Serija II. T. 15. Zagreb 1960. Broj 3 **POSEBAN OTISAK**

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Vilko Niče, Zagreb

Ein Beitrag zum F^2*-Bündel mit Polartetraeder*

Prilog svežnju ploha 2. stupnja sa zajedničkim polarnim tetraedrom

Zagreb 1960

Štamparski zavod „Ognjen Prica" Zagreb, Savska cesta 31

GLASNIK MAT. - FIZ. I ASTR.
Tom 15. — No. 3 — 1960.

EIN BEITRAG ZUM F^2-BÜNDEL MIT POLARTETRAEDER

Vilko Niče, Zagreb

Der polare Raum ist, wie bekannt, durch seine reelle Inzidenzfläche 2. Grades, oder durch ein Polartetraeder und eine Ebene und den ihr zugeordneten Punkt bestimmt. Im zweiten Falle besteht selbstverständlich auch eine reelle oder imaginäre Inzidenzfläche 2. Grades. Durch zwei Flaächen 2. Grades und deren Durchdringungskurve 4. Ordnung I. Art ist ein Flächenbüschel 2. Grades bestimmt, der auch als ein Büschel polarer Räume betrachtet werden kann. Diese Durchdringungskurve 4. Ordnung I. Art ist als Grundkurve dieses Flächenbüschels, bzw. des Büschels der polaren Räume bekannt. Die Scheitel A, B, C, D der vier bekannten Bisekantenkegel 2. Grades dieser Grundkurve sind, wie bekannt, die Scheitel des bekannten gemeinsamen Polartetraeders $ABCD$ des durch diese Kurve bestimmten Büschels polarer Räume. Die einem Raumpunkt zugeordnete Polarebenen in einem Büschel polarer Räume enthalten, wie bekannt, eine gemeinsame Gerade. Alle derartigen, den Raumpunkten zugeordneten Geraden bilden einen Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplex, dessen Haupttetraeder das Polartetraeder $ABCD$ ist. Die Berührungsgeraden der Grundkurve des Büschels der polaren Räume gehören auch als Strahlen dem tetraedralen Komplexe an, da den Berührungsgeraden als Komplexstrahlen deren Berührungspunkte im Raume zugeordnet sind. Dieser tetraedrale Strahlenkomplex hat offenbar auch seine charakteristische Invariante, die als eines der Doppelverhältnisse der vier Schnittpunkte eines Komplexstrahles mit den vier Seitenebenen des Haupttetraeders $ABCD$ bekannt ist, und die auch dem entsprechenden Doppelverhältnisse der vier die Scheitel A, B, C, D enthaltenden Ebenen eines Komplexstrahles gleich ist. Die vier eine Berührungsgerade der Grundkurve des Büschels der polaren Räume enthaltenden Ebenen, die auch die vier Scheitel A, B, C, D enthalten, bilden einen Ebenenquadrupel, eines dessen Doppelverhältnisse also die charakteristische Invariante unseres tetraedralen Strahlenkomplexes ist, und die man leicht auch konstruktiv bestimmen kann.

Drei Flächen 2. Grades, von denen keine sich im Büschel der anderen zwei befindet, haben acht gemeinsame assoziierte Punkte, durch die als Basispunkte ein Flächenbündel F^2 von ∞^2 Flächen 2. Grades bestimmt ist. Der Flächenbündel F^2 kann auch als ein

Bündel polarer Räume betrachtet werden, dem die Flächen des Bündels als Inzidenzflächen der polaren Räume des Bündels dienen. Die Flächen eines Büschels innerhalb des Bündels bilden mit einer nicht in diesem Büschel sich befindenden Fläche des Bündels weitere ∞^1 in diesem Bündel sich befindende Flächenbüschel, und jede Fläche des Bündels gehört einem dieser Büschel an. Die Scheitel der ∞^1 polaren Tetraeder dieser in dem Bündel F^2 sich befindenden Flächenbüschel bilden, wie bekannt, eine Raumkurve 6. Ordnung. In einem Spezialfalle kann diese Raumkurve in 6 Geraden zerfallen, die aber ein Tetraeder bilden, das ein gemeinsames Polartetraeder aller ∞^2 Flächen 2. Grades eines derartigen speziellen Bündels F^2 ist. Die ∞^2 Flächen eines derartigen Flächenbündels können auch hier als Inzidenzflächen der polaren Räume eines derartigen Bündels polarer Räume betrachtet werden. Ein solcher F^2-Bündel kann 8 reelle oder keine reellen assoziierten Basispunkte enthalten.

