JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI
I UMJETNOSTI

VILIM NIČE

REYEOVI TETRAEDRALNI KOMPLEKSI JEDNOG, DVAJU, TRIJU I ČETIRIJU GLAVNIH TETRAEDARA

DIE BÜSCHEL DER REYESCHEN TETRAEDRALEN STRAHLENKOMPLEXE UND IHRE PROJEKTIVE ZUORDNUNG

ZAGREB

1959

VILIM NIČE

REYEOVI TETRAEDRALNI KOMPLEKSI JEDNOG, DVAJU, TRIJU I ČETIRIJU GLAVNIH TETRAEDARA

Uvod: Pridružimo li dva prostora tako, da svakoj točki jednoga bude pridružena jedna točka drugoga i svakoj ravnini jednoga bude pridružena jedna ravnina drugoga uz uvjet, da točki jednog prostora, koja leži u jednoj njegovoj ravnini, pridružena točka u drugom prostoru leži u pridruženoj ravnini u tom prostoru, onda se takva dva prostora zovu kolinearno pridruženi prostori. Iz takve definicije kolinearnog odnosa dvaju prostora izlazi, da je svakom pravcu pridružen pravac, da su parovi pridruženih nizova točaka, pramenova pravaca i pramenova ravnina pridruženi projektivno, a parovi pridruženih polja točaka i pravaca, kao i parovi pridruženih svežanja pravaca i ravnina, da su pridruženi kolinearno. Kolinearan odnos dvaju prostora uspostavlja se tako, da pet točaka, ili ravnina, pridružimo petorci točaka, odnosno ravnina, uz uvjet, da četiri od tih točaka u svakom skupu ne leže u jednoj ravnini, odnosno četiri ravnine u svakom skupu ne prolaze jednom točkom. Poznato je, da spojnice parova pridruženih točaka dvaju kolinearnih kolokalnih prostora čine kvadratni pravčasti kompleks, koji je identičan s kompleksom presječnica parova pridruženih ravnina takvih dvaju prostora. Zna se također, da dva kolinearno pridružena prostora imaju uvijek četiri same sebi pridružene točke (dvostruke točke), koje u parovima mogu biti i konjugirano imaginarne. Odatle odmah izlazi, da takva dva prostora imaju i četiri same sebi pridružene ravnine, kao i šest pravaca, koji su sami sebi pridruženi, gdje će i ravnine i pravci biti u parovima konjugirano imaginarni, ako su takve malo prije spomenute same sebi pridružene točke. Takav se tetraedar zove glavni tetraedar spomenutog kvadratnog kompleksa. Zrake tog kvadratnog kompleksa dvaju kolinearno pridruženih prostora probadaju ravnine pobočaka njegova glavnog tetraedra tako, da istoimene četvorke točaka imaju uvijek jednake dvoomjere [1]. Pod istoimenim četvorkama točaka razumijevamo uvijek takve četvorke probodišta s pobočnim ravninama glavnog tetraedra, gdje će u tim četvorkama biti uvijek na istom mjestu probodišta s istom pobočnom ravninom. Vrijednost dvoomjera ovih četvoraka točaka jednaka je uvijek vrijednosti dvoomjera četiriju ravnina svake zrake tog kompleksa, položenih tim pobočnim ravninama nasuprotnim vrhovima tog glavnog tetraedra [2]. Ovakva konstantna vrijednost zove se karakteristična invarijanta tog kvadratnog kompleksa. Taj je kompleks otkriven od Theodora Reyea, pa se radi opisanog tetraedra i zove Reyeov tetraedralni kompleks. U ovoj ćemo radnji uz ostalo promotriti i proizvode dvaju i triju takvih kompleksa.

Egzistencija karakteristične invarijante Reyeova tetraedralnog kompleksa indirektno kaže, da je svaki takav kompleks zadan svojim glavnim tetraedrom i svojom karakterističnom invarijantom, odnosno svojim glavnim tetraedrom i jednom svojom zrakom, t. j. pravcem, koji ne siječe nijedan brid glavnog tetraedra. Sve zrake takva kompleksa, koje prolaze jednom točkom prostora, čine stožac 2. stupnja, na površini kojega se nalaze sva četiri vrha glavnog tetraedra, a sve zrake tog kompleksa, koje leže u jednoj ravnini, omataju krivulju 2. stupnja, koja dira sve četiri pobočne ravnine glavnog tetraedra [3]. Svi pravci vrhova i ravnina pobočaka glavnog tetraedra jesu zrake njegova tetraedralnog kompleksa. Budući da u prostoru ima ∞^4 pravaca, a u svakom kompleksu jednog glavnog tetraedra ima ih ∞^3, to sve pravce prostora možemo smjestiti u ∞^1 Reyeovih tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra. Takvih ∞^1 kvadratnih Reyeovih tetraedralnih kompleksa jednog zajedničkog glavnog tetraedra čine pramen takvih kompleksa, kojega osobine ćemo istražiti u ovoj radnji. Osim toga ćemo između dva, tri i četiri takva pramena Reyeovih tetraedralnih kompleksa uspostaviti projektivan odnos i odrediti njihove proizvode.

1. *Neke zadaće u vezi s dva i tri* Reyeova *tetraedralna kompleksa.* Zadamo li dva Reyeova tetraedralna kompleksa s dva različita glavna tetraedra, postoji u prostoru ∞^2 pravaca, koji će biti zrake tog jednog i drugog kompleksa. Sve te zrake čine kongruenciju, koja je proizvod tih dvaju kompleksa. Budući da se stošci 2. stupnja zraka tih dvaju kompleksa svake točke prostora prodiru u četiri izvodnice, a envelope 2. stupnja zraka tih dvaju kompleksa u svakoj ravnini prostora imaju četiri zajedničke tangente, bit će zajednička kongruencija tih dvaju kompleksa kongruencija 4. reda i 4. razreda.

Znamo, da je svaki Reyeov tetraedralni kompleks zadan svojim glavnim tetraedrom i jednom svojom zrakom [4]. Na temelju poznatih osobina Reyeovih tetraedralnih kompleksa i malo prije spomenutog možemo napisati ovo: Zadajmo dva tetraedra, kod kojih nijedan vrh jednoga ne leži ni u jednoj pobočnoj ravnini drugoga i nijedan brid jednoga ne siječe nijedan brid drugoga. Njihove vrhove označimo s A_1, B_1, C_1, D_1 i A_2, B_2, C_2, D_2, a njima nasuprotne pobočne ravnine s $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ i $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$. Neki pravac neka probada ravnine tih pobočaka u točkama $A_1^1, B_1^1, C_1^1, D_1^1$, odnosno $A_2^1, B_2^1, C_2^1, D_2^1$.

Svi pravci prostora, koji ravnine tih pobočaka probadaju u točkama A_1^n, B_1^n, C_1^n, D_1^n, odnosno A_2^n, B_2^n, C_2^n, D_2^n tako, da vrijedi $(A_1^n B_1^n C_1^n D_1^n) = (A_1^1 B_1^1 C_1^1 D_1^1)$ i $(A_2^n B_2^n C_2^n D_2^n) = (A_2^1 B_2^1 C_2^1 D_2^1)$, čine kongruenciju 4. reda i 4. razreda. Označimo li ravnine postavljene zadanim pravcem i vrhovima A_1, B_1, C_1, D_1 sa α_1^1, β_1^1, γ_1^1, δ_1^1, a one postavljene tim pravcem i vrhovima A_2, B_2, C_2, D_2 sa α_2^1, β_2^1, γ_2^1, δ_2^1, ravnine pak postavljene zrakama spomenute kongruencije i tim vrhovima označimo s α_1^n, β_1^n, γ_1^n, δ_1^n, odnosno α_2^n, β_2^n, γ_2^n, δ_2^n, tada će za sve zrake naprijed spomenute kongruencije vrijediti $(\alpha_1^n \beta_1^n \gamma_1^n \delta_1^n) = (\alpha_1^1 \beta_1^1 \gamma_1^1 \delta_1^1) = (A_1^1 B_1^1 C_1^1 D_1^1) = (A_1^n B_1^n C_1^n D_1^n)$ i $(\alpha_2^n \beta_2^n \gamma_2^n \delta_2^n) = (\alpha_2^1 \beta_2^1 \gamma_2^1 \delta_2^1) = (A_2^1 B_2^1 C_2^1 D_2^1)$.

Posve je razumljivo, da pravac, kojim su uz oba glavna tetraedra zadana oba REYEova tetraedralna kompleksa, može postojati i tako, da bude $(A_1^1 B_1^1 C_1^1 D_1^1) = (A_2^1 B_2^1 C_2^1 D_2^1)$. Malo prije spomenuti stavak moguće je prema tome napisati i u ovom obliku: Svi pravci prostora, koji dvije grupe od po četiri ravnine α_1, β_1, γ_1, δ_1, i α_2, β_2, γ_2, δ_2, probadaju u istoimenim četvorkama točaka A_1^n, B_1^n, C_1^n, D_1^n i A_2^n, B_2^n, C_2^n, D_2^n tako, da njihovi dvoomjeri imaju uvijek istu zadanu vrijednost, t. j. $(A_1^n B_1^n C_1^n D_1^n) = (A_2^n B_2^n C_2^n \mathrm{D}_2^n) =$ konst., čine kongruenciju 4. reda i 4. razreda. Ili ovako: Svi pravci prostora, ako uopće postoje, kojima ravnine, koje prolaze točkama A_1, B_1, C_1, D_1 i A_2, B_2, C_2, D_2 dviju grupa od po četiri točke tako, da one čine četvorke ravnina α_1^n, β_1^n, γ_1^n, δ_1^n i α_2^n, β_2^n, γ_2^n, δ_2^n kojima istoimeni dvoomjeri imaju uvijek istu zadanu vrijednost, t. j. $(\alpha_1^n \beta_1^n \gamma_1^n \delta_1^n) = (\alpha_2^n \beta_2^n \gamma_2^n \delta_2^n) =$ konst., jesu zrake kongruencije 4. reda i 4. razreda. Na temelju naših dosadašnjih opisa očito izlazi, da taj prvi i drugi stavak vrijedi za istu kongruenciju.

Dva REYEova tetraedralna kompleksa sa zajedničkim glavnim tetraedrom, ako nisu identični, imaju zajedničku kongruenciju, koja se raspada u četiri snopa pravaca vrhova zajedničkog glavnog tetraedra i četiri polja pravaca u ravninama pobočaka tog tetraedra.

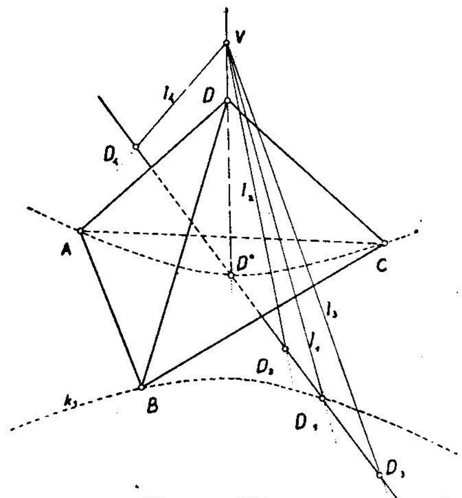
Zadamo li s tri glavna tetraedra i jednom po volji odabranom zrakom tri REYEova tetraedralna kompleksa, tada će analogni proizvod onome od malo prije tih triju kompleksa biti pravčasta ploha 16. stepena, budući da zajedničke zrake triju kompleksa n-tog stepena, čine pravčastu plohu $2 \cdot n^3$-tog stepena, ako oni ne sadržavaju jednu zajedničku kongruenciju n^2-tog reda i razreda. Kako naša tri kompleksa nemaju zajedničku kongruenciju 4. reda i razreda, možemo napisati i ovaj stavak: Svi pravci prostora, koji pobočne ravnine α_1, β_1, γ_1, δ_1 te α_2, β_2, γ_2, δ_2 i α_3, β_3, γ_3, δ_3 triju tetraedara $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$ i $A_3 B_3 C_3 D_3$ probadaju u istoimenim četvorkama točaka A_1^n, B_1^n, C_1^n, D_1^n odnosno A_2^n, B_2^n, C_2^n, D_2^n odnosno A_3^n, B_3^n, C_3^n, D_3^n tako, da dvoomjeri tih četvorki imaju uvijek neku istu zadanu vrijednost, t. j. $(A_1^n B_1^n C_1^n D_1^n) = (A_2^n B_2^n C_2^n D_2^n) = (A_3^n B_3^n C_3^n D_3^n) =$ konst., čine neku pravčastu plohu 16. stupnja. Na temelju opisanih osobina REYEovih tetraedralnih kompleksa očito je i ovdje, da istoimene četvorke ravnina položenih pravcima (izvodnicama) te plohe i nasuprotnim istoimenim vrhovima tih triju tetraedara, čine dvoomjere, kojima je vrijednost jednaka naprijed spomenutoj konstanti.

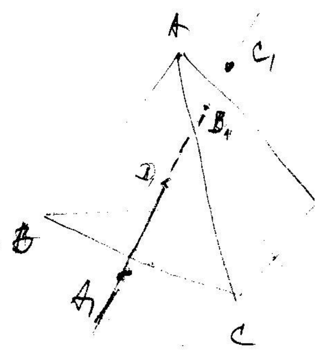
Budući da svakim vrhom jednog glavnog tetraedra prolazi stožac zraka 2. stupnja drugog i trećeg tetraedralnog kompleksa, koji se prodiru u četiri zrake koje su zrake i prvog tetraedralnog kompleksa, to očito izlazi, da su vrhovi svih triju glavnih tetraedara četverostruke točke naprijed spomenute pravčaste plohe 16. stupnja. U našim ramatranjima ne bi se dakako ništa izmijenilo, kada bi tri u početku spomenuta jednaka dvoomjera istoimenih četvorki probodišta zadanog pravca s pobočkama zadanih tetraedara imala različite vrijednosti, koje bi za sve izvodnice naše pravčaste plohe 16. stupnja za svaki tetraedar ostale iste. Za zadana tri tetraedra pretpostavlja se, da nijedan vrh jednoga ne leži u pobočkama drugih dvaju, da nijedan brid jednoga ne siječe bridove drugih dvaju i da po tri vrha ne leže na jednom pravcu, kao ni da tri pobočne ravnine ne sadržavaju jedan pravac.

