D u ravnini α određena krivulja c 2. stupnja, koju trag r siječe u tačkama K, P. Trag r neka opet siječe brid $B\,C$ u tački M, a spojnica $D\,P$ neka ga siječe u tački N. Budući da za svaku zraku pramena (P) tačke P u ravnini ϱ vrijedi, kao što znamo, $(\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,\overline{\delta}) = p$, a prema tome i $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = p$, gdje je p neka određena vrijednost, zrake su tog pramena zrake tetraedralnog kompleksa glavnog tetraedra $A\,B\,C\,D$, kojemu je karakteristična konstanta $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = (\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,\overline{\delta}) = (M\,B\,C\,N) = p$. Ravnine λ_i spojnice $l = A\,P$, dakle ravnine pramena ravnina $[l]$, neka sijeku pravac brida $B\,C$ u tačkama M_i. Svaka tačka M_i dat će u dvoomjeru $(M_i\,B\,C\,N) = p$ novu vrijednost p, pa na taj način p postaje parametar, jer uz čvrste tačke B, C, N svaka nova vrijednost parametra p određuje i novu tačku M_i. Svakom tačkom M_i dobiva međutim karakteristična konstanta $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}) = (\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,\overline{\delta})$ novu vrijednost parametra p, kojom je određen novi tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $A\,B\,C\,D$. Zrake tetraedralnog kompleksa pridruženog na opisani način jednoj tački M_i, koje prolaze tačkom P, čine pramen pravaca (P_i) u ravnini λ_i pramena $[l]$, koja brid $B\,C$ siječe u tački M_i. Ravnine λ_i pramena $[l]$ neka sijeku krivulju c središta O, osim u tački P, još i u tačkama K_i. U pramenu pravaca (P_i) svake ravnine λ_i nalazi se zraka usporedna sa spojnicom $A\,K_i$ tačke K_i u toj ravnini. Valjci 2. stupnja zraka tetraedralnog kompleksa određenog na opisani način jednim pramenom zraka (P_i) u ravnini λ_i usporedni su sa zrakama tog pramena i sijeku ravninu α, kao što znamo, u pramenu krivulja 2. stupnja temeljnih tačaka B, C, D, P. Svi pramenovi (P_i) imaju sada naravski isti vrh P. Budući da je pramen ovakvih presječnih krivulja 2. stupnja u ravnini α isti za valjke 2. stupnja zraka svakog tetraedralnog kompleksa našeg pramena takvih kompleksa glavnog tetraedra $A\,B\,C\,D$, koji su uvijek usporedni sa zrakama odgovarajućeg pramena (P_i), prolazit će svakom tačkom krivulje k 2. stupnja, koju čine središta krivulja 2. stupnja spomenutog pramena, po jedna os valjka 2. stupnja zraka svakog tetraedralnog kompleksa u našem pramenu takvih kompleksa. Ovo dabome vrijedi i za tačku O, budući da i krivulja c prolazi temeljnim tačkama B, C, D, P. Jer u svakom pramenu (P_i) postoji jedna zraka usporedna sa spojnicom $A\,K_i$ u ravnini tog pramena, a sve tačke K_i leže na krivulji c, prolazit će krivuljom c po jedan valjak 2. stupnja zraka svakog tetraedralnog kompleksa glavnog tetraedra $A\,B\,C\,D$, koji je usporedan s jednom izvodnicom $(A\,K_i)$ tog valjka. Budući da su osi valjaka usporedne s njihovim izvodnicama, prolazit će osi spomenutih valjaka zraka svih tetraedralnih kompleksa našeg pramena takvih kompleksa (glavnog tetraedra $A\,B\,C\,D$) tačkom O usporedno sa spojnicama $A\,K_i$. Sve te osi, koje su zrake našeg istraživanog kompleksa, čine prema tome stožac 2. stupnja vrha O, koji je jednak stošcu vrha A i osnovke c u ravnini α i usporedan s njim. Što vrijedi za tačku O, vrijedi naravski i za svaku drugu tačku ravnine α, kao i za sve tačke preostalih triju pobočnih ravnina β, γ i δ. Iz osobina pramena valjaka 2. stupnja četiriju temeljnih izvodnica izlazi, da svi spomenuti stošci prolaze polovištima onih bridova glavnog tetraedra, koji ne leže u pobočnoj ravnini, u kojoj je vrh takvog stošca, budući da valjci 2. stupnja zraka svih tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$ prolaze njegovim vrhovima.

Bilo kojom ravninom τ prostora presijecimo pobočne ravnine α, δ u pravcima s_1, s_2, koji se naravski sijeku u jednoj tački brida BC, jer je on presječnica tih pobočnih ravnina. Svakom tačkom pravca s_1 i pravca s_2 prolazi ∞^1 zraka našeg istraživanog kompleksa, koje čine po jedan maloprije opisani stožac 2. stupnja. Ravnina τ siječe svaki taj stožac u dvije izvodnice i svakom tačkom svakog tog pravca prolaze po dvije takve izvodnice, koje onaj drugi pravac sijeku u dvije tačke. Na taj smo način uspostavili jedno-dvoznačan odnos nizova tačaka na pravcima s_1, s_2, a spojnice pridruženih tačaka su zrake našeg istraživanog kompleksa. Spojnice pridruženih tačaka dvaju jedno-dvoznačno pridruženih nizova omataju, kao što je poznato, krivulju 3. razreda. Što vrijedi za ravninu τ, vrijedi naravski za svaku ravninu prostora, pa izlazi, da je naš promatrani kompleks 3. razreda. Jer međutim pravčasti kompleks ima uvijek red i razred isti, tj. on ima samo svoj stepen, dobivamo konačno ovo:

Kompleks osi valjaka 2. stupnja zraka svih Reyeovih tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra je trećeg stupnja.