Ein tetraedraler Strahlenkomplex ist, wie bekannt, durch sein Haupttetraeder und durch die Form und den Wert seiner charakteristischen Invariante bestimmt, deren Doppelsinn wir als Doppelverhältnis eines Punktquadrupels, und Doppelverhältnis eines Ebenenquadrupels schon kennen. Nimmt man die Punkte A, B, C, D als Scheitel des gemeinsamen Polartetraeders des schon erwöhnten speziellen F^2-Bündels an, dann zerfällt die bekannte Raumkurve 6. Ordnung in die 6 Kantengeraden des Polartetraeders $ABCD$. Die 8 assoziierten Basispunkte $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7$ und K_8 können als Scheitel eines derartigen Körpers betrachtet werden, der kollinear in einen Würfel transformiert werden kann. Dem Mittelpunkt und den unendlichfernen Schnittpunkten der drei Quadrupel paralleler Kantengeraden des Würfels werden in dieser kollinearen Transformation die Scheitel des polaren Tetraeders $ABCD$ zugeordnet. Abb. 1. Durch jeden der Scheitel A, B, C, D gehen also vier Verbindungsgeraden der Basispunktepaare, und jede Kantengerade des Tetraeders $ABCD$ enthält zwei Ebenen, in denen sich vier Basispunkte befinden. Diese zwei Ebenen und die Seitenebenen jeder Kantengeraden bilden einen harmonischen Ebenenquadrupel. Auf der gegenüberliegenden Kantengerade bilden deren Schnittpunkte mit den erwähnten Ebenen und die auf ihr liegenden Scheitel offensichtlich auch einen harmonischen Punktquadrupel. Aus dieser räumlichen Anordnung der assoziierten Gruppe der Basispunkte folgt offenbar, dass durch einen dieser Punkte alle anderen bestimmt sind, wenn das Tetraeder $A B C D$ bekannt ist.

Die vier Verbindungsgeraden der Basispunktepaare, die einen Scheitel des polaren Tetraeders enthalten, können als Grunderzeugende eines Kegelbüschels 2. Grades mit gemeinsamem Scheitel angenommen werden. Alle Kegel derartiger Büschel gehören als Flächen 2. Grades unserem speziellen F^2-Bündel an, da alle diese Kegel die 8 assoziierten Basispunkte des Bündels enthalten. Je zwei dieser Kegel, die sich in verschiedenen Büscheln der vier

Scheitelpunkte befinden, durchdringen sich in einer Raumkurve 4. Ordnung I. Art, durch die als Grundkurve ein dem F^2-Bündel angehöriger Flächenbüschel 2. Grades, bzw. Büschel polarer Räume, bestimmt ist. Derartige Grundkurven, also auch Büschel polarer Räume, gibt es also ∞^2. Da in unserem F^2-Bündel sich ∞^2 Flächen, bzw. polare Räume befinden, liegt jede dieser Flächen, bzw. jeder polare Raum, in ∞^1 dieser Büschel. Dies ist der Tatsache analog, dass ∞^2 Gerade einer Ebene ∞^2 Strahlenbüschel in dieser Ebene bilden, und jede Gerade sich in ∞^1 dieser Strahlenbüschel befindet. Oder dass ∞^2 Punkte dieser Ebene ∞^2 Punktreihen bilden, und