2. *Pramen* REYEOvih *tetraedralnih kompleksa jednog zajedničkog glavnog tetraedra.* Spomenuli smo, da je REYEOv tetraedralni kompleks 2. stupnja, kao i to, da su pravci svih četiriju vrhova njegova glavnog tetraedra njegove zrake. Odatle izlazi, da stožac 2. stupnja zraka tog kompleksa, koje prolaze svakom točkom prostora, sadržava i sve četiri spojnice svake ove točke s vrhovima glavnog tetraedra. Zadajmo REYEOv tetraedralni kompleks njegovim glavnim tetraedrom $ABCD$ i jednom zrakom l_1, koja neka ravnine pobočaka ABC, BCD, CDA i DAB probada u točkama D_1, A_1, B_1 i C_1. O REYEOvu tetraedralnom kompleksu poznato je i to, da su zrake pramenova zraka (A_1), (B_1), (C_1), (D_1) u ravninama $(l_1 A)$, $(l_1 B)$, $(l_1 C)$, $(l_1 D)$, kojima su vrhovi probodišta A_1, B_1, C_1, D_1, zrake tog kompleksa [5]. Spojimo li prema tome bilo koju točku V pravca l_1 s vrhovima A, B, C, D, tad je tim pravcem i s tim spojnicama određen stožac 2. stupnja zraka tog tetraedralnog kompleksa, koje prolaze točkom V. Spojnica VD neka probada ravninu pobočke ABC u točki D^0. Sl. 1. Stožac zraka našeg tetraedralnog kompleksa, koje prolaze točkom V, sjeći će ravninu pobočke ABC u čunjosječnici k_1, koja će biti određena točkama A, B, C, D^0, D_1. Svakom zrakom ovog stošca zadan je isti REYEOv tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $ABCD$. Postavimo li točkom V neki novi pravac l_2, koji nije izvodnica spomenutog stošca, a koji probada ravninu pobočke ABC u točki D_2, bit će tim pravcem određen novi REYEOv tetraedralni kompleks istog glavnog tetraedra $ABCD$, kojega će stožac zraka vrha V sjeći ravninu pobočke ABC u novoj čunjosječnici k_2, koja bi bila određena točkama A, B, C, D^0, D_2. Svakom zrakom (izvodnicom) ovog stošca bit će određen opet taj isti novi REYEOv tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $ABCD$. Sve pravce točke V možemo prema tome svrstati u ∞^1 stožaca 2. stupnja, kojima su spojnice $VA, VB, VC, VD \equiv VD^0$ zajedničke izvodnice, dakle oni čine pramen stožaca 2. stupnja sa zajedničkim vrhom. Budući da to vrijedi za svaku točku prostora, vidimo, da *sve pravce*

prostora možemo svrstati u ∞^1 Reyeo*vih tetraedralnih kompleksa jednog zajedničkog glavnog tetraedra tako, da stošci 2. stupnja zraka tih kompleksa u svakoj točki prostora čine pramen takvih stožaca, koji je određen spojnicama svake te točke s vrhovima zajedničkog glavnog tetraedra kao njegovim temeljnim izvodnicama.*

Znamo, da su svi pravci u ravninama pobočaka jednog glavnog tetraedra zrake svih Reyeovih tetraedralnih kompleksa tog glavnog tetraedra, kao i to, da zrake Reyeova tetraedralnog kompleksa u svakoj ravnini prostora omataju krivulju 2. stupnja. Svaki pravac u nekoj ravnini prostora određuje dakle sa četiri njene presječnice s ravninama pobočaka glavnog tetraedra krivulju 2. stupnja, kojoj su sve njene tangente zrake istog Reyeova tetraedralnog kompleksa određenog onom prvom zrakom.





Sl. 1. – Abb. 1.

Pravaca u ravnini ima ∞^2, pa ih prema tome možemo rasporediti u ∞^1 skupina po ∞^1 pravaca, od kojih svaka skupina omata jednu krivulju 2. stupnja, a sve te krivulje imaju opisane četiri presječnice kao zajedničke tangente. Vidimo dakle, da zrake ∞^1 Reyeovih tetraedralnih kompleksa jednog zajedničkog glavnog tetraedra omataju u svakoj ravnini prostora krivulje 2. stupnja jednog pramena takvih krivulja, koji je određen sa četiri temeljne tangente.

3. *Prva osobina pramena* Reyeo*vih tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra.* Prije razmatranja nagoviještene osobine opisanog pramena tetraedralnih kompleksa, sjetit ćemo se nekih poznatih osobina pramena krivulja 2. stupnja. Znamo, da pramen krivulja 2. stupnja čine sve takve krivulje u jednoj ravnini, koje prolaze četirma njenim točkama, a od kojih po dvije mogu biti i konjugirano imaginarne. Te se točke zovu temeljne točke tog pramena krivulja 2. stupnja. Svi pravci ravnine pramena krivulja 2. stupnja, koji prolaze bilo kojom temeljnom točkom tog pramena, sijeku taj pramen u projektivno pridruženim ni-

zovima, kod kojih parovi pridruženih točaka leže uvijek na istim krivuljama [6]. Iz te činjenice izlazi ovo: Ako jedan pravac jedne temeljne točke nekog pramena krivulja 2. stupnja siječe četiri krivulje tog pramena u harmonijskoj četvorci točaka, onda svi pravci te i ostalih triju temeljnih točaka sijeku te četiri krivulje u harmonijskim četvorkama točaka. Lako je dokazati, da tangente tih četiriju krivulja u temeljnim točkama pramena čine harmonijsku četvorku pravaca. Takve četiri krivulje nekog pramena krivulja 2. stupnja čine, kao što je poznato, harmonijsku četvorku krivulja tog pramena.

Vratimo se sada pramenu tetraedralnih kompleksa našeg poznatog glavnog tetraedra $ABCD$. Budući da sve zrake pramena zraka (D_1) vrha D_1 u ravnini $(D_1 VD^0)$ pripadaju REYEovu tetraedralnom kompleksu glavnog tetraedra $ABCD$, koji je određen zrakom l_1, prolazit će stošci zraka tog kompleksa svih vrhova V_n na pravcu VD istom krivuljom 2. stupnja u ravnini pobočke ABC, i to onom, koja je određena točkama A, B, C, D^0, D_1. Sl. 1. Razumije se, da će posve analogno i stošci zraka tog kompleksa, kojima se vrhovi nalaze na spojnicama VA, VB i VC, imati u ravninama pobočaka BCD, ACD i ABD zajedničke osnovke, jer smo namjesto osnovke ABC i njena nasuprotnog vrha D mogli odabrati bilo koju od preostale tri s njenim nasuprotnim vrhom. Odatle se također lako razabira, da je svaki REYEov tetraedralni kompleks određen glavnim tetraedrom, jednim pravcem jednog vrha tog tetraedra i jednom točkom u ravnini nasuprotne pobočke tom vrhu.

U ravnini pobočke ABC našeg glavnog tetraedra odaberimo sada jednu harmonijsku četvorku krivulja unutar pramena takvih krivulja, kojemu su A, B, C, D^0 temeljne točke. Spojnica $D^0 D_1$ neka siječe tu harmonijsku četvorku krivulja recimo u točkama D_1, D_2, D_3, D_4, za koje će vrijediti, kao što znamo, $(D_1 D_4 D_2 D_3) = -1$. Smatramo li te četiri krivulje osnovkama stožaca, kojima je točka V zajednički vrh, tada su izvodnice svakog tog stošca zrake jednog REYEova tetraedralnog kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$. Ta su četiri kompleksa određena, kao što smo u početku spomenuli, glavnim tetraedrom $ABCD$ i spojnicama VD_1, VD_4, VD_2, VD_3 kao njihovim zrakama, a spomenuta četiri stošca čine, kao što znamo, harmonijsku četvorku stožaca 2. stupnja. Na temelju malo prije spomenutih osobina pramena krivulja 2. stupnja, sjeći će svaka ravnina zajedničkih izvodnica VA, VB, VC, VD te harmonijske četvorke stožaca tu četvorku u harmonijskoj četvorci pravaca vrha V. Uzmemo li sada u obzir ono, što smo kazali za sve točke V_n na spojnici VD, kao i na spojnicama VA, VB i VC, dobivamo na temelju dosadašnjih razmatranja, kao i spomenutih osobina pramena krivulja 2. stupnja, ovo: Ako stošci zraka četiriju REYEovih tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, koje prolaze jednom točkom V prostora, čine harmonijsku četvorku stožaca, onda takve harmonijske četvorke stožaca 2. stupnja čine i sve one zrake tih četiriju REYEovih tetraedralnih kompleksa, koje prolaze svim točkama spojnica VA, VB, VC i VD.

Spomenuli smo, da harmonijsku četvorku krivulja 2. stupnja, unutar jednog pramena takvih krivulja, siječe svaki pravac svake temeljne točke tog pramena u harmonijskoj četvorci točaka. Odatle očito izlazi, da će harmonijska četvorka krivulja 2. stupnja biti određena sa svoje četiri temeljne točke i jednom harmonijskom četvorkom točaka na bilo kojem pravcu bilo koje temeljne točke. Malo prije smo kazali, da su spojnicama $VD_1 = 1_1$, $VD_2 = 1_2$, $VD_3 = 1_3$ i $VD_4 = 1_4$ određena četiri REYEova tetraedralna kompleksa zajedničkog glavnog tetraedra $ABCD$, kojih stošci zraka u svim točkama spojnice VD, kao i spojnica VA, VB i VC, čine harmonijske četvorke stožaca 2. stupnja. Budući da zrake pramenova zraka vrhova D_1, D_2, D_3, D_4 u ravnini $(1_1 D)$ pripadaju kao zrake onim REYEovim tetraedralnim kompleksima glavnog tetraedra $ABCD$, koji su određeni tim vrhovima i spojnicom VD, to će spojnice bilo koje točke V^i u ravnini $(1_1 D)$ s vrhovima D_1, D_4, D_2, D_3 određivati ta ista četiri REYEova tetraedralna kompleksa tog glavnog tetraedra. Radi $(D_1 D_4 D_2 D_3) = -1$ činit će i spojnice te četvorke točaka s točkama V^i u ravnini $(1_1 D)$ harmonijske četvorke izvodnica onih harmonijskih četvorki stožaca 2. stupnja, koji su određeni s tom harmonijskom četvorkom izvodnica i spojnica V^iA, V^iB, V^iC, V^iD kao temeljnim izvodnicama. Očito je, da to isto vrijedi i za sve točke V^i u ravninama $(l_1 A)$, $(l_1 B)$, $(l_1 C)$, jer smo namjesto spojnice VD i pobočke ABC mogli odabrati spojnice VA, VB, VC i njima nasuprotne pobočke BCD, ACD, ABD, a kao što znamo, sve ravnine tih spojnica sijeku našu harmonijsku četvorku stožaca vrhova V^i u harmonijskim četvorkama izvodnica. Izlazi dakle: Ako stošci zraka četiriju REYEovih tetraedralnih kompleksa čine harmonijsku četvorku stožaca 2. stupnja u jednoj točki ravnine $(l_1 D)$, onda takvi stošci tih četiriju tetraedralnih kompleksa čine harmonijske četvorke takvih stožaca u svim točkama ravnina $(l_1 D)$, $(l_1 A)$, $(l_1 B)$ i $(l_1 C)$.

Spomenuli smo već, da svaki pravac n točke D^0 u ravnini ABC siječe harmonijsku četvorku krivulja 2. stupnja, određenih temeljnim točkama A, B, C, D^0 i harmonijskom četvorkom točaka $(D_1 D_4 D_2 D_3) = -1$, u harmonijskoj četvorci sjecišta. Ta harmonijska četvorka sjecišta svakog pravca n spojena s točkom V daje harmonijsku četvorku pravaca te točke, kojom su određena ona četiri ista REYEova tetraedralna kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$ od malo prije. Uzmemo li i ovdje te harmonijske četvorke sjecišta kao vrhove pramenova zraka u ravninama (nD), onda će sve zrake i tog svakog pramena biti zrake onog REYEova tetraedralnog kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, koji je na prije opisani način pridružen vrhu tog pramena. Što je prema tome vrijedilo za sve točke V^i u ravnini $(l_1 D)$, to će vrijediti i za sve točke V^i u svim ravninama (nD). Odnosno, ako stošci 2. stupnja zraka četiriju REYEovih tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, koje prolaze jednom točkom V, čine harmonijsku četvorku takvih stožaca, onda stošci zraka tih četiriju REYEovih tetraedralnih kompleksa za svaki zajednički vrh u ravninama (nD) čine harmonijske četvorke stožaca 2. stupnja. Budući da svaka točka prostora leži u ravnini jednog pravca n i točke D, to vidimo, da za četiri REYEova tetraedralna kompleksa jednog zajedničkog glavnog tetraedra možemo napisati ovaj stavak:

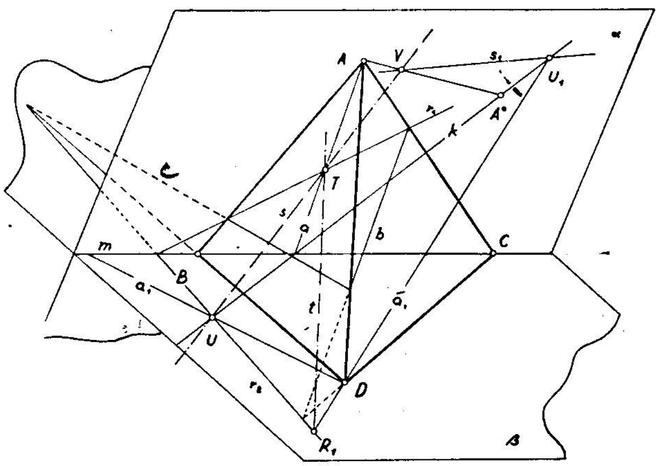
Ako zrake četiriju REYE*ovih tetraedralnih kompleksa jednog zajedničkog glavnog tetraedra, koje prolaze jednom točkom prostora, čine harmonijsku četvorku stožaca 2. stupnja, onda takve harmonijske četvorke stožaca 2. stupnja čine zrake tih četiriju* REYE*ovih tetraedralnih kompleksa u svakoj točki prostora.*

Mi ćemo odsada reći, da takva četiri REYEova tetraedralna kompleksa jednog zajedničkog glavnog tetraedra čine *harmonijsku četvorku takvih kompleksa.* Očito je, da to, što vrijedi za harmonijsku četvorku REYEovih tetraedralnih kompleksa, vrijedi za svaku drugu četvorku takvih kompleksa, bez obzira na vrijednost njenih dvoomjera.

4. *Druga osobina pramena tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra.* Preslikamo li korelativno pramen krivulja 2. stupnja zadan sa četiri temeljne točke, dobit ćemo pramen krivulja 2. stupnja zadan sa četiri temeljne tangente. Na temelju činjenice, da su korelativno pridruženi nizovi točaka i pramenovi pravaca, kao i obrnuto, pridruženi projektivno, izlazi, da će harmonijskoj četvorci krivulja 2. stupnja u pramenu takvih krivulja određenom sa četiri temeljne točke, biti u korelativno pridruženom pramenu krivulja 2. stupnja pridružene takve četiri krivulje 2. stupnja, koje će temeljne tangente tog pramena dirati u harmonijskoj četvorci točaka. Poznato je također, da iz svake točke temeljne tangente povučene tangente na takve četiri krivulje čine uvijek harmonijsku četvorku pravaca. Takve četiri krivulje u takvu pramenu krivulje 2. stupnja, čine također harmonijsku četvorku krivulja 2. stupnja.

Zadamo li dva projektivno pridružena pramena pravaca $(A) \overline{\wedge} (D)$, koji ne leže u istoj ravnini, tad znamo, da transverzale parova pridruženih zraka tih dvaju pramenova čine REYEov tetraedralni kompleks [7]. Neka se ravnine α, β takvih dvaju projektivno pridruženih pramenova pravaca sijeku u pravcu m. Sl. 2. Pramenovi pravaca (A), (D) sijeku pravac m u dva kolokalna projektivna niza, kojima neka su točke B, C dvostruke točke. Poznato je, da su točke A, B, C, D vrhovi glavnog tetraedra spomenutog REYEova tetraedralnog kompleksa. Zadamo li na pravcu m točke B, C po volji, bit će u projektivno pridruženim pramenovima $(A) \overline{\wedge} (D)$ zrakama AB, AC prvog pramena pridružene zrake DB, DC drugog pramena, dakle je dovoljno u tim pramenovima zadati još jedan par pridruženih zraka, da projektivan odnos bude uspostavljen. Neka su to zraka a u pramenu (A) i zraka a_1 u pramenu (D). Pridružimo li sada zraci a pramena (A) neku novu zraku $\bar{a}_1$ pramena (D), bit će uz iste točke B, C uspostavljen novi projektivan odnos pramenova (A), (D), kojim će biti određen i novi REYEov tetraedralni kompleks istog glavnog tetraedra $ABCD$. Svi takvi dobiveni REYEovi tetraedralni kompleksi, njih ∞^1, čine naš već poznati pramen tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$.

