

Serijski broj II. T. 15. Zagreb 1960. Broj 2

POSEBAN OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Vilko Niče, Zagreb

*Modell der 27 Geraden einer Fläche
3. Ordnung*

Model 27 pravaca opće plohe 3. reda

Z a g r e b 1 9 6 0

Štamparski zavod „Ognjen Prica“ Zagreb, Saeska cesta 31

MODELL DER 27 GERADEN EINER FLÄCHE 3. ORDNUNG

Vilko Niče, Zagreb

Die grösste Schwierigkeit beim Aufbau eines Modells der 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung bereitet die Tatsache, dass eine Fläche 3. Ordnung sich ins Unendliche ausbreitet, und dadurch ihre Geraden zum Teil in grosser Ferne liegen können. Die weit entfernten Geraden könnten sich selbstverständlich nicht auf dem Modell befinden und dieses wäre daher unvollständig. Das Modell muss deswegen so projiziert werden, dass man im voraus weiss, dass sich alle 27 Geraden teilweise in einem beschränkten Raum befinden werden.

Es sind mehrere Arten der Erzeugung der Flächen 3. Ordnung bekannt (J. Steiner, H. Grassmann, R. Sturm, J. Majcen u. s. w.), aber mittels keiner derselben können die Lage, die Zahl und die Realität aller 27 Geraden dieser Flächen genau und leicht vorausbestimmt werden. Die bekannteste dieser Erzeugungsarten ist die Grassmannsche, die die Fläche 3. Ordnung mittels dreier kollinearen Bündel erzeugt. Es ist aber fast unmöglich die kollineare Zuordnung dieser Bündel, mittels der bekannten Strahlenquadrupel oder Ebenenquadrupel, so herzustellen, dass alle 27 Geraden reell werden und sich teilweise in einem beschränkten Raumteil befinden. In meiner Arbeit »*Contribution aux méthodes de génération des surfaces du 3^e ordre*« (Bull. Int. Acad. Yougosl., Cl. Sci. Math. Phys. Techn. 13 (1953), 75—81) wurde die Grassmannsche Erzeugungsart so abgeändert, dass anstatt der drei kollinearen Bündel S_1, S_2, S_3 , nur der Bündel S_1 und die Erzeugnisse der kollinearen Bündelpaare S_1, S_2 und S_1, S_3 betrachtet werden, unter der Voraussetzung, dass die Verbindungsgeraden $S_1 S_2$ und $S_1 S_3$ in den kollinearen Bündelpaaren sich selbst entsprechende Strahlenpaare sind. Die Erzeugnisse dieser kollinearen Bündelpaare sind, wie bekannt, lineare Kongruenzen. Die Punkte der erzeugten Fläche 3. Ordnung bekommt man hier als Schnittpunkte der Strahlen dieser zwei linearen Kongruenzen, die in den Ebenen des Bündels S_1 liegen. Anstatt durch die drei kollinearen Bündel S_1, S_2, S_3 werden also bei dieser Erzeugungsart die Flächen 3. Ordnung nur durch einen Ebenenbündel S_1 und zwei lineare Kongruenzen erzeugt, wobei die linearen Kongruenzen hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch sein können. Von den Arten dieser Kongruenzen hängt die

Realität der 27 Geraden dieser Fläche 3. Ordnung ab, da auf einer singularitätenfreien Fläche 3. Ordnung sich 27, 15, 7 oder 3 reelle Geraden befinden können. Bei der Herstellung des Modells werden wir nur die Flächen 3. Ordnung mit 27 Geraden in Betracht ziehen.