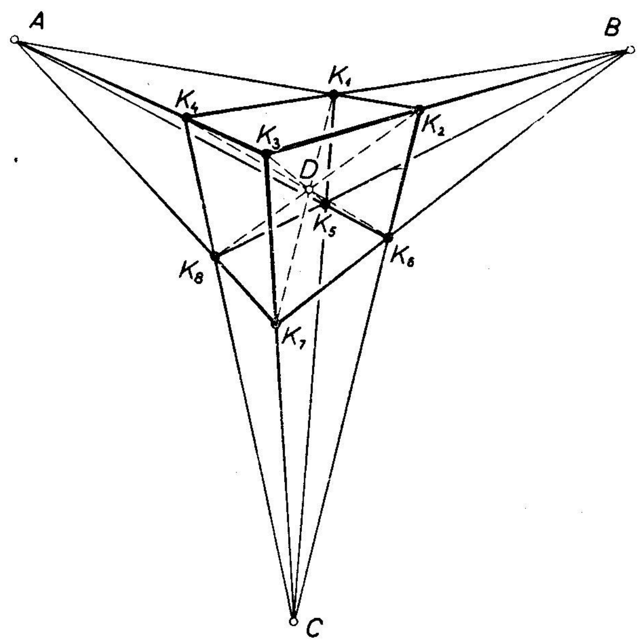

Abb. 1

jeder Punkt sich in ∞^1 Punktreihen dieser Ebene befindet. Jede dieser ∞^2 die 8 assoziierten Basispunkte enthaltenden Grundkurven 4. Ordnung I. Art enthält vier Bisekantenkegel 2. Grades mit den Scheiteln A, B, C, D. Dies folgt aus der Tatsache, dass eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art mit einer Fläche 2. Grades nur 8 Punkte gemein haben kann. Gibt es mehr derartiger Punkte, so liegt diese Raumkurve ganz auf dieser Fläche. Da alle Kegel der vier erwähnten Kegelbüschel die 8 Basispunkte enthalten, wird durch eine Gerade eines Basispunktes, z. B. K_1, je ein Kegel der vier Kegelbüschel bestimmt. Durch diese Gerade sind die Berührungsebenen längs der Erzeugenden K_1A, K_1B, K_1C und K_1D bestimmt, die ferner die vier Kegel der Büschel mit den Scheiteln A, B, C, D, und dadurch auch eine der ∞^2 Grundkurven bestimmen. Die ganz nach Belieben angenommene Gerade des Basispunktes K_1 ist die Berührungsgerade dieser Grundkurve im Basispunkte K_1. Jede der ∞^2 Grundkurven kann also als Durchdringungskurve irgend zweier Kegel verschiedener Büschel der Scheitel A, B, C, D betrachtet werden.

Durch ein Haupttetraeder ist, wie bekannt, ein Büschel Reyescher tetraedraler Strahlenkomplexe bestimmt. Wählt man unter den 24 Formen der charakteristischen Invariante eine dieser Formen aus, und betrachtet man ihren Wert als einen Parameter, so ist durch jeden Wert dieses Parameters, als den Wert der charakteristischen Invariante, ein Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex des gegebenen Haupttetraeders bestimmt. Die allen Werten dieses Parameters auf diese Weise zugeordneten tetraedralen Strahlenkomplexe bilden einen tetraedralen Strahlenkomplexbüschel des gegebenen Haupttetraeders. Das polare Tetraeder $ABCD$ des vorher betrachteten speziellen F^2-Bündels polarer Räume ist ebenfalls Haupttetraeder eines derartigen tetraedralen Strahlenkomplexbüschels. Die Strahlen eines dieser Strahlenkomplexe enthalten die einem Raumpunkte durch die polaren Räume eines im F^2-Bündel sich befindenden Büschels dieser Räume zugeordneten Polarebenen. Jeder derartige Büschel polarer Räume des F^2-Bündels ist durch eine der vorher erwähnten ∞^2 Grundkurven 4. Ordnung I. Art bestimmt. Da es aber ∞^2 dieser Grundkurve gibt, und durch das Haupttetraeder $A\,B\,C\,D$ nur ∞^1 tetraedrale Strahlenkomplexe bestimmt sind, müssen jedem tetraedralen Strahlenkomplex des tetraedralen Strahlenkomplexbüschels des Haupttetraeders $A\,B\,C\,D$ ∞^1 dieser Grundkurven zugeordnet werden, deren geometrische Ort wir in dieser Arbeit definieren und untersuchen werden.