Jedna po volji odabrana ravnina ϱ neka siječe ravninu α pramena (A) u pravcu r_1, a ravninu β pramena (D) u pravcu r_2. Spojnica s sjecišta T pravaca r_1, a i sjecišta U pravaca r_2, a_1 jest zraka REYEova tetraedralnog kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, određenog na opisani način parom zraka a, a_1, budući da je ona transverzala tih zraka. Sve zrake tog REYEova tetraedralnog kompleksa, koje leže u ravnini ϱ omataju, kao što je poznato, krivulju 2. stupnja. Ta je krivulja određena tangentama r_1, r_2, s, b, c, gdje su pravci b, c presječnice ravnine ϱ s ravninama pobočaka ACD i ABD. Odaberimo sada na zraci s po volji neku točku V. Spojnica te točke s vrhom A probadat će ravninu α u točki A^0, koja će ležati na spojnici k točke U sa sjecištem pravaca m, a.



Sl. 2. – Abb. 2.

Zrake REYEova tetraedralnog kompleksa, određenog glavnim tetraedrom $ABCD$ i parom pridruženih zraka a, a_1 na opisani način, koje prolaze točkom V, čine stožac 2. stupnja, koji ravninu β siječe u krivulji 2. stupnja, određenoj točkama A^0, B, C, D, U. U ravnini (Vk) točke V i pravca k, u kojoj se nalazi i zraka a pramena (A), povucimo točkom V po volji pravac s_1. Ovim pravcem s_1 i glavnim tetraedrom $ABCD$ određen je novi REYEov tetraedralni kompleks ovog glavnog tetraedra, kojega će zrake, koje prolaze točkom V, činiti novi stožac 2. stupnja, koji će ravninu β sjeći u novoj krivulji 2. stupnja. Ta će krivulja biti određena točkama B, C, D, A^0, U_1, gdje je U_1 probodište zrake s_1 s ravninom β. Spojimo sada točku U_1 s vrhom D i neka ta spojnica $\bar{a}_1$ bude zraka pramena (D). Odredimo li projektivan odnos pramenova (A), (D) uz iste točke B, C tako, da zrake a, $\bar{a}_1$ čine uz AB–DB i AC–DC pridružen par, tad će tim novim projektivnim odnosom pramenova (A), (D) biti određen upravo onaj novi REYEov tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $ABCD$, koji je određen i zrakom s_1. Spojimo li pravcem t

točku T sa sjecištem R_1 zrake $\bar{a}_1$ i pravca r_2, bit će taj pravac t zraka tog novog REYEova tetraedralnog kompleksa u ravnini ϱ, budući da je on transverzala zraka a, $\bar{a}_1$, koja leži u ravnini ϱ. Krivulja 2. stupnja, koju omataju zrake tog novog REYEova tetraedralnog kompleksa u ravnini ϱ, bit će određena tangentama r_1, r_2, b, c i t.

Zamislimo sada u ravnini (Vk) točkom V povučene četiri zrake s_1, s_2, s_3, s_4 tako, da bude $(s_1 s_2 s_3 s_4) = -1$. Sjecišta U_1, U_2, U_3, U_4 tih zraka s pravcem k daju harmonijsku četvorku točaka U_1, U_2, U_3, U_4, koja spojena s vrhom D daje harmonijsku četvorku zraka $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ pramena (D). Ta harmonijska četvorka zraka siječe pravac r_2 u harmonijskoj četvorci točaka R_1, R_2, R_3, R_4, koja spojena s točkom T daje harmonijsku četvorku pravaca t_1, t_2, t_3, t_4 u ravnini ϱ, gdje su pravci t_1, t_2, t_3, t_4 zrake onih četiriju REYEovih tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, koji su određeni zrakama s_1, s_2, s_3 i s_4. Na temelju naših prijašnjih razmatranja znamo, da je harmonijskom četvorkom pravaca s_1, s_2, s_3, s_4 određena harmonijska četvorka REYEovih tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, budući da ravnina te četvorke pravaca prolazi vrhom A. Malo prije smo vidjeli, da zrake te harmonijske četvorke REYEovih tetraedralnih kompleksa, koje leže u ravnini ϱ i prolaze točkom T na pravcu r_1, čine harmonijsku četvorku pravaca t_1, t_2, t_3, t_4. Budući da zrake REYEovih tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$ omataju u ravnini ϱ pramen krivulja 2. stupnja, određen temeljnim tangentama r_1, r_2, b, c, to će radi $(t_1 t_2 t_3 t_4) = -1$, a na temelju razmatranja na početku ove točke 4, one četiri krivulje 2. stupnja, koje u ravnini ϱ omataju zrake onih REYEovih tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, koji su određeni zrakama s_1, s_2, s_3, s_4, činiti također harmonijsku četvorku. Odnosno dobivamo ovo:

Zrake svake harmonijske četvorke REYE*ovih tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra, koje prolaze bilo kojom točkom prostora, čine harmonijsku četvorku stožaca 2. stupnja, kojoj temeljne izvodnice prolaze vrhovima glavnog tetraedra. Zrake te harmonijske četvorke tetraedralnih kompleksa omataju u svakoj ravnini prostora harmonijsku četvorku krivulja 2. stupnja sa četiri zajedničke temeljne tangente, koje leže u pobočnim ravninama glavnog tetraedra.*

Očito je, da isto to vrijedi za svaku drugu četvorku REYEovih tetraedralnih kompleksa unutar pramena takvih kompleksa jednog glavnog tetraedra, a ne samo za harmonijske četvorke. Opisani dvoomjer stožaca zraka takvih četiriju REYEovih tetraedralnih kompleksa u svakoj točki prostora, kojega vrijednost je jednaka vrijednosti pridruženog dvoomjera četiriju pridruženih krivulja 2. stupnja, omotanih od zraka tih istih tetraedralnih kompleksa u svakoj ravnini prostora, zvat ćemo *dvoomjerom tih četiriju* REYE*ovih tetraedralnih kompleksa* u tom pramenu.

5. *Projektivan odnos dvaju i više pramenova* REYE*ovih tetraedralnih kompleksa.* U prošloj točki 4 izveli smo, da stošci 2. stupnja zraka četiriju REYEovih tetraedralnih kompleksa jednog zajedničkog glavnog

tetraedra u svim točkama prostora čine takve četvorke tih stožaca, kojima istoimene četvorke imaju istu vrijednost dvoomjera. Pod istoimenim dvoomjerima četvorki stožaca u svim točkama prostora razumijevaju se i ovdje takvi dvoomjeri, gdje na istom mjestu takvih dvoomjera stoje uvijek stošci istog REYEova tetraedralnog kompleksa. Analogno tome vrijedi i za četvorku krivulja 2. stupnja, koje omataju zrake malo prije spomenute četvorke tetraedralnih kompleksa, u svakoj ravnini prostora. Istoimeni dvoomjeri takvih četiriju stožaca svake točke prostora i njima pridruženi dvoomjeri pridruženih četiriju krivulja 2. stupnja u svakoj ravnini prostora, imaju uvijek, kao što smo vidjeli, jednake vrijednosti.

Zadajmo pomoću dva glavna tetraedra na opisani način dva pramena REYEovih tetraedralnih kompleksa. Trima kompleksima u prvom pramenu pridružimo recipročno jednoznačno tri kompleksa u drugom pramenu. Na taj smo način trima stošcima 2. stupnja zraka prvih triju tetraedralnih kompleksa u prvom pramenu u svakoj točki prostora pridružili recipročno jednoznačno tri takva stošca zraka pridruženih triju tetraedralnih kompleksa u drugom pramenu, gdje će prva trojka tih stožaca imati četiri zajedničke izvodnice, koje prolaze vrhovima glavnog tetraedra prvog pramena kompleksa, a druga trojka stožaca svoje četiri zajedničke izvodnice, koje prolaze vrhovima glavnog tetraedra drugog pramena kompleksa. Trima krivuljama 2. stepena u svakoj ravnini prostora, koje omataju zrake odabranih triju kompleksa u prvom pramenu, bit će recipročno jednoznačno pridružene tri takve krivulje u toj ravnini, koje omataju zrake pridruženih triju kompleksa u drugom pramenu. Prva trojka tih krivulja 2. stupnja ima svoje četiri zajedničke tangente, a druga trojka takvih krivulja ima svoje četiri zajedničke tangente, koje su u prvom slučaju presječnice s ravninama pobočaka glavnog tetraedra prvog pramena tetraedralnih kompleksa, a u drugom slučaju presječnice s ravninama pobočaka glavnog tetraedra drugog takva pramena kompleksa. Zadamo li sada u prvom pramenu kompleksa po volji neki četvrti REYEov tetraedralni kompleks, činit će stošci zraka tog kompleksa u svim točkama prostora sa stošcima zraka prvih triju kompleksa prvog pramena u svim tim točkama četvorke stožaca 2. stupnja, kojih će istoimene četvorke imati jednake vrijednosti dvoomjera. Postavimo li sada u jednoj točki prostora zajedničkim izvodnicama trojke stožaca zraka zadanih triju kompleksa drugog pramena takav stožac, koji će s prva tri činiti četvorku, kojoj će vrijednost dvoomjera biti jednaka vrijednosti pridruženog dvoomjera četiriju stožaca zraka u točkama prostora prve četvorke tetraedralnih kompleksa unutar prvog pramena, bit će tim stošcem zraka zadan novi tetraedralni kompleks drugog pramena, koji će s prva tri tetraedralna kompleksa drugog pramena činiti četvorku tetraedralnih kompleksa u tom pramenu, kojoj će pridruženi dvoomjer dvoomjeru u prvom pramenu imati jednaku vrijednost. Pridruženi dvoomjer četvorki stožaca zraka tih četiriju tetraedralnih kompleksa drugog pramena imat će, kao što znamo, tu istu vrijednost u svim točkama prostora. Pošto smo prvoj trojci REYEovih tetraedralnih kompleksa u pramenu takvih kompleksa prvog glavnog tetraedra zadali po volji jednu recipročno jednoznačno pridruženu trojku REYEovih tetraedralnih kompleksa u pramenu takvih kompleksa drugog glavnog tetraedra, bit će na opisani način svakoj četvorci REYEovih tetraedralnih kompleksa u pramenu prvog glavnog tetraedra pridružena četvorka takvih kompleksa u pramenu drugog glavnog tetraedra, kojima će pridruženi dvoomjeri imati uvijek jednake vrijednosti. Po analogiji s projektivno pridruženim nizovima točaka i s projektivno pridruženim pramenovima pravaca i ravnina, nazvat ćemo takva dva pramena REYEovih tetraedralnih kompleksa *projektivno pridruženim pramenovima tetraedralnih kompleksa.*

6. *Neki proizvodi projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa.* a) Vidjeli smo u toč. 5, da kod dvaju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa stošci njihovih zraka u svakoj točki prostora čine dva projektivno pridružena pramena stožaca 2. stupnja sa zajedničkim vrhom, a krivulje 2. stupnja, koje omataju zrake tetraedralnih kompleksa tih dvaju projektivno pridruženih pramenova, čine u svakoj ravnini prostora dva pramena krivulja 2. stupnja, od kojih je svaki, kao što znamo, određen sa četiri temeljne tangente. Parovi pridruženih stožaca u svakoj točki prostora sijeku se u četiri izvodnice, a proizvod takvih dvaju projektivno pridruženih pramenova stožaca 2. stupnja u svakoj točki prostora bit će stožac 4. reda, budući da je i proizvod dvaju projektivno pridruženih pramenova krivulja 2. stupnja u jednoj ravnini krivulja 4. reda.

Svaki pramen krivulja 2. stupnja zadan sa četiri temeljne tangente, možemo smatrati korelativnom slikom pramena krivulja 2. stupnja zadanog sa četiri temeljne točke. Odavle izlazi, da i sva projektivna svojstva kao i proizvode jednog, odnosno dvaju projektivno pridruženih pramenova krivulja 2. stupnja, zadanih sa četiri temeljne točke, možemo dualno prenijeti na jedan takav pramen, odnosno na dva takva projektivno pridružena pramena, zadana sa četiri temeljne tangente. Iz toga dalje izlazi, da će zajedničke tangente parova pridruženih krivulja 2. stupnja u dva projektivno pridružena pramena takvih krivulja u jednoj ravnini, zadanih svaki sa četiri temeljne tangente, omatati krivulju 4. razreda.

Budući da zrake REYEovih tetraedralnih kompleksa dvaju projektivno pridruženih pramenova takvih kompleksa omataju u svakoj ravnini prostora krivulje dvaju projektivno pridruženih pramenova krivulja 2. stupnja, kojima su presječnice tih ravnina s ravninama pobočaka glavnih tetraedara tih dvaju pramenova temeljne tangente, omatat će zajedničke tangente parova pridruženih krivulja spomenutih dvaju pramenova u svakoj ravnini prostora krivulju 4. razreda. Izlazi prema tome ovo:

Proizvod dvaju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa jest pravčasti kompleks 4. stepena.

Budući da su svi pravci vrhova svakog glavnog tetraedra i svi pravci pobočnih ravnina tih glavnih tetraedara zrake svih REYEovih tetraedralnih kompleksa u pramenu takvih kompleksa svakog tog glavnog tetraedra, to su i svih 16 spojnica vrhova dvaju glavnih tetraedara i svih 16 presječnica pobočnih ravnina tih dvaju tetraedara zrake kompleksa 4. stupnja, proizvedenog po projektivno pridruženim pramenovima tetraedralnih kompleksa tih dvaju glavnih tetraedara. Kod opisanih projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa pretpostavlja se, da nijedan brid glavnog tetraedra jednog od tih pramenova kompleksa ne siječe nijedan brid drugog glavnog tetraedra, kao i da nijedan vrh jednog glavnog tetraedra ne leži ni u jednoj pobočnoj ravnini drugog glavnog tetraedra, jer bi u takvim slučajevima nastupile neke degeneracije.