Man nehme zwei hyperbolische lineare Kongruenzen $[a b]$ und $[c d]$ im Raum so an, dass die zwei bekannten gemeinsamen Transversalen u, v der Leitgeraden a, b und c, d dieser Kongruenzen reell sind. Die Strahlen dieser Kongruenzen, die einen passend ausgewählten Bündelscheitel S_1 enthalten, werden wir mit s_1, s_2 bezeichnen. Man kann aus der oben erwähnten Arbeit ersehen, dass die Geraden a, b, c, d, u, v, s_1 und s_2 sich auf der erzeugten Fläche 3. Ordnung befinden. Es wird in dieser Arbeit weiter festgestellt, dass die Strahlen m, n der Kongruenz $[c d]$, die in den Ebenen $S_1 a$ und $S_1 b$ liegen, sowie auch die Strahlen m_1, n_1 der Kongruenz $[a b]$, die in den Ebenen $S_1 c$ und $S_1 d$ liegen, sich ebenfalls auf dieser Fläche 3. Ordnung befinden. Da in jeder Ebene zweier sich schneidenden und auf dieser Fläche sich befindenden Geraden, eine dritte Gerade dieser Fläche liegt, wird z. B. in der Ebene der Geraden a, u die Gerade $(a u)$ liegen, und auf dieselbe Weise erhält man weiter auch die Geraden $(b u), (c u), (d u), (a v), (b v), (c v)$, und $(d v)$. In der Ebene der Geraden s_1, s_2 liegt die Gerade l . Die dritte Gerade in jeder Ebene zweier sich schneidenden Geraden auf einer Fläche 3. Ordnung kann als die Verbindungslinie der Schnittpunkte dieser Ebene mit denjenigen zwei Geraden dieser Fläche erzeugt werden, welche die zwei sich kreuzenden Geraden dieser Fläche in dieser Ebene nicht schneiden. Die Gerade l ist. z. B. die in der Ebene der Geraden s_1, s_2 liegende Transversale der Geraden u, v . In den Ebenen der sich schneidenden Geradenpaare l, u und l, v befinden sich auf dieselbe Weise die Geraden r_1, r_2 . Die letzten vier Geraden $(m c), (m d), (n a)$ und $(n b)$ können ebenfalls auf diese Weise in den Ebenen der sich schneidenden Geradenpaare $m c, m d, n a$ und $n b$ erzeugt werden.

Durch diese Erzeugungsart werden also mittels der zwei hyperbolischen linearen Strahlenkongruenzen und der reellen Geraden u, v alle 27 reellen Geraden unserer Fläche 3. Ordnung erzielt. In der vorher erwähnten Arbeit wurde auch gezeigt, dass jede dritte Gerade dieser Fläche, die in der Ebene eines auf dieser Fläche sich befindenden und sich kreuzenden Geradenpaares liegt, bereits eine der 27 erzeugten Geraden ist.

Wird das Modell der 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung mittels dieser Erzeugungsart ausgeführt, so können die Lagen der Geraden a, b, c, d, s_1, s_2 , und über die Geraden a, b, c, d auch die Lagen der Geraden u, v im Raum ganz beliebig gewählt werden. Die Lagen dieser 8 Geraden im Raum können immer derart passend

gewählt werden, dass Teile der übrigen 19 Geraden der Fläche in einen nach Belieben begrenzten Raumteil fallen.