Wir nehmen das polare Tetraeder $ABCD$ und die vorher beschriebene Gruppe assoziierter Punkte $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7$ und K_8 als Basispunkte des spezifischen K^2-Bündels von Flächen 2. Grades, bzw. polarer Räume, an. Die Gerade t sei eine ganz beliebige Gerade des Basispunktes K_1. Durch die Gerade t und die assoziierten Basispunkte K_n $(n = 1—8)$ ist eine Raumkurve k 4. Ordnung I. Art bestimmt, die die Gerade t im Punkt K_1 berührt. Diese Raumkurve k kann als Durchdringungskurve jener zwei Kegel 2. Grades, z. B. mit den Spitzen A, B, betrachtet werden, die durch die Erzeugenden $A\,K_1\,K_2$, $A\,K_3\,K_4$, $A\,K_5\,K_6$, $A\,K_7\,K_8$, bzw. die Erzeugenden $B\,K_1\,K_4$, $B\,K_2\,K_3$, $B\,K_6\,K_7$, $B\,K_5\,K_8$, und die Berührungsebene $A\,t$ längs der Erzeugenden $A\,K_1\,K_2$, bzw. die Berührungsebene $B\,t$ längs der Erzeugenden $B\,K_1\,K_4$ bestimmt sind. Die Berührungsebenen $A\,t$, $B\,t$ sind selbstverständlich durch den Punkt A und die Gerade t, bzw. durch den Punkt B und die Gerade t bestimmt, und dadurch erscheint die Gerade t als Berührungsgerade der Grundkurve k im Punkt K_1.

Die den Scheiteln A, B, C, D gegenüberliegenden Seitenebenen des Tetraeders $ABCD$ bezeichne man mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, und die Schnittpunkte der Berührungsgeraden t und dieser Seitenebenen mit $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$. Wählt man den Wert des Doppelverhältnisses $(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}) = p$ als charakteristische Invariante, so wird durch diese ein Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt. Durch die vorher erwähnte der Geraden t zugeordnete Raumkurve k 4. Ordnung I. Art ist auch ein tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt, der auf die oben beschriebene Weise dem Büschel polarer Räume mit gemeinsamen Polartetraeder $ABCD$ der Grundkurve k zugeordnet ist. Wie schon erwähnt, sind die Strahlen dieses Komplexes die Achsen der den Raumpunkten polar zugeordneten Ebenenbüschel im Büschel polarer Räume der Grundkurve k. In dieser polaren Zuordnung sind den Punkten der Grundkurve k, wie bekannt, deren Berührungsgeraden in diesen Punkten zugeordnet. Die Gerade t, wie auch alle andere Berührungsgeraden der Grundkurve k, sind daher Komplexstrahlen des durch die charakteristische Invariante $(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}) = p$ und das Haupttetraeder $ABCD$ bestimmten tetraedralen Strahlenkomplexes. Da der tetraedrale Strahlenkomplex vom 2. Grade ist, bilden alle seine einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen einen Kegel 2. Grades, der stets die Scheitel A, B, C, D des Komplexhaupttetraeders enthält. Ein derartiger Kegel 2. Grades des Basispunktes K_1 ist also durch die Berührungsgerade t und die Erzeugenden K_1A, K_1B, K_1C und K_1D bestimmt. Die Erzeugenden t_n dieses Kegels bilden mit der Erzeugenden $K_1 A$ einen Ebenenbüschel, und mit der Erzeugenden $K_1 B$ einen zweiten Ebenenbüschel. Ordnen wir in diesen Ebenenbüscheln die je eine Erzeugende t_n enthaltenden Ebenen einander zu, so werden diese zwei Ebenenbüschel projektiv zugeordnet, da ihr Erzeugnis der Kegel der Erzeugenden t_n und des Scheitels K_1 ist.

Ordnet man in zwei durch vier Grundpunkte bestimmten Kurvenbüscheln 2. Grades die Kurven dieser Büschel einander so zu, dass die Berührungsgeraden dieser Kurven in einem Grundpunkte des ersten Kurvenbüschels, und die Berührungsgeraden in einem Grundpunkte des zweiten Kurvenbüschels, projektiv zugeordnete Strahlenbüschel bilden, so werden auch diese zwei Kurvenbüschel 2. Grades einander projektiv zugeordnet. Das Erzeugnis zweier derartigen projektiv zugeordneten Kurvenbüschel 2. Grades ist, wie bekannt, eine Kurve 4. Ordnung. Ganz analog kann die projektive Zuordnung zweier durch vier Grunderzeugende bestimmten Kegelbüschel durchgeführt werden. Bilden die Berührungsebenen längs einer Grunderzeugenden des ersten Kegelbüschels, und die Berührungsebenen längs einer Grunderzeugenden des zweiten Kegelbüschels, zwei projektiv zugeordnete Ebenenbüschel, so bestimmen die durch die zugeordneten Berührungsebenenpaare bestimmten Kegelpaare in diesen Kegelbüscheln die projektive Zuordnung dieser zwei Kegelbüschel 2. Grades. Das Erzeugnis zweier derartigen projektiv zugeordneten Kegelbüschel 2. Grades ist, wie bekannt, eine Fläche 4. Ordnung.