Spomenuli smo, da su spojnice svake točke prostora s vrhovima glavnog tetraedra temeljne izvodnice pramena stožaca zraka REYEovih tetraedralnih kompleksa, zadanih s takvim glavnim tetraedrom. Isto su tako presječnice svake ravnine prostora s ravninama pobočaka glavnog tetraedra jednog takva pramena tetraedralnih kompleksa temeljne tangente pramena krivulja 2. stupnja, koje omataju zrake tetraedralnih kompleksa tog pramena u toj ravnini. Imamo li dva projektivno pridružena pramena tetraedralnih kompleksa dvaju glavnih tetraedara, bit će spojnice svake točke prostora s vrhovima jednog glavnog tetraedra temeljne izvodnice pramena stožaca zraka kompleksa prvog pramena, a spojnice te točke s vrhovima drugog glavnog tetraedra bit će temeljne izvodnice pramena stožaca zraka kompleksa drugog pramena. Znamo, da je proizvod tih dvaju projektivno pridruženih stožaca 2. stupnja stožac 4. reda, koji će prolaziti temeljnim izvodnicama obaju pramenova stožaca, budući da svakom temeljnom izvodnicom prvog pramena stožaca prolazi jedan stožac drugog pramena i obrnuto. Posve analogno, ali dualno, vrijedi i za svaku ravninu prostora, budući da je svakom temeljnom tangentom jednog pramena određena jedna krivulja u drugom pramenu i obrnuto. Izlazi dakle ovo: U kompleksu 4. stupnja, koji nastaje kao proizvod dvaju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa, zadanih s dva glavna tetraedra, nalaze se i svi pravci svih osam vrhova glavnih tetraedara i svi pravci svih osam pobočnih ravnina tih glavnih tetraedara.

b) Zadajmo sada tri opisana međusobno projektivno pridružena pramena tetraedralnih kompleksa tako, da oni ne proizvode isti kompleks 4. stupnja, te da uz već spomenute uvjete kod dvaju glavnih tetraedara u toč. a) po tri vrha glavnih tetraedara ne leže na jednom pravcu i da po tri pobočne ravnine ne prolaze jednim pravcem. Ta tri pramena tetraedralnih kompleksa obilježimo s P_1, P_2 i P_3. Proizvod prvih dvaju pramenova bit će jedan malo prije izvedeni pravčasti kompleks 4. stupnja, koji obilježimo s K_{12}, a proizvod prvog i trećeg pramena bit će isto takav kompleks 4. stupnja K_{13}. Ta se dva kompleksa 4. stupnja općeno sijeku u jednoj kongruenciji 16. reda i 16. razreda, jer se u 16 izvodnica sijeku stošci 4. reda zraka tih dvaju kompleksa 4. stupnja sa zajedničkim vrhom u svakoj točki prostora, a 16 zajedničkih tangenata imaju dvije krivulje 4. razreda omotane od zraka tih dvaju kompleksa u svakoj ravnini prostora. To posljednje izlazi iz činjenice, da dvije krivulje 4. razreda i njihove zajedničke tangente možemo smatrati korelativnom slikom dviju krivulja 4. reda i njihovih međusobnih sjecišta.

Nas će u sadašnjim razmatranjima interesirati geometrijsko mjesto onih pravaca u prostoru, kojima prolaze trojke pridruženih stožaca zraka naših triju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa. Spojnice svake točke prostora s vrhovima glavnog tetraedra našeg prvog pramena tetraedralnih kompleksa nalaze se na stošcima zraka tih točaka obaju spomenutih kompleksa 4. stepena. Izvadimo li sve takve zrake iz sprijeda spomenute kongruencije 16. reda i 16. razreda, smanjit će se red te kongruencije za četiri, a mi ćemo to učiniti zato, jer nas interesira samo neraspadnuti dio presječne kongruencije naših dvaju kompleksa 4. stupnja. Vidimo dakle, da su pravci svih četiriju vrhova glavnog tetraedra prvog pramena tetraedralnih kompleksa P_1 zrake raspadnutog dijela te presječne kongruencije. Zajedničke zrake (izvodnice) dvaju stožaca 4. reda naših dvaju kompleksa 4. stupnja u svakoj točki prostora jesu, izuzevši spomenute četiri spojnice s vrhovima prvog glavnog tetraedra, jedine zrake, kojima prolaze trojke pridruženih stožaca zraka triju pridruženih tetraedralnih kompleksa u naša tri projektivno pridružena pramena takvih kompleksa. Kad bi postojala još koja takva zraka u istoj točki prostora, ona bi se nužno morala nalaziti na jednom i drugom stošcu 4. reda zraka naših dvaju kompleksa K_{12}, K_{13} 4. stupnja, dakle su opisanih 12 zraka uistinu sve takve zrake, odnosno one su zajedničke zrake tih dvaju kompleksa 4. stupnja, koje prolaze svakom točkom prostora. Naša dva kompleksa 4. stupnja dobili smo kao proizvod projektivno pridruženih pramenova P_1, P_2 i P_1, P_3 tetraedralnih kompleksa. Međutim drugi P_2 i treći P_3 od tih pramenova daju treći kompleks 4. stupnja K_{23}. Njegov presjek s prvim kompleksom 4. stupnja K_{12}, kao i njegov presjek s drugim kompleksom 4. stupnja K_{13}, daju opet dvije nove kongruencije 16. reda i 16. razreda, koje se isto tako kao ona malo prije raspadaju u kongruencije 12. reda i četiri snopa pravaca vrhova drugog, odnosno četiri snopa pravaca vrhova trećeg glavnog tetraedra. U spojnicama svake točke prostora s vrhovima glavnih tetraedara ne sijeku se trojke pridruženih stožaca naših triju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa, već svakom takvom zrakom prolaze samo dva para pridruženih stožaca. Na pr. spojnicom jednog vrha prvog glavnog tetraedra prolazi po jedan stožac drugog pramena i po jedan stožac trećeg pramena. Tim posljednjim stošcima pridruženi stošci u prvom pramenu prolaze također tom spojnicom, budući da je ona jedna od četiriju temeljnih izvodnica pramena stožaca 2. stupnja u prvom pramenu P_1 tetraedralnih kompleksa. Ali tim stošcima u drugom i trećem pramenu pridruženi stošci u prvom pramenu jesu dva različita stošca, a ne jedan isti stožac.

Budući da su zrake naše prve kongruencije 12. reda sve one zrake, u kojima se sijeku trojke pridruženih stožaca svih triju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa, to će kongruencije 12. reda, koje daju parovi kompleksa 4. stupnja K_{12}–K_{13}, K_{12}–K_{23} i K_{13}–K_{23} biti jedna te ista kongruencija 12. reda. Zrake te kongruencije bit će dakle jedine zajedničke izvodnice trojki pridruženih stožaca 2. stupnja zraka pridruženih tetraedralnih kompleksa u naša tri projektivno pridružena pramena P_1, P_2 i P_3 takvih kompleksa.

Znamo, da zrake tetraedralnih kompleksa svakog od pramenova P_1, P_2 i P_3 u svakoj ravnini prostora omataju krivulje 2. stupnja jednog pramena takvih krivulja, koji je određen sa četiri presječnice te ravnine s pobočnim ravninama glavnog tetraedra svakog tog pramena tetraedralnih kompleksa kao temeljnim tangentama. U svakoj ravnini prostora imamo dakle tri takva projektivno pridružena pramena krivulja 2. stupnja. Zajedničke tangente pridruženih krivulja u prva dva pramena omataju, kao što smo vidjeli, jednu krivulju 4. razreda, a isto tako prvi i treći pramen daju drugu takvu krivulju, dok drugi s trećim pramenom daju treću takvu krivulju 4. razreda. Zajedničke tangente prvih dviju krivulja 4. razreda u svakoj ravnini prostora, kojih ima 16, bit će sve zajedničke tangente svih mogućih trojki pridruženih krivulja 2. stupnja u sva tri pramena takvih krivulja u ravninama prostora, koje imaju jednu zajedničku tangentu, ako isključimo četiri temeljne tangente prvog pramena krivulja 2. stupnja u toj ravnini. To isključenje činimo zato, što sve krivulje prvog pramena diraju te četiri temeljne tangente i svaku od njih po jedna krivulja drugog i po jedna krivulja trećeg pramena, ali te dvije krivulje nisu u projektivnom odnosu njihovih pramenova međusobno pridružene. Isto bi dabome vrijedilo i za temeljne tangente drugog i trećeg pramena krivulja 2. stupnja u svakoj ravnini prostora, kad bismo na analogan način promatrali zajedničke tangente prve i treće, te druge i treće takve krivulje 4. razreda. Evidentno je, da su zrake, koje leže na površinama jedne trojke opisanih pridruženih stožaca 2. stupnja identične sa zrakama, koje diraju opisane trojke pridruženih krivulja 2. stupnja u svakoj ravnini takve zrake, budući da je svaki takav pravac zraka trojke pridruženih REYEovih tetraedralnih kompleksa u naša tri projektivno pridružena pramena P_1, P_2 i P_3 takvih kompleksa.

Vidimo dakle, da je proizvod naših triju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa P_1, P_2 i P_3, t. j. geometrijsko mjesto onih pravaca u prostoru, koji leže na trojkama pridruženih stožaca 2. stupnja sastavljenih iz zraka pridruženih tetraedralnih kompleksa u naša tri projektivno pridružena pramena takvih kompleksa, kongruencija 12. reda i 12. razreda.

c) Neka sada budu četirma glavnim tetraedrima zadana četiri pramena tetraedralnih kompleksa, koji neka su opet svaki sa svakim projektivno pridruženi, a koje obilježimo s P_1, P_2, P_3 i P_4. To se projektivno pridruženje može učiniti tako, da trima REYEovim tetraedralnim kompleksima u pramenu P_1, koje obilježimo s R_1^I, R_2^I i R_3^I, pridružimo tri takva kompleksa R_1^{II}, R_2^{II} i R_3^{II} u pramenu P_2, nadalje tri R_1^{III}, R_2^{III}, R_3^{III} u pramenu P_3 i tri R_1^{IV}, R_2^{IV}, R_3^{IV} u pramenu P_4 na taj način, da četvorke pridruženih kompleksa budu $R_1^I\ R_1^{II}\ R_1^{III}\ R_1^{IV}$, $R_2^I\ R_2^{II}\ R_2^{III}\ R_2^{IV}$, $R_3^I\ R_3^{II}\ R_3^{III}\ R_3^{IV}$ i $R_4^I\ R_4^{II}\ R_4^{III}\ R_4^{IV}$. Svaka je točka prostora u takvu slučaju zajednički vrh četiriju projektivno pridruženih pramenova stožaca 2. stupnja, a naš je cilj istražiti geometrijsko mjesto onih pravaca u prostoru, koji će biti zajedničke izvodnice svih četiriju stožaca jedne četvorke pridruženih stožaca u ta četiri projektivno pridružena pramena u svima, ili u nekim točkama prostora. Prvi pramen tetraedralnih kompleksa P_1 daje sa svakim od preostalih triju po jedan poznati kompleks 4. stupnja, koje obilježimo s K_{12}, K_{13}, K_{14}. Ako u nekoj točki prostora sva tri stošca 4. stupnja tih triju kompleksa 4. stupnja K_{12}, K_{13}, K_{14} imaju jednu zajedničku izvodnicu, onda je ta izvodnica sigurno jedna zajednička izvodnica jedne četvorke pridruženih stožaca 2. stupnja naših četiriju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa P_1, P_2, P_3, P_4, ukoliko ne prolazi nijednim vrhom nijednog glavnog tetraedra. Geometrijsko mjesto takvih pravaca, koje tražimo, odnosno proizvod naših četiriju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa, bit će dakle zajedničke zrake naših triju, malo prije spomenutih, kompleksa 4. stupnja K_{12}, K_{13}, K_{14}. U najopćenitijem slučaju morala bi to biti pravčasta ploha 2 $(4 \cdot 4 \cdot 4) =$ 128. stupnja, ako sva tri kompleksa 4. stupnja nemaju jednu zajedničku kongruenciju 12. reda i 12. razreda, budući da se po dva od njih u takvoj kongruenciji prodiru.

U našim razmatranjima pretpostavljamo i ovdje, da nijedan vrh nijednog glavnog tetraedra ne leži ni u jednoj pobočnoj ravnini preostalih triju glavnih tetraedara, kao i to da nijedan brid nijednog glavnog tetraedra ne siječe nijedan brid ostalih triju glavnih tetraedara, te po tri ili četiri vrha ne leže na jednom pravcu i po tri ili četiri pobočne ravnine ne prolaze jednim pravcem.

Promotrimo sada pobliže sva tri stošca 4. stupnja u svakoj točki prostora naših triju kompleksa 4. stupnja K_{12}, K_{13}, K_{14}. Budući da je prvi od tih stožaca proizvod projektivno pridruženih pramenova stožaca prvog P_1 i drugog P_2 pramena tetraedralnih kompleksa, a temeljne izvodnice tog prvog i drugog pramena stožaca jesu, kao što znamo, spojnice svake te točke u prostoru s vrhovima glavnih tetraedara tog prvog i drugog pramena tetraedralnih kompleksa, to taj prvi stožac 4. stupnja mora prolaziti spojnicama svog vrha s vrhovima prvog i drugog glavnog tetraedra. Isto tako drugi takav spomenuti stožac 4. stupnja mora prolaziti spojnicama svog vrha s vrhovima prvog i trećeg glavnog tetraedra, a treći spojnicama svog vrha s vrhovima prvog i četvrtog glavnog tetraedra. Dakle su spojnice tog vrha s vrhovima prvog glavnog tetraedra zajedničke izvodnice tih triju stožaca 4. stupnja. Najveći mogući broj zajedničkih izvodnica triju ili više stožaca 4. stupnja jednog zajedničkog vrha jest 16, budući da se po dva od njih prodiru u toliko izvodnica. Na sva tri takva stošca 4. stupnja jedne točke prostora moraju se nalaziti svi oni pravci te točke, kojima prolazi jedna četvorka pridruženih stožaca 2. stupnja te točke naših četiriju projektivno pridruženih pramenova P_1, P_2, P_3, P_4 tetraedralnih kompleksa, ako takvi tom točkom prolaze, budući da su bila angažirana sva četiri pramena stožaca 2. stupnja tih četiriju pramenova tetraedralnih kompleksa.

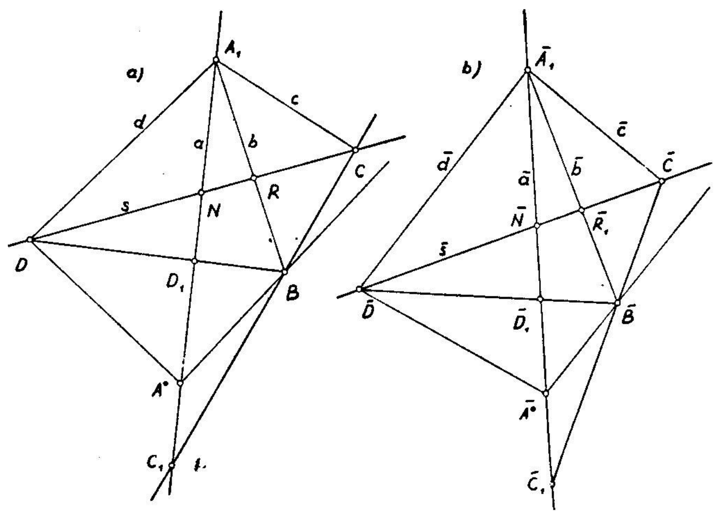
Malo prije spomenute komplekse 4. stupnja obilježili smo s K_{12}, K_{13}, K_{14}, kao proizvode projektivno pridruženog prvog pramena P_1 tetraedralnih kompleksa drugom, trećem i četvrtom takvom pramenu. Međutim, drugi naš pramen tetraedralnih kompleksa P_2 čini s trećim takvim pramenom P_3 i sa četvrtim takvim pramenom P_4 nove komplekse 4. stupnja K_{23}, K_{24}, a treći od tih pramena P_3 čini sa četvrtim takvim pramenom P_4 daljni kompleks 4. stupnja K_{34}. Vidjeli smo u dosadašnjim razmatranjima, da spojnice svake točke prostora s vrhovima glavnog tetraedra prvog pramena tetraedralnih kompleksa P_1 leže na sva tri stošca 4. stupnja proizvedenih kompleksa K_{12}, K_{13}, K_{14}. Međutim, tim zajedničkim izvodnicama tih triju stožaca 4. stupnja općeno ne prolazi po jedna četvorka pridruženih stožaca 2. stupnja jedne četvorke pridruženih REYEovih tetraedralnih kompleksa projektivnih pramenova P_1, P_2, P_3, P_4 takvih kompleksa, nego samo tri dvojke takvih pridruženih stožaca. Dakle te spojnice ne pripadaju u tražene pravce, a analogno tome ne pripadaju u te pravce ni spojnice svake točke prostora s vrhovima preostalih triju glavnih tetraedara projektivno pridruženih pramenova P_1, P_2, P_3, P_4.