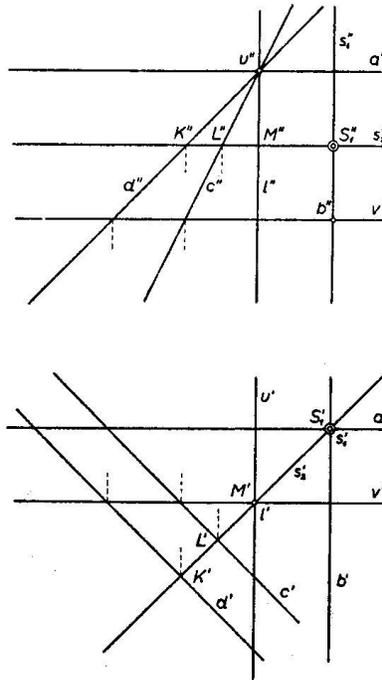


Abb. 1

Nehmen wir nun zwei senkrechte Ebenen $\pi_1 \perp \pi_2$ als Projektionsebenen der orthogonalen Projektion an. Bei der Erzeugung unseres Modells stelle man die Leitgeraden a, b so in den Raum, dass $a \parallel \pi_1$ und π_2 , und $b \perp \pi_2$ wird, während für die Geraden u, v ebenso $v \parallel \pi_1$ und π_2 , und $u \perp \pi_2$ gelten soll. (Abb. 1.) Den Bündelscheitel S_1 wähle man im Raum so, dass er sich in der gleichen und kürzesten Entfernung von den Leitgeraden a, b befindet, ferner dass $s_1 \perp \pi_1$ ist, und dass $s_2 \parallel \pi_1$ wird, sowie mit der Ebene π_2 einen Winkel von 45° bildet. Die Gerade l , die als Transversale der Geraden u, v in der Ebene der Geraden s_1, s_2 liegt, steht also auf der Ebene π_1 senkrecht ($l \perp \pi_1$). Die Leitgeraden c, d der linearen Strahlenkongruenz $[c d]$ sind als Transversalen der Geraden u, v, s_2 so gewählt, dass der Schnittpunkt K der Geraden d und der Geraden s_2 auf dieser Geraden mit dem Scheitelpunkt S_1 eine Strecke bildet, die durch den Schnittpunkt M der Geraden l auf dieser Geraden s_2 gehäuft wird, während sich der Schnittpunkt L der Geraden c auf der Geraden s_2 im Mittelpunkt der Länge KM befindet.

Da in dieser Lage mehrere Ebenen zweier sich kreuzenden Geraden unserer Fläche 3. Ordnung auf den Projektionsebenen π_1 oder π_2 senkrecht stehen, sind die dritten Geraden dieser Fläche in diesen Ebenen leicht konstruktiv zu bestimmen. Ausserdem wird eine so gewählte Fläche zu einer auf der Geraden s_2 senkrecht stehenden Ebene symmetrisch, und dadurch die Herstellung des Modells der 27 Geraden weiter erleichtert. Durch diese Symmetrie können Teile der 27 Geraden leichter in einen vorausbestimmten begrenzten Raumteil untergebracht werden, was uns auch mittels unserer Erzeugungsart und der passend gewählten Lagen wohl gelungen ist. Unser Modell (Abb. 2.) aller 27 Geraden ist ungefähr in einem 1 m^3 unter-

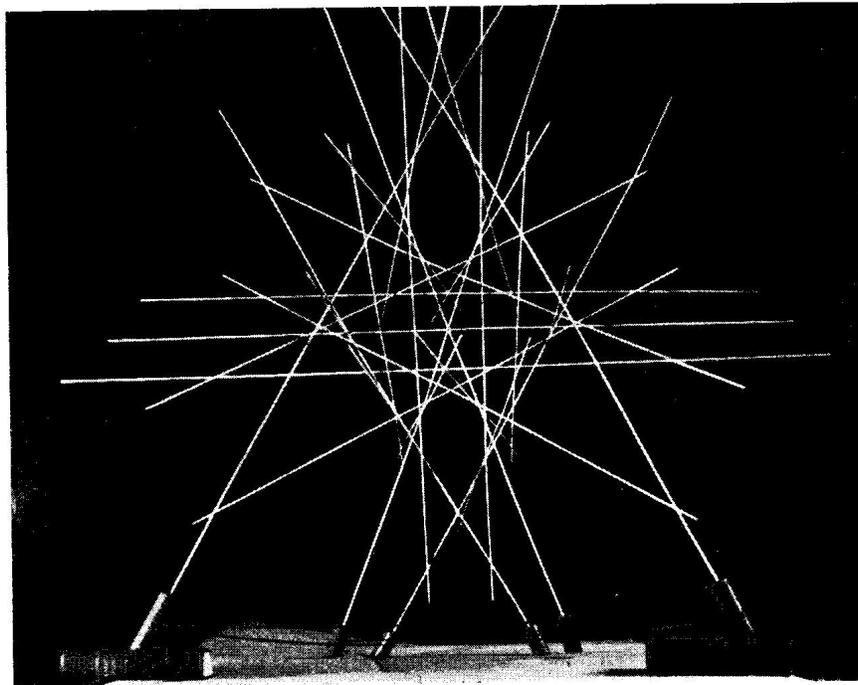


Abb. 2.