Es sei die vorher erwähnte Weise die projektive Zuordnung der durch die Grunderzeugenden $A K_1 K_2$, $A K_5 K_6$, $A K_7 K_8$, $A K_3 K_4$, bzw. $B K_1 K_4$, $B K_2 K_3$, $B K_6 K_7$, $B K_5 K_8$, bestimmten Kegelbüschel der Scheitel A, B hergestellt. Das Erzeugnis dieser zwei projektiv zugeordneten Kegelbüschel ist eine Fläche 4. Ordnung, die auch durch die analog projektiv zugeordneten Kegelbüschel der Scheitel C, D, oder irgendwelchen Paares der vier Scheitel A, B, C, D, erzeugt werden kann. Diese Fläche 4. Ordnung, die mit P bezeichnet sei, enthält also die Scheitel A, B, C, D und alle acht assoziierten Basispunkte K_n $(n = 1—8)$. Diese Fläche besteht, wie wir sahen, aus ∞^1 Grundkurven k_i 4. Ordnung I. Art, von denen jede die Durchdringungskurve eines zugeordneten Kegelpaares der projektiv zugeordneten Kegelbüschel ist, der durch eine Erzeugende t_n des Komplexstrahlenkegels 2. Grades des Basispunktes K_1 bestimmt ist. Die Erzeugenden t_n sind, wie bekannt, die Strahlen des tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $ABCD$, dessen charakteristische Invariante das Doppelverhältnis $(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}) = p$ ist. Durch jede dieser Erzeugenden t_n als Berührungsgerade ist eine Grundkurve k_i 4. Ordnung eines Büschels polarer Räume bestimmt. Alle durch diese Grundkurven k_i bestimmten Büschel polarer Räume haben also den schon bekannten tetraedralen Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ gemein, dessen Strahlen auf bekannte Weise den Raumpunkten bezüglich der polaren Räume des erwähnten Büschels polar zugeordnet sind. Da die Kegelerzeugenden t_n im Punkt K_1 die Berührungsgeraden der ihnen zugeordneten Grundkurven k_i in diesem Punkte K_1 sind, hat die von den Grundkurven k_i gebildete Fläche P 4. Ordnung im Basispunkt K_1 einen Doppelpunkt, in dem diese Fläche durch den Kegel der Erzeugenden t_n, also der Komplexstrahlen, berührt wird. Da die Berührungsgeraden den der Grundkurven k_i in allen anderen Basispunkten auch Komplexstrahlen des tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $A B C D$, mit der charakteristischen Invariante $(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}) = p$ sind, also einen Kegel 2. Grades bilden, berührt die Fläche P diese Kegel auch in diesen Basispunkten. Alle acht Basispunkte K_n sind also Doppelpunkte der Fläche P. Da ferner die Fläche P als Erzeugnis je zweier der beschriebenen Kegelbüschel mit den Scheiteln A, B, C, D erhalten werden kann, befinden sich auch diese Scheitel als Doppelpunkte auf der Fläche P. Die Grunderzeugenden dieser vier Kegelbüschel befinden sich selbstverständlich als Grundkurven der Kegelbüschel auch auf der Fläche P. Auf einer derartigen Fläche P 4. Ordnung befinden sich also 12 Doppelpunkte und 16 Geraden, und jede dieser Geraden verbindet drei dieser Doppelpunkte. Ein dieser drei Doppelpunkte ist stets einer der Scheitelpunkte A, B, C, D und die zwei anderen gehören den Basispunkten K_n an. Jede dieser 16 Geraden ist eine gemeinsame Erzeugende der drei Berührungskegel der Fläche P in den drei auf dieser Geraden sich befindenden Doppelpunkten dieser Fläche.