Vidjeli smo u prošloj točki, da je proizvod kompleksa K_{12} i K_{13} kongruencija 12. reda i 12. razreda. Zajedničke zrake te kongruencije i kompleksa K_{14} dat će nam zajedničke zrake naših kompleksa K_{12}, K_{13} i K_{14}, dakle sve one zrake prostora, kojima prolaze četvorke pridruženih stožaca 2. stupnja zraka pridruženih četvorki tetraedralnih kompleksa projektivno pridruženih pramenova P_1, P_2, P_3, P_4 takvih kompleksa. Slobodnim odabiranjem kompleksa 4. stupnja K_{12}, K_{13}, K_{14} između svih šest spomenutih takvih kompleksa, dobili smo sve pridružene četvorke stožaca 2. stupnja pridruženih četvorki tetraedralnih kompleksa projektivno pridruženih pramenova P_1, P_2, P_3, P_4, koje imaju jednu (ili više) zajedničkih izvodnica. Da smo na pr. odabrali kongruenciju 12. reda i 12. razreda kompleksa K_{23} i K_{24} i kompleks K_{12}, dale bi njihove zajedničke zrake iste naprijed spomenute pravce. Poznato je, da zajedničke zrake kompleksa 4. stupnja i kongruencije 12. reda i 12. razreda čine pravčastu plohu $4\ (12 + 12) = 96$. stupnja. Dobivamo prema tome ovo: Zadamo li četiri projektivno pridružena pramena tetraedralnih kompleksa takvih četiriju glavnih tetraedara, kojima nijedan brid jednoga ne siječe nijedan brid ostalih triju, nijedan vrh jednoga ne leži ni u jednoj pobočnoj ravnini ostalih triju, a po tri ili četiri vrha ne leže na jednom pravcu i po tri ili četiri pobočne ravnine ne prolaze jednim pravcem, tada je proizvod tih četiriju projektivno pridruženih pramenova tetraedralnih kompleksa pravčasta ploha 96. stupnja.

7. O REYE*ovim tetraedralnim kompleksima jednakih karakterističnih invarijanti u dva pramena takvih kompleksa.* Neka su točke B, C, D u ravnini slike 3 a) vrhovi tetraedra $ABCD$, kojemu je vrh A negdje iznad te ravnine. Točka A^0 neka je probodište te ravnine s nekim pravcem n, koji prolazi vrhom A, a točka A_1 neka je probodište te ravnine s pravcem l_1, koji pravac n siječe u nekoj točki V. Tetraedrom $ABCD$ i pravcem l_1 zadan je jedan REYEov tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $ABCD$. Sve zrake tog kompleksa, koje sijeku pravac n, čine, kao što je poznato, ∞^1 stožaca 2. stupnja sa zajedničkom osnovkom u ravnini slike, koja je određena točkama A^0, B, C, D i A_1. To izlazi iz činjenice, da su sve zrake pramena (A_1) točke A_1, koje sijeku pravac n, zajedno s tim pravcem zrake tog tetraedralnog kompleksa. Ravnine nasuprotnih pobočaka vrhovima A, B, C, D našeg glavnog tetraedra označimo s α, β, γ, δ. Probodišta pravca l_1 s tim ravninama označimo s A_1, B_1, C_1, D_1, a ravnine položene tim pravcem i vrhovima A, B, C, D označimo s α_1, β_1, γ_1, δ_1. Znamo, da će za zraku l_1, kao i za sve ostale zrake našeg tetraedralnog kompleksa, biti vrijednost dvoomjera takvih četiriju njegovih probodišta jednaka vrijednosti pridruženog dvoomjera pridruženih četiriju ravnina tog pravca, koje prolaze vrhovima A, B, C, D. T. j. $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1)$. Ravnine α_1, β_1, γ_1, δ_1, t. j. ravnine pravca l_1 i vrhova A, B, C, D, neka sijeku ravninu slike u pravcima $a = A_1 A^0$, $b = A_1 B$, $c = A_1 C$ i $d = A_1 D$, a pravci a, b neka sijeku spojnicu CD u točkama N, R_1. Znamo, da je vrijednost dvoomjera četiriju ravnina jednog pravca jednaka vrijednosti pridruženog dvoomjera presječnica tih ravnina s bilo kojom ravninom prostora. Dakle će i vrijednost bilo kojeg dvoomjera ravnina α_1, β_1, γ_1, δ_1, pravca l_1 biti jednaka vrijednosti pridruženog dvoomjera presječnica a, b, c, d tih ravnina s ravninom slike. Na pr. $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1) = (abcd) = \lambda$, gdje je λ, kao što je poznato, jedna karakteristična invarijanta tetraedralnog kompleksa zrake l_1 *i* glavnog tetraedra $ABCD$.

Zrake a, b, c, d vrha A_1 sijeku spojnicu $CD = s$ u točkama N, R_1, C, D, gdje će na temelju PAPPUSova stavka biti $(abcd) = (NR_1 CD) = \lambda$. Odaberimo na spojnici $A_1 A^0 = a$ neku novu točku A_2, koju pravac l_2 spaja s točkom V. Tim pravcem l_2 i tetraedrom $ABCD$ zadan je novi tetraedralni kompleks ovog glavnog tetraedra, a svim takvim zrakama l_n pramena (V) pravaca u ravnini točke V i pravca a zadan je pramen tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$. Sjecišta A_n zraka l_n ovog pramena (V) s pravcem a dat će niz točaka (a), koje spojene s točkom B daju pramen pravaca (B). Zrake tog pramena (B) sijeku spojnicu $s = CD$ u točkama R_n niza (s). Budući da nizovi (a), (s) točaka A_n, R_n nastaju kao presjeci istog pramena (B), bit će $(a) \overline{\overline{\wedge}} (s)$. Jer nadalje točke C, D, N niza (s) ostaju iste za sve točke R_n, bit će karakteristična invarijanta svakog pojedinog tetraedralnog kompleksa unutar pramena takvih kompleksa temeljnog tetraedra $ABCD$, od kojih je svaki na opisani način pridružen jednoj između točaka R_n niza (s), uz *istoimeni dvoomjer* kao malo prije, jednaka $(NR_n CD) = \lambda$.

Neka su na sl. 3 b) točke $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ vrhovi u ravnini slike nekog novog tetraedra $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, a točka $\bar{A}^0$ neka je probodište nekog pravca $\bar{n}$ vrha $\bar{A}$ s tom ravninom. Jednom ravninom pravca $\bar{n}$ presijecimo ravninu slike 3 b) u pravcu $\bar{a}$, koji neka spojnicu $\bar{s} = \bar{C}\bar{D}$ siječe u točki $\bar{N}$. Odaberimo



Sl. 3. – Abb. 3.

sada na spojnici $\bar{s}$ točku $\bar{R}_1$ tako, da bude $(NR_1 CD) = (\bar{N}\bar{R}_1 \bar{C}\bar{D})$. Spojnica $\bar{B}\bar{R}_1 = \bar{b}$ sjeći će pravac $\bar{a}$ u nekoj točki $\bar{A}_1$, koja će spojena s jednom točkom $\bar{V}$ na pravcu $\bar{n}$ dati pravac $\bar{l}_1$. Tim pravcem $\bar{l}_1$ bit će određen onaj tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, kojemu će vrijednost karakteristične invarijante, uz istoimeni dvoomjer kao u prvom slučaju, biti jednaka $(\bar{N}\bar{R}_1 \bar{C}\bar{D}) = (NR_1 CD)$. Svakoj točki R_n pravca s možemo na taj način pridružiti jednu točku $\bar{R}_n$ na pravcu $\bar{s}$, te na taj način uspostaviti projektivan odnos $(s) \bar{\wedge} (\bar{s})$ nizova točaka R_n i $\bar{R}_n$. Pridruženjem točaka $\bar{A}_n$ niza $(\bar{a})$ točkama $\bar{R}_n$ niza $(\bar{s})$ pomoću pramena pravaca $(\bar{B})$, kojega su ti nizovi presjeci, dobit ćemo perspektivno pridružene nizove $(\bar{a}) \bar{\bar{\wedge}} (\bar{s})$. Točkama $\bar{A}_n$ na opisani način pridruženi tetraedralni kompleksi glavnog tetraedra $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ dat će pramen takvih kompleksa tog glavnog tetraedra.

Odaberimo sada na pravcu a slike 3 a) po volji četiri točke A_2, A_3, A_4, A_5, te njima odredimo na opisani način četiri tetraedralna kompleksa u pramenu takvih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$. Tim točkama niza (a) pridružene točke u nizu (s) neka su R_2, R_3, R_4, R_5. Nađemo li sada pomoću $(s) \wedge (\bar{s})$ točkama R_2, R_3, R_4, R_5 pridružene točke $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$, $\bar{R}_4$, $\bar{R}_5$ u nizu $(\bar{s})$, tad možemo pomoću tih točaka i pramena pravaca $(\bar{B})$ odrediti točke $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$, $\bar{A}_5$ niza $(\bar{a})$, kojima su na opisani način određena četiri tetraedralna kompleksa u pramenu takvih kompleksa glavnog tetraedra $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. Iz $(s) \wedge (\bar{s})$ izlazi, da je $(NR_2 CD) = (\bar{N}\bar{R}_2 \bar{C}\bar{D})$, $(NR_3 CD) = (\bar{N}\bar{R}_3 \bar{C}\bar{D})$, $(NR_4 CD) = (\bar{N}\bar{R}_4 \bar{C}\bar{D})$ i $(NR_5 CD) = (\bar{N}\bar{R}_5 \bar{C}\bar{D})$. Odatle izlazi, da parovi tetraedralnih kompleksa u pramenovima takvih kompleksa glavnih tetraedara $ABCD$ i $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, određeni na opisani način parovima točaka $A_2 \bar{A}_2$, $A_3 \bar{A}_3$, $A_4 \bar{A}_4$ i $A_5 \bar{A}_5$, imaju karakteristične invarijante jednakih vrijednosti. Iz $(s) \bar{\bar{\wedge}} (a)$, $(s) \wedge (\bar{s})$ i $(\bar{s}) \bar{\bar{\wedge}} (\bar{a})$ izlazi dalje, da je $(A_2 A_3 A_4 A_5) = (R_2 R_3 R_4 R_5)$, $(R_2 R_3 R_4 R_5) = (\bar{R}_2 \bar{R}_3 \bar{R}_4 \bar{R}_5)$ i $(\bar{R}_2 \bar{R}_3 \bar{R}_4 \bar{R}_5) = (\bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5)$.

Vidjeli smo, da pramen krivulja 2. stupnja, određen temeljnim točkama A^0, B, C, D, daje osnovke stožaca 2. stupnja zraka svih tetraedralnih kompleksa glavnog tetraedra $ABCD$, kojih se vrhovi nalaze na pravcu n. Isto to doslovce vrijedi za glavni tetraedar $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ na sl. 3 b). Točkama A_2, A_3, A_4, A_5 određene su četiri krivulje 2. stupnja pramena takvih krivulja temeljnih točaka A^0, B, C, D na sl. 3 a), budući da one leže na pravcu a temeljne točke A^0 tog pramena. Njima pridružene točke $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$, $\bar{A}_5$ na pravcu $\bar{a}$ temeljne točke $\bar{A}^0$ takva pramena na sl. 3 b), daju četiri krivulje 2. stupnja u tom pramenu, koji je određen temeljnim točkama $\bar{A}^0$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$. Takvim pridruženjem uspostavili smo projektivan odnos tih dvaju pramenova krivulja 2. stupnja na slikama 3 a) i 3 b), a time, na temelju naših prijašnjih razmatranja, i projektivan odnos pramenova tetraedralnih kompleksa glavnih tetraedara $ABCD$ i $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$, budući da ono što vrijedi za četvorke točaka $(A_2 A_3 A_4 A_5) = (\overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5)$, vrijedi i za sve ostale četvorke pridruženih točaka A_n i $\overline{A}_n$ nizova (a) i $(\overline{a})$. Dobili smo dakle ovo: *Pridružimo li recipročno jednoznačno* REYEovim *tetraedralnim kompleksima jednog pramena takvih kompleksa nekog glavnog tetraedra $ABCD$, takve tetraedralne komplekse nekog drugog pramena takvih kompleksa nekog novog glavnog tetraedra $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ tako, da parovi pridruženih tetraedralnih kompleksa imaju karakteristične invarijante jednakih vrijednosti, onda su na taj način pridruženi pramenovi tetraedralnih kompleksa pridruženi projektivno.*

Iz naših prijašnjih i sadašnjih razmatranja i zaključaka o projektivno pridruženim pramenovima tetraedralnih kompleksa izlazi ovo:

a) Neka su zadana dva tetraedra, kojima nijedan vrh jednoga ne leži ni u jednoj pobočnoj ravnini drugog i kojima nijedan brid jednoga ne siječe nijedan brid drugoga. Vrhove tih tetraedara obilježimo s A, B, C, D, odnosno A^I, B^I, C^I, D^I, a tim vrhovima nasuprotne pobočne ravnine s $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, odnosno $\alpha^I, \beta^I, \gamma^I, \delta^I$. Probodišta bilo kog pravca u prostoru s tim pobočnim ravninama označimo s A_n, B_n, C_n, D_n, odnosno $A_n^I, B_n^I, C_n^I, D_n^I$, a tim pravcem i nasuprotnim vrhovima tih pobočaka postavljene ravnine označimo s $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$, odnosno α_n^I, $\beta_n^I, \gamma_n^I, \delta_n^I$. Svi pravci prostora, na kojima će biti $(A_n B_n C_n D_n) = (A_n^I, B_n^I, C_n^I, D_n^I)$ čine kompleks 4. stupnja, a za sve te pravce vrijedit će i $(\alpha_n \beta_n \gamma_n \delta_n) = (\alpha_n^I \beta_n^I \gamma_n^I\ {}_n^I) = (A_n B_n C_n D_n) = (A_n^I B_n^I C_n^I D_n^I)$.

b) Neka su zadana tri tetraedra $ABCD$, $A^I B^I C^I D^I$ i $A^{II} B^{II} C^{II} D^{II}$ tako, da uz spomenute uvjete pod a) još i po tri vrha ne leže na jednom pravcu, kao i po tri pobočne ravnine ne prolaze jednim pravcem. Nasuprotne pobočne ravnine vrhovima A, B, C, D, odnosno A^I, B^I, C^I, D^I, odnosno $A^{II}, B^{II}, C^{II}, D^{II}$, označimo kao i dosada s $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, odnosno $\alpha^I, \beta^I, \gamma^I, \delta^I$, odnosno $\alpha^{II}, \beta^{II}, \gamma^{II}, \delta^{II}$. Probodišta pravaca u prostoru s tim pobočnim ravninama neka su opet A_n, B_n, C_n, D_n, odnosno $A_n^I, B_n^I, C_n^I, D_n^I$, odnosno $A_n^{II}, B_n^{II}, C_n^{II}, D_n^{II}$, a tim pravcima i vrhovima položene ravnine neka su $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$, odnosno $\alpha_n^I, \beta_n^I, \gamma_n^I, \delta_n^I$, odnosno $\alpha_n^{II}, \beta_n^{II}, \gamma_n^{II}, \delta_n^{II}$. Svi pravci prostora, za koje vrijedi $(A_n B_n C_n D_n) = (A_n^I B_n^I C_n^I D_n^I) = (A_n^{II} B_n^{II} C_n^{II} D_n^{II})$, čine kongruenciju 12. reda i 12. razreda. Za sve zrake te kongruencije vrijedit će i $(A_n B_n C_n D_n) = (\alpha_n \beta_n \gamma_n \delta_n) = (\alpha_n^I \beta_n^I \gamma_n^I \delta_n^I) = (\alpha_n^{II} \beta_n^{II} \gamma_n^{II} \delta_n^{II})$.