gebracht. Von den 135 bekannten Schnittpunkten dieser Geraden befinden sich auf dem Modell 101, während 15 dieser Schnittpunkte unendlich fern sind. Ausserhalb des Modells in endlicher Entfernung befinden sich also nur 19 dieser Schnittpunkte. Auf der symmetrischen Fläche 3. Ordnung unserer 27 Geraden liegen vier dreifache Berührungspunkte, von denen drei eigentliche sich auf dem Modell befinden, während der vierte in der Symmetrieebene unendlich fern liegt.

MODEL 27 PRAVACA OPĆE PLOHE 3. REDA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Opće plohe 3. reda mogu se izvesti na nekoliko raznih načina, među kojima je najčešći Grassmannov, kod kojeg se takva ploha dobiva kao proizvod triju kolinearno pridruženih svežnjeva ravnina S_1, S_2, S_3 . Međutim mi u jednom od poznatih načina izvođenja takvih ploha nije lako predvidjeti, da svih njenih 27 pravaca budu realni, a ako bi to i uspjelo, teško bi bilo sastaviti tu plohu tako, da dijelovi tih 27 pravaca padnu u neki unaprijed ograničeni dio prostora, budući da se sve ovakve plohe protežu u neizmjernost. U mojoj radnji »Prilog načinima izvođenja ploha 3. reda« preinačio sam poznati Grassmannov način izvođenja tako, da sam namjesto tri kolinearna svežnja S_1, S_2, S_3 uzeo jedan svežanj ravnina S_1 i dvije linearne kongruencije, koje možemo smatrati proizvodima kolinearno pridruženih parova svežanja S_1, S_2 i S_1, S_3 . U svakoj ravnini svežnja S_1 nalazi se po jedna zraka ovih dviju linearnih kongruencija, a njihovo sjecište je točka tražene plohe 3. reda. U spomenutoj radnji izvedeno je, da su ravnalice a, b i c, d ovih dviju kongruencija $[a, b]$, $[c, d]$, nadalje obje transverzale u, v pravaca a, b, c, d , kao i zrake s_1, s_2 tih kongruencija koje prolaze vrhom S_1 , pravci na toj na taj način izvedenoj plohi 3. reda. Ovih osam pravaca možemo prema tome zadati u prostoru po volji. Budući da u ravnini svakih dvaju pravaca ovakve plohe, koji se sijeku, leži uvijek još i treći njen pravac, dobiju se lako u tim ravninama i daljnji njeni pravci. Treći pravac u ravnini dvaju, koji se sijeku, dobije se uvijek kao transverzala daljnjih dvaju, koji ona dva u ravnini ne sijeku. Na taj smo način dokučili svih 27 pravaca opće plohe 3. red, ako su kongruencije $[a, b]$, $[c, d]$ hiperboličke i transverzale u, v realne.

Kod sastavljanja našeg modela odabrali smo ravnalice a, b kao mimosmjerne okomite pravce, a za transverzale u, v da vrijedi $a \parallel v$ i $b \parallel u$, dok je pravac s_1 najkraća transverzala pravaca a, b . Vrh S_1 svežnja ravnina odabran je u polovištu najkraće udaljenosti pravaca a, b na pravcu s_1 , dok pravac s_2 čini s pravcima a, b, u, v kut od 45° i to u položaju $s_2 \perp s_1$ (vidi sliku). Ravnalice c, d odabrane su kao transverzale pravaca u, v , koje okomito sijeku pravac s_2 .

Od 135 poznatih međusobnih sjecišta ovakvih 27 pravaca nalazi se na našem modelu 101 sjecište, dok ih je 15 neizmjereno daleko (usporedni pravci). Ploha ovako dobivenih pravaca simetrična je obzirom na jednu ravninu okomitu na pravcu s_2 , a na njoj se nalaze četiri točke trostrukog dodira. Tri su od njih na modelu, a četvrta se nalazi u neizmjernosti.

(Primljeno 3. V. 1960.)