Betrachten wir nun den Wert $p = (\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D})$ der charakteristischen Invariante unseres tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $ABCD$ als Parameter. Durch jeden Wert des Parameters $p = (\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D})$ ist ein tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt, und alle derartigen tetraedralen Strahlenkomplexe bilden, wie bekannt, einen Büschel tetraedraler Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$. Für jeden tetraedralen Strahlenkomplex dieses Komplexbüschels gelten die vorhergehenden Betrachtungen. Die die Basispunkte K_n enthaltenden Komplexstrahlen eines jeden dieser Komplexe bilden in jedem dieser Punkte einen Kegel 2. Grades, und diese Kegel berühren die diesem tetraedralen Strahlenkomplexe zugeordnete Fläche P_n in ihrem Doppelpunkten K_n $(n=1-8)$. Jede dieser Flächen P_n besteht aus ∞^1 Grundkurven k_i^n 4. Ordnung I. Art und hat ausser den Basispunkten K_n auch die Scheitel A, B, C, D zu Doppelpunkten. Die beschriebenen 16 Verbindungsgeraden der erwähnten Doppelpunktstripel befinden sich auf allen diesen Flächen P_n 4. Ordnung, und alle diese 12 Doppelpunkte sind Doppelpunkte aller dieser Flächen P_n. Die den tetraedralen Strahlenkomplexen des vorher beschriebenen Komplexbüschels zugeordneten Flächen P_n 4. Ordnung bilden also einen Flächenbüschel 4. Ordnung, dessen Grundkurve 16. Ordnung in 16 Geraden zerfällt. Die Berührungskegel dieser Flächen P_n in den gemeinsamen 12 Doppelpunkten bilden projektiv zugeordnete Kegelbüschel 2. Grades, in denen die Berührungskegel einer Fläche P_n zugeordnet sind. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Erzeugenden dieser Berührungskegel auf jeder dieser Flächen Komplexstrahlen des dieser Flächen zugeordneten tetraedralen Strahlenkomplexes sind.

Die ∞^1 Polarebenen eines Raumpunktes, bezüglich der polaren Räume eines durch eine Grundkurve 4. Ordnung I. Art bestimmten Büschels polarer Räume, haben wie bekannt, eine Gerade gemein. Alle derartigen den ∞^3 Raumpunkten zugeordneten Geraden bilden den bekannten tetraedralen Strahlenkomplex, dessen Haupttetraeder das polare Tetraeder des Büschels polarer Räume ist. Diesen tetraedralen Strahlenkomplex bezeichne man als den dem Büschel polarer Räume zugeordneten polaren tetraedralen Strahlenkomplex. Auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen und Ausführungen kann folgender Satz ausgesprochen werden: Im speziellen F^2-Bündel polarer Räume, der durch 8 assoziierte Basispunkte K_n $(n = 1-8)$ und das gemeinsame polare Tetraeder $ABCD$ bestimmt ist, sind jedem tetraedralen Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$, als polarem tetraedralen Strahlenkomplex, ∞^1 Büschel polarer Räume zugeordnet. Die Grundkurven 4. Ordnung I. Art dieser ∞^1 Büschel polarer Räume bilden eine Fläche 4. Ordnung mit 12 in den Scheiteln A, B, C, D und in den acht assoziierten Basispunkten sich befindenden Doppelpunkten. Diese Doppelpunkte liegen auf 16 Geraden dieser Fläche. Auf jeder dieser Geraden liegen drei dieser Doppelpunkte, und jeder dieser Doppelpunkte enthält vier dieser

Geraden. Alle derartigen den tetraedralen Strahlenkomplexen des Haupttetraeders $ABCD$ zugeordneten Flächen 4. Ordnung bilden einen Flächenbüschel 4. Ordnung, deren Grundkurve 16. Ordnung in 16 Geraden zerfällt, und deren Flächen alle 12 Doppelpunkte gemein haben. Die diese Flächen 4. Ordnung in diesen Doppelpunkten berührenden Kegel 2. Grades bilden 12 projektiv zugeordnete Kegelbüschel 2. Grades.