c) Zadajmo sada četiri tetraedra $ABCD$, $A^I B^I C^I D^I$, $A^{II} B^{II} C^{II} D^{II}$ i $A^{III} B^{III} C^{III} D^{III}$ tako, da osim uvjeta pod a) još po tri ili četiri vrha ne leže na jednom pravcu i po tri ili četiri pobočne ravnine ne prolaze jednim pravcem. Probodišta pravaca prostora s pobočnim ravninama prvih triju označimo kao pod b), a s pobočnim ravninama četvrtog neka budu točke A_n^{III} B_n^{III} C_n^{III} D_n^{III}. Tim pravcima i vrhovima četvrtog tetraedra položene ravnine neka budu označene analogno predašnjima s α_n^{III}, β_n^{III}, γ_n^{III}, δ_n^{III}. Svi pravci prostora, na kojima će biti $(A_n B_n C_n D_n) = (A_n^I B_n^I C_n^I D_n^I) = (A_n^{II} B_n^{II} C_n^{II} D_n^{II}) = (A_n^{III} B_n^{III} C_n^{III} D_n^{III})$, činit će pravčastu plohu 96. stupnja, a za sve izvodnice te plohe vrijedit će i ovdje $(A_n B_n C_n D_n) = (\alpha_n \beta_n \gamma_n \delta_n) = (\alpha_n^I \beta_n^I \gamma_n^I \delta_n^I) = (\alpha_n^{II} \beta_n^{II} \gamma_n^{II} \delta_n^{II}) = (\alpha_n^{III} \beta_n^{III} \gamma_n^{III} \delta_n^{III})$.

LITERATURA

[1], [2] TH. REYE, *Die Geometrie der Lage,* Leipzig 1910, Bd. III., str. 5.
[3] TH. REYE, *Die Geometrie der Lage,* Leipzig, 1910, Bd. III., str. 3.
[4] TH. REYE, *Die Geometrie der Lage,* Leipzig 1910, Bd. III., str. 5.
[5] TH. REYE, *Die Geometrie der Lage,* Leipzig 1910, Bd. III., str. 6.
[6] TH. REYE, *Die Geometrie der Lage,* Leipzig 1910, Bd. III., str. 21.
[7] TH. REYE, *Die Geometrie der Lage,* Leipzig 1910, Bd. III., str. 205.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke 1. VII. 1957.

Vilim Niče

DIE BÜSCHEL DER REYESCHEN TETRAEDRALEN STRAHLENKOMPLEXE UND IHRE PROJEKTIVE ZUORDNUNG*

Einleitung: Wie bekannt, ist ein Reyescher tetraedraler quadratischer Strahlenkomplex durch sein Haupttetraeder und einen seiner Strahlen bestimmt, wenn dieser keine Kantengerade dieses Tetraeders schneidet und in keiner seiner Seitenebenen liegt. Die den Eckpunkten A, B, C, D eines derartigen Haupttetraeders gegenüberliegenden Seitenebenen bezeichne man mit α, β, γ, δ, und die Schnittpunkte der Komplexstrahlen dieses Komplexes mit den genannten Ebenen gleichnamig mit A_n, B_n, C_n, D_n. Man weiss, dass jedes der Doppelverhältnisse dieser vier Schnittpunkte für alle Komplexstrahlen konstant bleibt ($(A_n B_n C_n D_n) =$ const.), und sein Wert eine charakteristische Invariante dieses Strahlenkomplexes ist. Das diesem Doppelverhältnis analoge Doppelverhältnis der vier je einen den Seitenebenen gegenüberliegenden Eckpunkt enthaltenden Ebenen eines Komplexstrahles, hat immer den der charakteristischen Invariante gleichen Wert. Alle die vier Eckpunkte enthaltenden und die in den vier Seitenebenen liegenden Geraden sind dem Strahlenkomplexe angehörende Strahlen. Die einen beliebigen Punkt V des Raumes enthaltenden Strahlen des Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes bilden einen Kegel 2. Grades, auf dessen Oberfläche die vier Eckpunkte des Haupttetraeders liegen. Die in einer Ebene liegenden Komplexstrahlen hüllen eine Kurve 2. Grades ein, die auch die vier Schnittgeraden dieser Ebene und der Seitenebenen des Haupttetraeders berühren. Da jeder Strahlenkomplex ∞^3 Geraden des Raumes als Komplexstrahlen enthält, können alle ∞^4 Geraden des Raumes in ∞^1 Reyesche tetraedrale Strahlenkomplexe eines Haupttetraeders verteilt werden, die einen tetraedralen Strahlenkomplexbüschel bilden. Die die Eckpunkte des Haupttetraeders enthaltenden und die in seinen Seiten-

* Originalüberschrift dieser Arbeit: Reyeovi *tetraedralni kompleksi jednog, dvaju, triju i četiriju glavnih tetraedara.*

ebenen liegenden Geraden gehören allen Strahlenkomplexen eines derartigen Büschels an. Daraus folgt also, dass die Komplexstrahlenkegel 2. Grades der Strahlenkomplexe eines derartigen Büschels in allen Raumpunkten als gemeisamen Scheiteln Kegelbüschel 2. Grades bilden, die durch die Verbindungsgeraden dieser Scheitel und der Eckpunkte des Haupttetraeders als Grunderzeugende dieser Kegelbüschel bestimmt sind.

Bekanntlich, hüllen die in einer Ebene sich befindenden Strahlen eines REYEschen tetraedralen Strahlenkomplexes eine Kurve 2. Grades ein. Da aber alle Geraden der Seitenebenen des Haupttetraeders zu dem tetraedralen Strahlenkomplexe gehören, wird die beschriebene Kurve 2. Grades in jeder Ebene des Raumes auch durch die Schnittgeraden dieser Ebene und der Seitenebenen des Haupttetraeders berührt. Da dies aber bei jedem Strahlenkomplexe des tetraedralen Strahlenkomplexbüschels eines gemeinsamen Haupttetraeders geschieht, hüllen also die in einer Ebene sich befindenden Strahlen der Strahlenkomplexe eines tetraedralen Strahlenkomplexbüschels Kurven 2· Grades ein, die einen durch die Schnittgeraden dieser Ebene und der Seitenebenen des Haupttetraeders als Grundtangenten bestimmten Kurvenbüschel 2. Grades bilden.

1. *Erste Eigenschaft des tetraedralen Strahlenkomplexbüschels eines Haupttetraeders.* Alle Kurven 2. Grades, die vier gemeinsame Punkte enthalten, die in Paaren auch konjugiert imaginär sein können, bilden, wie bekannt, einen Kurvenbüschel 2. Grades, dessen Grundpunkte die vier gemeinsamen Punkte sind. Alle diese Grundpunkte enthaltenden Geraden schneiden diesen Kurvenbüschel 2. Grades in projektiven Punktreihen, wobei die Punkte derselben Kurve zugeordnet sind. Vier Kurven dieses Büschels, die eine dieser Geraden in Punkten eines harmonischen Punktwurfes schneiden, werden also von allen Grundpunktgeraden in harmonischen Punktwürfen geschnitten. Vier derartige Kurven bilden, wie bekannt, einen harmonischen Kurvenwurf dieses Büschels, und es ist leicht zu beweisen, dass die Berührungsgeraden eines harmonischen Kurvenwurfes in einem Grundpunkte dieses Büschels einen harmonischen Geradenwurf bilden. Wird anstatt des Kurvenbüschels 2. Grades ein Kegelbüschel 2. Grades mit gemeinsamen Scheitel und vier Grunderzeugenden betrachtet, so gelten für diesen Kegelbüschel gleiche Eigenschaften wie für den Kurvenbüschel, wenn die Punkte durch Gerade und die Geraden durch Ebenen des gemeinsamen Scheitels ersetzt werden.

Ein REYEscher tetraedraler Strahlenkomplex sei durch ein Tetraeder $ABCD$ und einen Strahl l_1 bestimmt. Die Verbindungsgerade eines Punktes V des Strahles l_1 und des Eckpunktes D schneide die gegenüberliegende Seitenebene ABC im Punkt D^0, und der Strahl l_1 schneide diese Ebene im Punkt D_1 (Abb. 1.). Bekanntlich gehören die Strahlen des Strahlenbüschels (D_1), mit dem Scheitel D_1 in der Ebene $(l_1 D)$, zu dem durch das Haupttetraeder $ABCD$ und den Strahl l_1 bestimmten

REYEschen tetraedralen Strahlenkomplexe. Die den Punkt V enthaltenden Strahlen dieses Strahlenkomplexes bilden einen Kegel, der die Seitenebene ABC in dem durch die Punkte A, B, C, D^0, D_1 bestimmten Kegelschnitt k_1 schneidet. Da die Strahlen des Strahlenbüschels (D_1) zu diesem tetraedralen Strahlenkomplex gehören, schneiden alle Strahlenkegel dieses Komplexes, mit auf der Geraden VD sich befindenden Scheiteln, die Seitenebene ABC in demselben, durch die Punkte A, B, C, D^0, D_1 bestimmten Kegelschnitt k_1.

In unserem Kurvenbüschel 2. Grades, mit den Grundpunkten A, B, C, D^0, wähle man jetzt einen harmonischen Kurvenwurf k_1, k_2, k_3, k_4, der die Verbindungsgerade $D^0 D_1$ in den Punkten D_1, D_2, D_3, D_4 eines harmonischen Punktwurfes $(D_1 D_4 D_2 D_3) = -1$ schneidet. Durch die Verbindungsgeraden $VD_1 = l_1$, $VD_2 = l_2$, $VD_3 = l_3$ und $VD_4 = l_4$ als Strahlen sind vier tetraedrale Strahlenkomplexe K_1, K_2, K_3, K_4 des gemeinsamen Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt, wobei wegen $(D_1 D_4 D_2 D_3) = -1$ auch $(l_1 l_4 l_2 l_3) = -1$ gilt. Die Strahlenkegel 2. Grades dieser vier tetraedralen Strahlenkomplexe mit gemeinsamen Scheitel V bilden wegen $(l_1 l_4 l_2 l_3) = -1$ einen harmonischen Komplexstrahlenkegelwurf mit den gemeinsamen Grunderzeugenden VA, VB, VC und VD. Auf Grund der Tatsache, dass die Strahlenkegel des tetraedralen Strahlenkomplexes K_1, deren Scheitel sich in Punkten der Geraden $DV \equiv D^0 V$ befinden, und den Kegelschnitt k_1 in der Seitenebene ABC enthalten, was auch für die vier anderen derartigen Strahlenkomplexe K_2, K_3, K_4 und die Kegelschnitte k_2, k_3, k_4 in derselben Seitenebene gilt, kann hier folgendes behauptet werden: *Bilden die Kegel 2. Grades mit gemeinsamen Scheitel, deren Erzeugende als Strahlen zu vier tetraedralen Strahlenkomplexen des gemeinsamen Haupttetraeders ABCD gehören, einen harmonischen Kegelwurf, dann werden die zu diesen vier tetraedralen Strahlenkomplexen gehörenden Strahlenkegel in jedem Punkte der Verbindungsgeraden VD harmonische Kegelwürfe 2. Grades bilden.* Was für die Verbindungsgerade VD und die Seitenebene ABC gilt, ist selbstverständlich auch für die Verbindungsgeraden VA, VB, VC und die Seitenebenen BCD, ACD und ABD gültig. Also im Falle des erwähnten harmonischen Kegelwurfes 2. Grades im Punkte V werden harmonische Strahlenkegelwürfe dieser vier tetraedralen Strahlenkomplexe nicht nur in den Punkten der Geraden VD, sondern auch in den Punkten der Geraden VA, VB und VC gebildet.

Wie schon erwähnt, gehören die Strahlen des Strahlenbüschels (D_1) mit dem Scheitel D_1 in der Ebene $(l_1 D)$ dem tetraedralen Strahlenkomplexe K_1 an. Ebenso werden die Strahlen der Strahlenbüschel (D_2), (D_3), (D_4) mit den Scheiteln D_2, D_3, D_4 in derselben Ebene $(l_1 D) \equiv (l_2 D) \equiv (l_3 D) \equiv (l_4 D)$ zu den tetraedralen Strahlenkomplexen K_2, K_3, K_4 gehören. Diese vier tetraedralen Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$ können also auch durch das Haupttetraeder $ABCD$, die Gerade VD^0 und die vier Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 in der Seitenebene ABC bestimmt werden. Wird irgendein Punkt V_n in der Ebene $(l_1 D)$

und die Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 mittels der Geraden $l_1^n = V_n D_1$, $l_2^n = V_n D_2$, $l_3^n = V_n D_3$, $l_4^n = V_n D_4$ verbunden, so werden also durch diese vier Verbindungsgeraden l_1^n, l_2^n, l_3^n, l_4^n und das Haupttetraeder $ABCD$ dieselben vier tetraedralen Strahlenkomplexe K_1, K_2, K_3, K_4 bestimmt, und wegen $(D_1 D_4 D_2 D_3) = -1$ wird auch $(l_1^n l_4^n l_2^n l_3^n) = -1$ gelten. Wird also durch die zu den tetraedralen Strahlenkomplexen K_1, K_2, K_3, K_4 gehörenden Strahlenkegel eines Punktes V in der Ebene $(l_1 D)$ ein harmonischer Kegelwurf gebildet, so werden die Strahlenkegel 2. Grades dieser vier Strahlenkomplexe in allen Punkten V_n dieser Ebene harmonische Kegelwürfe bilden, weil der Schnittpunkt D_n^0 der Verbindungsgeraden $V_n D$ und der Seitenebene ABC auf der Geraden der Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 liegt, und diese Verbindungsgerade $V_n D$ die vierte Grunderzeugende dieses Kegelwurfes ist.

Wie bekannt, wird der harmonische Kegelschnittwurf $k_1 k_2 k_3 k_4$ in der Seitenebene ABC von jeder Geraden der Grundpunkte A, B, C, D^0 in einem harmonischen Punktenwurf geschnitten. Unsere bisherigen Betrachtungen können in jeder Ebene der Geraden DD^0 mit gleichem Erfolg gemacht werden, da jede dieser Ebenen den beschriebenen harmonischen Strahlenkegelwurf des Punktes V in einem harmonischen Strahlenwurf schneidet. Was also für die Punkte V_n der Ebene $(l_1 D) \equiv (l_1 DD^0)$ gilt, ist für alle Punkte aller Ebenen der Geraden DD^0 gültig. Da jeder Punkt des Raumes in einer dieser Ebenen liegt, kann auch folgendes behauptet werden:

Bilden vier Kegel 2. Grades mit gemeinsamen Scheitel, deren Erzeugende als Strahlen zu vier tetraedralen Strahlenkomplexen eines gemeinsamen Haupttetraeders gehören, einen harmonischen Kegelwurf 2. Grades, dann werden die diesen tetraedralen Strahlenkomplexen angehörenden Strahlenkegel 2. Grades in allen Punkten des Raumes harmonische Kegelwürfe 2. Grades bilden. Derartige vier Strahlenkomplexe bilden einen harmonischen tetraedralen Strahlenkomplexwurf.