Zrake ovakvog osnog kompleksa svake tačke prostora čine, kao što smo zaključili, stožac 3. reda, a svi ovi stošci prolaze polovištima bridova zajedničkog glavnog tetraedra tog pramena tetraedralnih kompleksa. Ovakvi stošci vrhova u neizmjerno dalekoj ravnini i u ravninama α, β, γ, δ pobočaka, raspadaju se, kao što smo vidjeli, u stožac 2. stupnja i pramen pravaca istog vrha u onoj od spomenutih ravnina, u kojoj se taj vrh nalazi.

III. O jednoj osobini tetraedra. Svakim tetraedrom određen je, kao što smo vidjeli, pramen tetraedralnih kompleksa, kojima je taj tetraedar zajednički glavni tetraedar. Vidjeli smo međutim, da svaki ovakav pramen tetraedralnih kompleksa ima sebi pridružen kompleks osi valjaka 2. stupnja zraka svih kompleksa tog pramena, koji je 3. stupnja. Izlazi prema tome, da svaki bilo kakav tetraedar ima jedan ovakav sebi pridružen pravčasti kompleks 3. stupnja.

Znamo, da kod pramena krivulja 2. stupnja četiriju temeljnih tačaka središta tih krivulja leže na krivulji 2. stupnja, koja prolazi polovištima stranica temeljnog četverovrha tog pramena, kao i sjecištima nasuprotnih njegovih stranica. Odavle proizlazi, da i osi svih ∞^1 valjaka 2. stupnja istog položaja u prostoru, sastavljenih iz zraka tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra, kojima temeljne izvodnice takvog pramena prolaze vrhovima zajedničkog glavnog tetraedra tih kompleksa, čine valjak 2. stupnja, koji prolazi polovištima bridova tog tetraedra, a tri izvodnice tog osnog valjka 2. stupnja su transverzale nasuprotnih bridova tog glavnog tetraedra. Budući da za svaki položaj u prostoru postoje tri takve transverzale vidimo, da su sve transverzale parova nasuprotnih bridova glavnog tetraedra (tri hiperboličke linearne kongruencije) također zrake našeg opisanog kompleksa osi 3. stupnja.

Međutim, kao što je krivulja 3. reda određena s 9 tačaka, tako je i svaki stožac 3. reda određen s 9 svojih izvodnica, pa dobivamo ovu zanimljivu osobinu svakog tetraedra: Svakom tetraedru pridružen je jedan ovakav pravčasti kompleks 3. stupnja. Zrake tog kompleksa, koje prolaze jednom tačkom prostora, čine stožac 3. reda, koji je određen sa 6 spojnica te tačke s polovištima bridova tog tetraedra, kao i s tri transverzale nasuprotnih bridova tog tetraedra, koje prolaze tom tačkom. Ovakav kompleks 3. stupnja svakog tetraedra identičan je s kompleksom osi valjaka 2. stupnja zraka svih tetraedralnih kompleksa tog tetraedra kao njihovog glavnog tetraedra. Svi ovakvi kompleksi čine, kao što znamo, pramen tetraedralnih kompleksa tog glavnog tetraedra.

IV. Jedna osobita kongruencija tetraedralnog kompleksa. Svaki tetraedar glavni je tetraedar od ∞^1 tetraedralnih kompleksa, koji, kao što znamo, čine pramen kompleksa. Zrakama tetraedralnih kompleksa ovakvog pramena obuhvaćeni su svi pravci prostora, a svaki ovakav pramen ima sebi pridružen kompleks 3. stupnja opisanih osi valjaka 2. stupnja zraka tih tetraedralnih kompleksa. U svakom tetraedralnom kompleksu tog pramena nalazi se prema tome izvjesna količina zraka i tog osnog kompleksa 3. stupnja, ali naravski ne osi valjaka zraka baš tog kompleksa. Geometrijsko mjesto zajedničkih zraka tog osnog kompleksa 3. stupnja i jednog tetraedralnog kompleksa tog pramena, koji je kao što znamo 2. stupnja, bit će prema tome pravčasta kongruencija 6. stupnja. Budući da je glavni tetraedar svakog tetraedralnog kompleksa glavni tetraedar za cio pramen takvih kompleksa, izlazi ovo:

U svakom Reyeovom tetraedralnom kompleksu nalazi se jedna kongruencija 6. stupnja, čije zrake su osi valjaka 2. stupnja zraka tetraedralnih kompleksa, koji s prvim tetraedralnim kompleksom imaju zajednički glavni tetraedar.

Katedra za nacrtnu geometriju
Arhitektonsko-građevinsko-geodetski fakultet
Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 9. prosinca 1960. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.