Da wir in unseren Betrachtungen die polaren Räume unseres speziellen F^2-Bündels in ∞^2 Büschel polarer Räume verteilt haben, befindet sich jeder polare Raum des F^2-Bündels in ∞^1 derartiger Büschel polarer Räume dieses Bündels. Jede Inzidenzfläche 2. Grades der polaren Räume des F^2-Bündels hat also mit jeder Fläche 4. Ordnung des erwähnten Flächenbüschels 4. Ordnung eine Grundkurve 4. Ordnung I. Art gemein. Da aber eine Fläche 2. Grades und eine Fläche 4. Ordnung sich in einer Raumkurve 8. Ordnung durchdringen, die in zwei Raumkurven zerfallen kann, hat jede Inzidenzfläche 2. Grades der polaren Räume des F^2-Bündels mit jeder der betrachteten Flächen 4. Ordnung dieses Büschels zwei Grundkurven 4. Ordnung I. Art der Büschel polarer Räume in diesem Bündel gemein.

Werden die acht assoziierten Basispunkte als Scheitel eines Parallelepipedes, oder eines Würfels, angenommen, so dass die polaren Räume des F^2-Bündels koaxial sind, bekommen auch die demselben zugeordneten beschriebenen Flächen 4. Ordnung eine symmetrische Form, und eine konzentrische und koaxiale Lage.

PRILOG SVEŽNJU PLOHA 2. STUPNJA SA ZAJEDNIČKIM POLARNIM TETRAEDROM

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Kao što svako polarno polje ima svoju incidentnu krivulju 2. stupnja, tako i svaki polarni prostor ima svoju incidentnu plohu 2. stupnja. Ova ploha može biti ili realna, ili imaginarna, ali u našim razmatranjima obuhvatit ćemo samo polarne prostore s realnim incidentnim plohama. Dvjema plohama 2. stupnja određen je pramen takvih ploha. Prodorna krivulja 4. reda I. vrste tih dviju ploha zove se temeljna krivulja tog pramena ploha. Zamislimo li svaku plohu ovog pramena kao incidentnu plohu jednog polarnog prostora, bit će pramenom tih ploha određen pramen polarnih prostora. Temeljnom krivuljom tog pramena prolaze, kao što znamo, četiri stošca 2. stupnja bisekanata te krivulje. Vrhovi A, B, C, D tih stožaca su, kao što je poznato, vrhovi zajedničkog polarnog tetraedra svih polarnih prostora tog pramena. Polarne ravnine polarnih prostora ovog pramena, pridružene nekoj točki prostora kao polu, čine

pramen nekog pravca, a svi ovakvi pravci, pridruženi na taj način točkama prostora, čine poznati kvadratni tetraedralni kompleks, kojemu je glavni tetraedar polarni tetraedar $ABCD$ tog pramena polarnih prostora. Tangente temeljne krivulje tog pramena su na taj način pridruženi pravci svojim diralištima, pa su prema tome i one zrake spomenutog tetraedralnog kompleksa.

Trima plohama 2. stupnja, od kojih nijedna ne leži u pramenu takvih ploha drugih dviju, određen je svežanj ploha 2. stupnja. Uzmemo li svaku plohu tog svežnja kao incidentnu plohu jednog polarnog prostora, imat ćemo svežanj polarnih prostora. Zadane tri plohe imaju zajedničkih osam t. zv. asociiranih temeljnih točaka tog svežnja. Svaka ploha 2. stupnja, koja na sebi ima tih osam temeljnih asociiranih točaka, nalazi se u tom svežnju, a takvih ploha ima ∞^2. Razdijelimo li plohe ovakvog svežnja u ∞^1 pramenova takvih ploha, ležat će vrhovi spomenutih polarnih tetraedara ovih ∞^1 pramenova ploha 2. stupnja na jednoj prostornoj krivulji 6. reda.

Pretpostavimo sada, da su spomenutih osam asociiranih točaka K_n vrhovi takvog nekog tijela, koje se može kolinearno preslikati u kocku. Neizmjerno daleka sjecišta četvorki pravaca usporednih bridova kocke neka su kolinearno preslikane točke A, B, C, a njeno središte neka je slika točke D. Točke A, B, C, D bit će vrhovi jednog polarnog tetraedra svih ∞^2 ploha 2. stupnja, koje prolaze ovakovom asociiranom osmorkom točaka K_n, a sve te plohe čine jedan specijalni svežanj ploha 2. stupnja, odnosno polarnih prostora, kojim ćemo se mi pobliže zabaviti.