2. *Zweite Eigenschaft des tetraedralen Strahlenkomplexbüschels eines Haupttetraeders.* Es ist bekannt, dass ein Büschel von Kurven 2. Grades auch durch vier gemeinsame Berührungsgeraden dieser Kurven als Grundtangenten dieses Büschels bestimmt werden kann. Vier Kurven dieses Büschels, die eine und damit auch die drei anderen Grundtangenten in Punkten eines harmonischen Punktwurfes berühren, bilden einen harmonischen Kurvenwurf eines derartigen Kurvenbüschels 2. Grades. Die aus jedem Punkte der Grundtangenten auf die Kurven eines harmonischen Kurvenwurfes dieses Büschels gezogenen Berührungsgeraden werden immer einen harmonischen Geradenwurf bilden.

Man nehme nun zwei projektivzugeordnete Strahlenbüschel (A), (D) in zwei verschiedenen Ebenen α, β an, deren Schnittgerade mit m bezeichnet sei. (Abb. 2.). Wie bekannt, wird durch die Transversalen aller zugeordneten Strahlenpaare dieser Strahlenbüschel ein Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex gebildet. Die Doppelpunkte der kollokalen projektiven Schnittpunktreihen dieser Strahlenbüschel und der Geraden

m seien B, C. Die Scheitel A, D der Strahlenbüschel (A), (D) und die Doppelpunkte B, C sind, wie bekannt, Scheitel des dem erwähnten tetraedralen Strahlenkomplex angehörenden Haupttetraeders. Auf der Schnittgeraden m nehme man die Doppelpunkte B, C beliebig an, wodurch also den Strahlen AB, AC im Strahlenbüschel (A) die Strahlen DB, DC im Strahlenbüschel (D) zugeordnet sind. Um die projektive Zuordnung dieser Strahlenbüschel herzustellen, muss also noch ein Paar zugeordneter Strahlen dieser Büschel angenommen werden. Dies mögen der Strahl a im Strahlenbüschel (A) und der Strahl a_1 im Strahlenbüschel (D) sein. Ordnet man dem Strahle a des Büschels (A) im Büschel (D) einen neuen Strahl $\bar{a}_1$ zu, so wird damit eine neue projektive Zuordnung der Büschel (A), (D) hergestellt, und damit auch ein neuer Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt. Alle durch derartige ∞^1 Zuordnungen des Strahles a des Büschels (A) zu den einzelnen Strahlen des Büschels (D) bestimmten ∞^1 Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe werden also unseren bekannten tetraedralen Strahlenkomplexbüschel des Haupttetraeders $ABCD$ bilden.

Eine beliebig angenommene Ebene ϱ schneide die Ebene α des Büschels (A) in der Geraden r_1, und die Ebene β des Büschels (D) in der Geraden r_2. Die Verbindungsgerade s des Schnittpunktes $T = a \times r_1$ der Geraden a, r_1 und des Schnittpunktes $U = a_1 \times r_2$ der Geraden a_1, r_2 wird ein Strahl des durch das Paar a, a_1 zugeordneter Strahlen der projektiv zugeordneten Strahlenbüschel $(A) \mathrel{\overline{\wedge}} (D)$ bestimmten tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $ABCD$ sein. Alle in der Ebene ϱ liegenden Strahlen dieses Strahlenkomplexes hüllen eine, durch die Berührungsgeraden r_1, r_2, s, b, c bestimmte Kurve 2. Grades ein, wobei die Geraden b, c Schnittgerade der Ebene ϱ und der Seitenebenen ACD und ABC des Haupttetraeders $ABCD$ sind. Man wähle nun einen auf dem Strahle s beliebig liegenden Punkt V. Die Verbindungsgerade dieses Punktes V und des Scheitels A schneidet die Ebene β in einem Punkt A^0, der auf der Verbindungsgeraden k des Punktes $U = a_1 \times r_2$ und des Schnittpunktes der Geraden $m \times a$ liegen muss. Die den Punkt V enthaltenden Strahlen des durch das Haupttetraeder $ABCD$ und das Strahlenpaar a, a_1 auf die beschriebene Weise bestimmten Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes bilden, wie bekannt, einen Kegel 2. Grades, der die Ebene β in einer durch die Punkte A^0, B, C, D, U bestimmten Kurve 2. Grades schneidet. Man nehme ferner in der Ebene (Vk) des Punktes V und der Geraden k, in der auch der Strahl a liegt, eine beliebige den Punkt U enthaltende Gerade s_1 an, die die Ebene β in dem Punkt U_1 schneidet. Durch den Strahl s_1 wird ein neuer Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt, dessen den Punkt V enthaltende Strahlen einen neuen durch die Punkte U_1, B, C, D, A^0, beziehungsweise die Erzeugenden VU_1, VB, VC, VD, VA^0, bestimmten Kegel 2. Grades bilden. Die Verbindungsgerade $\bar{a}_1$ der Punkte D, U_1 ist ein zu dem Strahlenbüschel (B) gehörender Strahl. Um die Herstellung der projektiven Zuordnung der Strahlenbüschel $(A) \barwedge (D)$ zu ermöglichen, soll nebst der zugeordneten Strahlenpaare AB, DB und AC, DC auch das Strahlenpaar a, $\bar{a}_1$ dieser Büschel in Betracht gezogen werden. Da der Strahl s_1 die Transversale der zugeordneten Strahlen a, $\bar{a}_1$ der so projektiv zugeordneten Büschel (A), (D) ist, wird der durch das Strahlenpaar a, $\bar{a}_1$ dieser zwei Büschel auf die vorher beschriebene Weise bestimmte tetraedrale Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ mit dem durch den Strahl s_1 und dieses Haupttetraeder bestimmten tetraedralen Strahlenkomplex identisch sein. Die Verbindungsgerade t des Punktes $T = a \times r_1$ und des Schnittpunktes R_1 der Geraden $\bar{a}_1$, r_2, gehört als Komplexstrahl diesem tetraedralen Strahlenkomplex an, da diese Gerade t eine in der Ebene ϱ liegende Transversale des zugeordneten Strahlenpaares a, $\bar{a}_1$ ist. Die durch die Strahlen dieses Strahlenkomplexes als Berührungsgeraden in dieser Ebene bestimmte Kurve 2. Grades, wird durch die Berührungsgeraden r_1, r_2, b, c und t bestimmt. Vier den Punkt V enthaltende und in der Ebene (Vk) liegende Strahlen s_1, s_2, s_3, s_4 sollen den harmonischen Strahlenwurf $(s_1 s_2 s_3 s_4) = -1$ bilden, deren Schnittpunkte U_1, U_2, U_3, U_4 mit der Ebene β auf der Geraden k daher auch den harmonischen Punktwurf $(U_1 U_2 U_3 U_4) = -1$ bilden. Die Verbindungsgeraden $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ dieses harmonischen Punktwurfes und des Punktes D bilden den harmonischen Strahlenwurf $(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4) = -1$ des Strahlenbüschels (D), der die Gerade r_2 in dem harmonischen Punktwurf $(R_1 R_2 R_3 R_4) = -1$ schneidet. Die Verbindungsgeraden t_1, t_2, t_3, t_4 dieses harmonischen Punktwurfes und des Punktes T bilden weiter den in der Ebene ϱ liegenden harmonischen Geradenwurf $(t_1 t_2 t_3 t_4) = -1$. Die durch die Geraden t_1, t_2, t_3, t_4 bestimmten tetraedralen Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$ sind mit denjenigen tetraedralen Strahlenkomplexen dieses Haupttetraeders identisch, die durch die Geraden s_1, s_2, s_3, s_4 bestimmt sind. Es wurde weiter oben bewiesen, dass durch den harmonischen Geradenwurf $(s_1 s_2 s_3 s_4) = -1$ ein harmonischer tetraedraler Strahlenkomplexwurf des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt ist, der sich in dem tetraedralen Strahlenkomplexbüschel dieses Haupttetraeders befindet. Die in der Ebene liegenden Strahlen dieser vier tetraedralen Strahlenkomplexe hüllen vier Kurven 2. Grades ein, die sich in dem durch die Geraden r_1, r_2, b, c als Grundberührungsgeraden bestimmten Kurvenbüschel 2. Grades befinden. Aus den vorher erwähnten Eigenschaften derartiger Kurvenbüschel 2. Grades folgt, dass wegen $(t_1 t_2 t_3 t_4) = -1$ diese vier Kurven 2. Grades innerhalb dieses Kurvenbüschels 2. Grades in der Ebene ϱ einen harmonischen Kurvenwurf dieses Büschels bilden. Da die Ebene ϱ jede Ebene des Raumes sein kann, also unsere bisherigen Betrachtungen und Schlüsse für alle Punkte und Ebenen des Raumes gültig sind, gilt auch folgendes:

Die einen Punkt enthaltenden Strahlen der vier REYE*schen tetraedralen Strahlenkomplexe eines harmonischen tetraedralen Strahlenkomplexwurfes bilden einen harmonischen Kegelwurf 2. Grades, und die in einer Ebene liegenden Strahlen dieser vier tetraedralen Strahlenkomplexe hüllen vier Kurven 2. Grades eines harmonischen Kurvenwurfes 2. Grades ein. Die vier gemeinsamen Erzeugenden dieses Kegelwurfes laufen durch die vier Scheitel des gemeinsamen Haupttetraeders dieser vier tetraedralen Strahlenkomplexe, und die vier gemeinsamen Berührungsgeraden der vier Kurven des harmonischen Kurvenwurfes in jeder Ebene liegen in den Seitenebenen dieses gemeinsamen Haupttetraeders.*

Es ist offensichtlich, dass anstatt des harmonischen tetraedralen Strahlenkomplexwurfes eines tetraedralen Strahlenkomplexbüschels irgendein anderer tetraedraler Strahlenkomplexwurf dieses tetraedralen Strahlenkomplexbüschels angenommen werden kann, wo dann das Doppelverhältnis der vier Strahlenkegel dieser vier Strahlenkomplexe in diesem Büschel in jedem Raumpunkte dem Doppelverhältnis der vier durch die Strahlen dieser vier Strahlenkomplexe einhüllenden Kurven 2. Grades in jeder Raumebene gleich ist. Ein derartiges Doppelverhältnis kann als das Doppelverhältnis dieses tetraedralen Strahlenkomplexwurfes bezeichnet werden.

3. *Projektive Zuordnung zweier, dreier und vierer tetraedralen Strahlenkomplexbüschel und deren Erzeugnisse.* Man ordne drei tetraedralen Strahlenkomplexen eines tetraedralen Strahlenkomplexbüschels eines gemeinsamen Haupttetraeders drei tetraedrale Strahlenkomplexe eines anderen tetraedralen Strahlenkomplexbüschels eines neuen gemeinsamen Haupttetraeders zu. Ordnet man nun jedem vierten tetraedralen Strahlenkomplex des ersten tetraedralen Strahlenkomplexbüschels jenem vierten tetraedralen Strahlenkomplex des zweiten Strahlenkomplexbüschels zu, der mit den drei erwähnten ein Doppelverhältnis bildet, das dem zugeordneten Doppelverhältnis der vier zugeordneten tetraedralen Strahlenkomplexe des ersten Strahlenkomplexbüschels gleich ist, so wird auf diese Weise eine projektive Zuordnung dieser zwei tetraedralen Strahlenkomplexbüschel hergestellt, die der projektiven Zuordnung zweier Kurvenbüschel 2. Grades, oder zweier Strahlenbüschel, oder zweier Punktreihen analog ist. Jeder Punkt des Raumes wird zum gemeinsamen Scheitel zweier diesen tetraedralen Strahlenkomplexbüscheln angehörender projektiv zugeordneter Kegelbüschel 2. Grades, zu denen, wie bekannt, die Verbindungsgeraden des Kegelscheitels und der Scheitel der Haupttetraeder als Grunderzeugende gehören. Die in einer Raumebene liegenden Strahlen der diesen tetraedralen Strahlenkomplexbüscheln angehörenden Komplexen hüllen, bekanntlich, Kurven 2. Grades um, die zwei durch die Schnittgeraden dieser Raumebenen und der Seitenebenen der Haupttetraeder dieser zwei tetraedralen Strahlenkomplexbüschel als Grundberührungsgeraden bestimmte Kurvenbüschel 2. Grades bilden.

Auf Grund der Tatsache, dass das Erzeugnis zweier projektiv zugeordneter Kegelbüschel 2. Grades mit gemeinsamen Scheitel ein Kegel 4. Ordnung ist, folgt, dass das Erzeugnis zweier projektiv zugeordneter tetraedraler Strahlenkomplexbüschel ein Strahlenkomplex 4. Grades ist. Die Strahlen der acht Strahlenbündel der Scheitel der beiden Haupttetraeder gehören als Strahlen diesem Strahlenkomplex 4. Grades an.

Man nehme jetzt drei projektiv zugeordnete tetraedrale Strahlenkomplexbüschel P_1, P_2, P_3 an, deren Erzeugnis nicht ein einziger Strahlenkomplex 4. Grades ist. Das Erzeugnis des ersten (P_1) und des zweiten (P_2) Strahlenkomplexbüschels sei ein Strahlenkomplex 4. Grades K_{12}. Die Strahlenkomplexbüschel P_1, P_3 erzeugen den Strahlenkomplex K_{13}, und die Strahlenkomplexbüschel P_2, P_3 den Strahlenkomplex K_{23} desselben Grades. Je zwei beliebige dieser drei Strahlenkomplexe 4. Grades haben immer dieselbe Strahlenkongruenz gemeinsam, da deren Strahlen als gemeinsame Strahlen der tetraedralen Strahlenkomplexbüschel P_1, P_2, P_3 betrachtet werden können. Auf Grund der Tatsache, dass zwei Strahlenkomplexe 4. Grades (z. B. K_{12} und K_{13}) sich in einer Strahlenkongruenz 16. Ordnung und 16. Klasse schneiden, müsste also das Erzeugnis dreier projektiv zugeordneter tetraedralen Strahlenkomplexbüschel eine Strahlenkongruenz 16. Grades sein. Betrachtet man jedoch diese Strahlenkongruenz als Schnitt der Strahlenkomplexe K_{12}, K_{13}, so gehören dieser Kongruenz auch die Strahlen der Strahlenbündel der Scheitel des ersten Haupttetraeders, sowie auch die Strahlen in seinen Seitenebenen an, da sich diese vier Strahlenbündel und Geradenfelder in dem tetraedralen Strahlenkomplexbüschel P_1 befinden. Werden die Geraden der vier Scheitel und der vier Seitenebenen des ersten Haupttetraeders nicht als Bestandteile des Erzeugnisses unserer drei projektiv zugeordneten Strahlenkomplexbüschel betrachtet, so erhalten wir als Erzeugnis unserer drei Strahlenkomplexbüschel P_1, P_2, P_3 eine Strahlenkongruenz 12. Ordnung und 12. Klasse, also 12. Grades.