Svakim između vrhova A, B, C, D prolaze četiri spojnice parova točaka K_n, koje mogu služiti kao temeljne izvodnice pramena stožaca 2. stupnja sa zajedničkim vrhom. Postoje dakle četiri takva pramena stožaca. Prodorna krivulja 4. reda I. vrste svakog stošca jednog tog pramena, s bilo kojim stošcem jednog od preostala tri pramena, sadrži svih osam točaka K_n, a svakom takvom krivuljom prolazi po jedan stožac svakog tog pramena stožaca. Takvih krivulja ima prema tome ∞^2, a svaka od njih je temeljna krivulja jednog pramena polarnih prostora u takvom svežnju. Tetraedar $ABCD$ je naravno polaran za svih tih ∞^2 pramenova polarnih prostora u tom svežnju. Svi na opisani način pridruženi tetraedralni kompleksi svim ovim pramenovima polarnih prostora, kojih ima ∞^2, imaju prema tome zajednički glavni tetraedar $ABCD$. Glavnim tetraedrom $ABCD$ određen je međutim samo pramen od ∞^1 tetraedralnih kompleksa. Svakom ovom tetraedralnom kompleksu pridruženo je prema tome ∞^1 pramenova polarnih prostora ovog svežnja, zajedno s njihovih ∞^1 temeljnih krivulja k_i 4. reda I. vrste. Svakim pravcem jedne temeljne točke K_n određen je po jedan stožac u svakom od spomenutih četiriju pramenova stožaca vrhova A, B, C, D, jer je taj pravac tangenta u toj točki prodorne krivulje tih četiriju stožaca, koja je dakako temeljna krivulja jednog pramena polarnih prostora našeg svežnja. Zrake svakog tetraedralnog kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$ čine u svakoj točki prostora stožac 2. stupnja, a takvi stošci svih kompleksa tog glavnog tetraedra čine u svakoj točki prostora pramen stožaca, kojemu temeljne izvodnice prolaze za svaku točku prostora vrhovima A, B, C, D, a svih tih ∞^3 pramenova su međusobno projektivno pridruženi. Izvodnicama ovakvog jednog stošca točke K_1, koje su zrake jednog tetraedralnog kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, određeno je ∞^1 parova stožaca u po dva spomenuta pramena stožaca vrhova A, B, C, D. Lako je zaključiti, da je ovakvom pridruženošću uspostavljen projektivan odnos tih dvaju pramenova stožaca, dakle će im proizvod biti ploha 4. reda, koja će se sastojati iz malo prije spomenutih ∞^1 temeljnih krivulja k_i 4. reda. Ovu plohu nazovimo $\mathbf{P}$. Stošci zraka kompleksa u svim točkama K_n diraju tu plohu $\mathbf{P}$, dakle su joj točke K_n dvostruke točke. Budući da su točke A, B, C, D vrhovi pramenova stožaca, leže i one na plohi $\mathbf{P}$ kao dvostruke točke. Spomenutih 16 temeljnih izvodnica pramenova stožaca vrhova A, B, C, D nalaze se također na plohi $\mathbf{P}$, a na svakom od tih pravaca leže po tri od dvanaest spomenutih dvostrukih točaka. Svakom od tih točaka prolaze, kao što smo vidjeli, četiri od tih pravaca.

Što vrijedi za jedan tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $ABCD$, vrijedi i za sve ostale njegove komplekse. Dakle na opisani način tetraedralnim kompleksima polarnog tetraedra $ABCD$, kao glavnog tetraedra, pridružene plohe P_n čine pramen ploha 4. reda, kojemu se je temeljna krivulja 16. reda raspala u 16 pravaca, a sve plohe tog pramena imaju 12 zajedničkih dvostrukih točaka. Na svakom tom pravcu nalaze se po tri takve dvostruke točke, a svakom tom dvostrukom točkom prolaze po četiri takva pravca. Dirni stošci u zajedničkim dvostrukim točkama čine 12 projektivno pridruženih pramenova stožaca 2. stupnja.

(Primljeno 15. VI. 1960.)