Man betrachte jetzt vier projektiv zugeordnete tetraedrale Strahlenkomplexbüschel P_1, P_2, P_3 und P_4. Drei dieser tetraedralen Strahlenkomplexbüschel erzeugen, wie wir sahen, eine Strahlenkongruenz 12. Grades. Der vierte dieser Strahlenkomplexbüschel erzeugt mit einem der drei ersten einen Strahlenkomplex 4. Grades, der mit der erwähnten Strahlenkongruenz 12. Grades eine Regelfläche vom 96. Grade gemeinsam hat, da diese Strahlenkongruenz 12. Grades sich im allgemeinen in diesem Strahlenkomplex 4. Grades nicht befindet. Welche drei unter diesen vier tetraedralen Strahlenkomplexbüscheln P_1, P_2, P_3, P_4 wir für die Herstellung der Strahlenkongruenz 12. Grades wählen, ist ganz gleich, da sich die Erzeugenden der erzeugten Regelfläche 96. Grades in allen sechs möglichen Strahlenkomplexen 4. Grades K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{23}, K_{24} und K_{34} als Strahlen befinden. Man kann also behaupten, dass das Erzeugnis von vier projektiv zugeordneten tetraedralen Strahlenkomplexbüscheln eine Regelfläche 96. Grades ist.

4. *Über die* REYE*schen tetraedralen Strahlenkomplexe mit gleichen charakteristischen Invarianten.* Drei Punkte B, C, D in der Bildebene nehme man als Scheitel eines Tetraeders $ABCD$ an, dessen Scheitel A sich irgendwo oberhalb der Bildebene befindet (Abb. 3 a). Eine den Scheitel A enthaltende Gerade n schneide die Bildebene im Punkt A^0, und eine die Gerade n im Punkt V schneidende Gerade l_1 schneide die Bildebene im Punkte A_1. Durch die Gerade l_1 ist, wie bekannt, ein REYEscher tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt. Alle die Gerade n schneidenden Strahlen dieses tetraedralen Strahlenkomplexes bilden, bekanntlich, Kegel 2. Grades mit auf der Geraden n sich befindenden Scheiteln und einer gemeinsamen in der Bildebene sich befindenden Basis, die durch die Punkte A_1, B, C, D und A^0 bestimmt ist. Dies gilt auf Grund der Tatsache, dass die Strahlen des Strahlenbüschels (A_1) des Punktes A_1 in der Ebene $(A_1 n)$ zu diesem tetraedralen Strahlenkomplex gehören. Die den Scheiteln A, B, C, D des Haupttetraeders $ABCD$ gegenüberliegenden Seitenebenen bezeichne man mit α, β, γ, δ, und die Schnittpunkte der Geraden l_1 und dieser Seitenebenen mit A_1, B_1, C_1, D_1. Die die Scheitel A, B, C, D enthaltenden Ebenen der Geraden l_1 bezeichne man mit α_1, β_1, γ_1, δ_1. Für jeden Komplexstrahl l_n unseres tetraedralen Strahlenkomplexes gilt, wie bekannt, $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1)$. Bezeichnet man die Schnittgeraden der Bildebene a und der Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1 mit $a = A_1 A^0$, $b = A_1 B$, $c = A_1 C$, $d = A_1 D$, so muss auch $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1) = (a\, b\, c\, d)$ gelten. Werden die Schnittpunkte der Geraden a, b und der Verbindungsgeraden $CD = s$ mit N, R_1 bezeichnet, so wird auf Grund des Satzes von PAPPUS auch $(a\, b\, c\, d) = (N\, R_1\, C\, D)$ gelten. Eine neue den Punkt V enthaltende Gerade l_2 schneide die Gerade a im Punkte A_2. Durch diese Gerade l_2 wird ein neuer REYEscher tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt. Durch alle Strahlen l_n des Strahlenbüschels (V) des Punktes V in der Ebene (Va), wird auf diese Weise der tetraedrale Strahlenkomplexbüschel des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt. Die Schnittpunkte A_n dieser Strahlen l_n und der Geraden a bilden die Punktreihe (a), die mit dem Punkt B verbunden den Strahlenbüschel (B) erzeugt. Durch die Schnittpunkte R_n der Strahlen des Strahlenbüschels (B) und der Geraden $CD \equiv s$ soll die Punktreihe (s) gebildet werden, die zu der Punktreihe (a) perspektiv zugeordnet, also $(a) \overset{=}{\wedge} (s)$, ist. Da auf diese Weise durch jeden Punkt A_n der Punktreihe (a) ein REYEscher tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt ist, und die Punkte N, C, D der Punktreihe (s) dabei invariant bleiben, wird der Wert der charakteristischen Invarianten dieser tetraedralen Strahlenkomplexe dem Werte des Doppelverhältnisses $(a\, b_n\, c_n\, d_n) = (N\, R_n\, C\, D)$ gleich sein.

Man nehme auf der Abb. 3 b) die Punkte $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ als die in der Bildebene liegenden Scheitel eines neuen Haupttetraeders $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ an. Eine den Scheitel $\bar{A}$ enthaltende Gerade $\bar{n}$ schneide die Bildebene im Punkt $\bar{A}^0$, und eine diese Gerade n enthaltende Ebene schneide die Bildebene in der Geraden $\bar{a}$, die die Verbindungsgerade $\bar{s} = \bar{C}\bar{D}$ im Punkte $\bar{N}$ schneidet. Auf der Verbindungsgeraden $\bar{s}$ wähle man jetzt einen Punkt $\bar{R}_1$ so, dass die Gleichung $(N\, R_1\, C\, D) = (\bar{N}\, \bar{R}_1\, \bar{C}\, \bar{D})$ befriedigt wird. Die Verbindungsgerade $\bar{B}\bar{R}_1 = \bar{b}$ schneide die Gerade $\bar{a}$ im Punkt $\bar{A}_1$, dessen Verbindungsgerade mit irgendeinem Punkt $\bar{V}$ auf der Geraden $\bar{n}$ mit $\bar{l}_1$ bezeichnet werden soll. Durch die Gerade $\bar{l}_1$ ist, wie bekannt, ein Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ bestimmt, für den der Wert der charakteristischen Invariante dem Werte des Doppelverhältnisses $(\bar{N}\, \bar{R}_1\, \bar{C}\, \bar{D}) = (N\, R_1\, C\, D)$ gleich ist. Auf diese Weise kann jedem Punkte R_n der Geraden s ein Punkt $\bar{R}_n$ der Geraden $\bar{s}$ zugeordnet werden, womit gleich auch die projektive Zuordnung der Punktreihen $(s) \overline{\wedge} (\bar{s})$ hergestellt ist. Die durch den Strahlenbüschel (B) des Punktes B durchgeführte Zuordnung der Punkte $\bar{R}_n$ der Geraden $\bar{s}$ zu den Punkten $\bar{A}_n$ der Geraden $\bar{a}$ ist die perspektive Zuordnung $(\bar{s}) \overline{\overline{\wedge}} (\bar{a})$ der Punktreihen $\bar{R}_n \equiv (\bar{s})$, $\bar{A}_n \equiv (\bar{a})$. Durch die Geraden $\bar{l}_n = \bar{V}\bar{A}_n$, und damit auch auf die beschriebene Weise durch die Punkte $\bar{A}_n$ der Punktreihe $(\bar{a})$, ist der tetraedrale Strahlenkomplexbüschel des Haupttetraeders $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ bestimmt. Durch beliebige vier Punkte A_2, A_3, A_4, A_5 der Geraden a sind, unseren Betrachtungen gemäss, vier Reyesche tetraedrale Strahlenkomplexe des tetraedralen Strahlenkomplexbüschels des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt. Die perspektive Lage der Punktreihen $(a) \overline{\overline{\wedge}} (s)$ ordnet den Punkten A_2, A_3, A_4, A_5 der Punktreihe (a) die Punkte R_2, R_3, R_4, R_5 der Punktreihe (s) zu, und die projektive Lage der Punktreihen $(s) \overline{\wedge} (\bar{s})$ ordnet diesen Punkten die Punkte $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$, $\bar{R}_4$, $\bar{R}_5$ der Punktreihe $(\bar{s})$ zu. Durch die perspektive Lage der Punktreihen $(\bar{s}) \overline{\overline{\wedge}} (\bar{a})$ werden den Punkten $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$, $\bar{R}_4$, $\bar{R}_5$ der Punktreihe $(\bar{s})$ die Punkte $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$, $\bar{A}_5$ der Punktreihe $(\bar{a})$ zugeordnet. Auf Grund $(s) \overline{\wedge} (\bar{s})$ folgt $(NR_2\, CD) = (\bar{N}\bar{R}_2\, \bar{C}\bar{D})$, $(NR_3\, CD)$, $= (\bar{N}\bar{R}_3\, \bar{C}\bar{D})$,

$(NR_4\,CD) = (\bar{N}\bar{R}_4\,\bar{C}\bar{D})$, $(NR_5\,CD) = (\bar{N}\bar{R}_5\,\bar{C}\bar{D})$, womit mit anderen Worten bewiesen ist, dass die durch die Punktepaare $A_2\,\bar{A}_2$, $A_3\,\bar{A}_3$, $A_4\,\bar{A}_4$, $A_5\,\bar{A}_5$ auf die beschriebene Weise bestimmten Paare Reyescher tetraedraler Strahlenkomplexe der Haupttetraeder $ABCD$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ charakteristische Invarianten gleichen Wertes haben. Auf Grund $(s) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} (a)$, $(s) \mathrel{\overline{\wedge}} (\bar{s})$ und $(\bar{s}) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} (\bar{a})$ folgt weiter $(A_2\,A_3\,A_4\,A_5) = (R_2\,R_3\,R_4\,R_5) = (\bar{R}_2\,\bar{R}_3\,\bar{R}_4\,\bar{R}_5) = (\bar{A}_2\,\bar{A}_3\,\bar{A}_4\,\bar{A}_5)$. Da A_2, A_3, A_4, A_5 ein ganz beliebig gewählter Punktquadrupel der Punktreihe (a) ist, also dasselbe für alle Punktquadrupel dieser Punktreihe und die ihnen zugeordneten Punktquadrupel der Punktreihe $(\bar{a})$ gilt, kann auf Grund dessen und aller unserer bisherigen Ausführungen und Schlüsse folgender Satz aufgestellt werden:

Ordnet man in zwei tetraedralen Strahlenkomplexbüscheln zweier Haupttetraeder die Reye*schen tetraedralen Strahlenkomplexe gleicher charakteristischer Invarianten einander zu, so wird damit die projektive Zuordnung dieser zwei tetraedralen Strahlenkomplexbüschel hergestellt.*

Auf Grund dieses Satzes und unserer in Abt. 3 ausgeführten Schlüsse, gelten auch folgende Sätze:

a) Man nehme im Raum zwei Tetraeder $ABCD$, $A^I\,B^I\,C^I\,D^I$ an, deren den Scheitelpunkten $A, B, C, D, A^I, B^I, C^I, D^I$ gegenüberliegende Seitenebenen mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha^I, \beta^I, \gamma^I, \delta^I$ bezeichnet seien, und deren keine zwei Kanten einander schneiden, und kein Scheitelpunkt in keiner Seitenebene liegt. Die Schnittpunkte einer Geraden l_n mit den Seitenebenen dieser Tetraeder bezeichne man mit A_n, B_n, C_n, D_n resp. A_n^I, B_n^I, C_n^I, D_n^I, und die diese Gerade l_n und die Scheitelpunkte A, B, C, D resp. A^I, B^I, C^I, D^I enthaltenden Ebenen bezeichne man mit α_n, β_n, γ_n, δ_n, resp. α_n^I, β_n^I, γ_n^I, δ_n^I.

Alle Geraden des Raumes, für die $(A_n\,B_n\,C_n\,D_n) = (A_n^I\,B_n^I\,C_n^I\,D_n^I) = (\alpha_n\,\beta_n\,\gamma_n\,\delta_n) = (\alpha_n^I\,\beta_n^I\,\gamma_n^I\,\delta_n^I)$, bezüglich der zwei gegebenen Tetraeder $ABCD$ und $A^I\,B^I\,C^I\,D^I$ gilt, bilden einen Strahlenkomplex 4. Grades.

b) Man nehme jetzt noch ein drittes Tetraeder $A^{II}\,B^{II}\,C^{II}\,D^{II}$ mit den seinen Scheiteln A^{II}, B^{II}, C^{II}, D^{II} gegenüberliegenden Seitenebenen α^{II}, β^{II}, γ^{II}, δ^{II} an, unter denselben räumlichen Vorbedingungen bezüglich der ersten zwei Tetraeder, wobei jede Gerade l_n die Seitenebenen des dritten Tetraeders in den Punkten A_n^{II}, B_n^{II}, C_n^{II}, D_n^{II} schneidet und die Ebenen α_n^{II}, β_n^{II}, γ_n^{II}, δ_n^{II} dieser Geraden die Scheitelpunkte A^{II}, B^{II}, C^{II}, D^{II} enthalten. Alle Geraden des Raumes, für die bezüglich der drei gegebenen Tetraeder $ABCD$, $A^I\,B^I\,C^I\,D^I$ und $A^{II}\,B^{II}\,C^{II}\,D^{II}$ $(A_n\,B_n\,C_n\,D_n) = (A_n^I\,B_n^I\,C_n^I\,D_n^I) = (A_n^{II}\,B_n^{II}\,C_n^{II}\,D_n^{II}) = (\alpha_n\,\beta_n\,\gamma_n\,\delta_n) = (\alpha_n^I\,\beta_n^I\,\gamma_n^I\,\delta_n^I) = (\alpha_n^{II}\,\beta_n^{II}\,\gamma_n^{II}\,\delta_n^{II})$ gilt, bilden eine Strahlenkongruenz 12. Ordnung und 12. Klasse.

c) Wird unter denselben räumlichen Vorbedingungen bezüglich der drei ersten noch ein viertes Tetraeder $A^{III} B^{III} C^{III} D^{III}$ angenommen, wobei die Schnittpunkte seiner Seitenebenen und der Geraden l_n mit A_n^{III}, B_n^{III}, C_n^{III}, D_n^{III} bezeichnet würden, und die die Scheitel A^{III}, B^{III}, C^{III}, D^{III} enthaltenden Ebenen dieser Geraden α_n^{III}, β_n^{III}, γ_n^{III}, δ_n^{III} sind, so gilt folgendes: Alle Geraden des Raumes, für die $(A_n B_n C_n D_n) = (A_n^I B_n^I C_n^I D_n^I) = (A_n^{II} B_n^{II} C_n^{II} D_n^{II}) = (A_n^{III} B_n^{III} C_n^{III} D_n^{III}) = (\alpha_n \beta_n \gamma_n \delta_n) = (\alpha_n^I \beta_n^I \gamma_n^I \delta_n^I) = (\alpha_n^{II} \beta_n^{II} \gamma_n^{II} \delta_n^{II}) = (\alpha_n^{III} \beta_n^{III} \gamma_n^{III} \delta_n^{III})$ bezüglich der vier gegebenen Tetraeder $ABCD$, $A^I B^I C^I D^I$, $A^{II} B^{II} C^{II} D^{II}$ und $A^{III} B^{III} C^{III} D^{III}$ gilt, bilden eine Regelfläche 96. Grades.

Es wird auch in den zwei letzten Fällen vorausgesetzt, dass keine drei oder vier Scheitelpunkte, und keine drei oder vier Seitenebenen der Haupttetraeder eine gemeinsame Gerade enthalten.

Angenommen auf der am 1. VII. 1957. abgehaltenen Sitzung der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften.