Serija II. T. 13. Zagreb 1958. Broj 2 POSEBAN OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Vilko Niče

Parametrische Sextupel Reyerscher tetraedraler Strahlenkomplexe eines und zweier Haupttetraeder

Parametarske šestorke Reyeovih tetraedralnih kompleksa jednog i dvaju glavnih tetraedara

Zagreb 1958

Štamparski zavod „Ognjen Prica“ Zagreb, Savska cesta 31

LASNIK MAT. - FIZ. I ASTR
Tom 13. — No. 2 — 1958.

PARAMETRISCHE SEXTUPEL REYESCHER TETRAEDRALER STRAHLENKOMPLEXE EINES UND ZWEIER HAUPTTETRAEDER

Vilko Niče, Zagreb

Die Schnittgeraden der kollinear zugeordneten Ebenen zweier kollinearen Räume sind mit den Verbindungsgeraden der kolinear zugeordneten Punkte dieser Räume identisch. Durch derartige Geraden wird, wie bekannt, ein Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex gebildet. Die Hauptpunkte und die Hauptebenen dieser zwei kollinearen Räume, die in Paaren auch konjugiert imaginär sein können, bilden das Haupttetraeder des erwähnten tetraedralen Strahlenkomplexes. In unseren Ausführungen werden nur Haupttetraeder mit reellen Eckpunkten und reellen Seitenebenen in Betracht gezogen.

Neben anderen Eigenschaften des Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes ist auch die folgende bekannt: Die durch die Eckpunkte des Hauptettraeders gehenden Ebenen der Strahlen des tetraedralen Strahlenkomplexes, und die Schnittpunkte dieser Strahlen mit den diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seitenebenen des Hauptetraeders bilden Ebenenquadrupel und Punktquadrupel, deren gleichnamige Doppelverhältnisse den gleichen und für alle Komplexstrahlen denselben Wert haben. Unter den gleichnamigen Doppelverhältnissen eines die Eckpunkte enthaltenden Ebenenquadrupels und eines durch die Schnittpunkte gebildeten Punktquadrupels eines und desselben Komplexstrahles sind diejenigen Doppelverhältnisse zu verstehen, bei denen sich der Schnittpunkt des Strahles mit einer Seitenebene im Punktdoppelverhältnis an derselben Stelle befindet, wie die den Gegeneckpunkt enthaltende Ebene im Ebenendoppelverhältnis. Der gemeinsame Wert der erwähnten gleichnamigen Doppelverhältnisse aller Komplexstrahlen ist als charakteristische Invariante des tetraedralen Strahlenkomplexes bekannt. Da jedes Punkt- oder Ebenenquadrupel 24 Doppelverhältnisse hat, die zu je vieren die sechs bekannten untereinander abhängigen Werte haben, folgt sofort, dass jeder Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex sechs charakteristische, untereinander abhängige Invarianten hat. Unter der charakteristischen Invariante eines tetraedralen Strahlenkomplexes ist immer einer dieser sechs Werte gemeint.

In dieser Arbeit wird zuerst die Zahl der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe eines gemeinsamen Haupttraeders betrachtet, bei denen eine der sechs charakteristischen Invarianten einen gegebenen Wert hat. Es werden auch solche tetraedrale Strahlenkomplexe betrachtet, deren charakteristische Invariante gleich -1 ist, und die als harmonische R e y esche tetraedrale Strahlenkomplexe bezeichnet werden können. Weiter werden mit Hilfe von Sextupeln solcher tetraedraler Strahlenkomplexe mit gleichwertigen charakteristischen Invarianten in Büscheln solcher Strahlenkomplexe eines und zweier Haupttetraeder interessante stereometrische Sätze des Geradenraumes abgeleitet.

1. Vor den Hauptbetrachtungen in dieser Arbeit soll folgende elementare Aufgabe gelöst werden: Es sind auf einer Geraden drei Punkte A, B, C gegeben. Wie viele Punkte D_n gibt es auf dieser

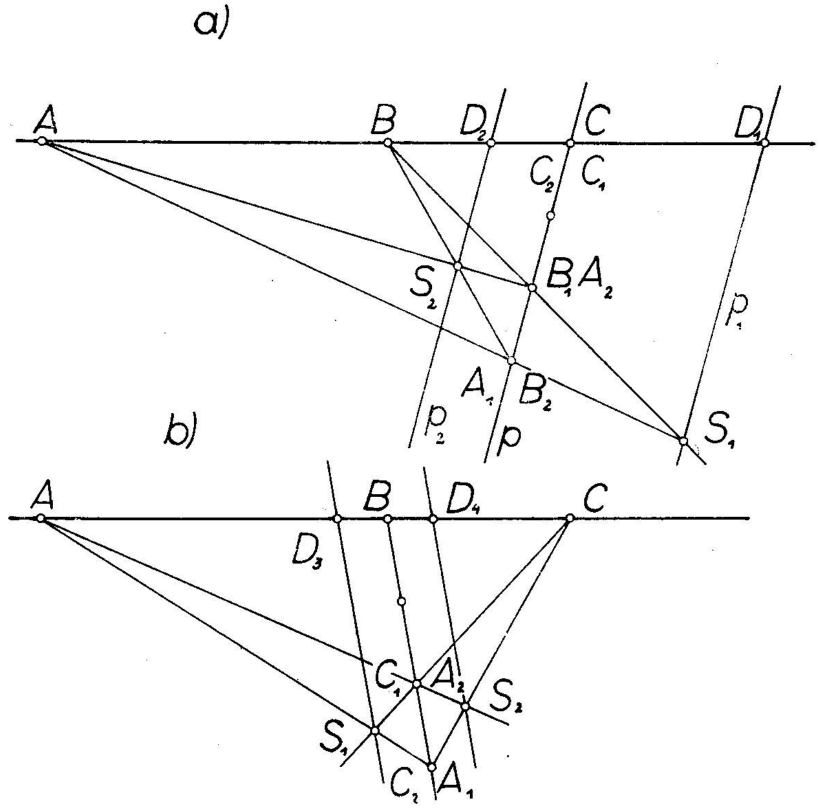

Abb. 1.

Geraden, die in den Punktquadrupeln A, B, C, D_n derartige Doppelverhältnisse bilden, dass einer von den 24 Doppelverhältnissen dieses Punktquadrupels einen gegebenen Wert λ hat? Denselben Wert haben selbstverständlich alle vier Doppelverhältnisse der gleichwertigen Gruppe in diesem Punktquadrupel.

Auf *Abb.* 1 a) sollen A, B, C die drei gegebenen Punkte sein, und es sei $\lambda = 3/2$. Ziehen wir durch den Punkt C eine beliebige

Gerade p, und tragen wir vom Punkt C aus drei gleiche Längen auf. Der zweite Teilpunkt sei mit B_1, und der dritte mit A_1 bezeichnet, während der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden AA_1, BB_1, S_1 sei. Die den Schnittpunkt S_1 enthaltende Gerade $p_1 \parallel p$ schneidet die Gerade der Punkte A, B, C im Punkt D_1, der mit den Punkten A, B, C einen Punktquadrupel bildet, für den $(ABCD_1) = 3/2$ gilt. Es ist klar, dass die Richtigkeit dieser Konstruktion auf dem bekannten Satz von Pappus begründet ist. Werden die Teilpunkte A_1, B_1 mit B_2, A_2 bezeichnet, so wird die den Schnittpunkt S_2 der Verbindungsgeraden AA_2, BB_2 enthaltende Gerade $p_2 \parallel p$ die Gerade der Punkte A, B, C im Punkt D_2 schneiden, der im Punktquadrupel A, B, C, D_2 das Doppelverhältniss $(BACD_2) = 3/2$ bildet.

Auf dieselbe Weise, mittels einer den Punkt B enthaltenden Geraden p, erhält man die Punkte D_3, D_4, die in den Punktquadrupeln A, B, C, D_3 und A, B, C, D_4 die Doppelverhältnisse $(ACBD_3) = 3/2$ und $(CABD_4) = 3/2$ bilden. (Abb. 1 b)). Mittels der durch den Punkt A gelegten Geraden p bekommt man ebenso die Punkte D_5, D_6, die die Doppelverhältnisse $(BCAD_5) = 3/2$ und $(CBAD_6) = 3/2$ bilden. Was für den Wert 3/2 gilt, kann selbstverständlich für jeden Wert des Parameters λ ausgeführt werden. Da bei der Konstruktion der Punkte D_n $(n = 1—6)$ alle möglichen Varianten in Betracht genommen wurden, bei denen es sich um die Bildung der Doppelverhältnisse des Punktquadrupels A, B, C, D_n mit gegebenem Werte $\lambda = 3/2$ handelte, folgt offenbar, dass für jeden Punkttripel A, B, C auf einer Geraden jedem Werte eines Parameters λ eine Gruppe von sechs Punkten D_n zugeordnet ist, die mit den Punkten A, B, C ein Doppelverhältnis des gegebenen Wertes bilden.

Dies gilt für alle Werte des Parameters λ mit Ausnahme der Werte $\lambda = 0, \pm 1, \infty$. Für $\lambda = 1$ fallen die Punkte D_1, D_2 in den Punkt C, die Punkte D_3, D_4 in den Punkt B und die Punkte D_5, D_6 in den Punkt A. Es ist auf Grund des Konstruktionsprozesses leicht zu erkennen, dass auch die Punkte D_{1-6}, für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, in die Punkte A, B, C fallen. Aus Abb. 1 a) ist leicht zu ersehen, dass wegen $A_1 \equiv B_2$ und $A_2 \equiv B_1$ auch folgendes gilt: $(ABCD_1) = 1 : (ABCD_2)$, oder $(ABCD_2) = 2/3$, auf Grund dessen auch $(ACBD_3) = 1 : (ABCD_4)$ und $(BCAD_5) = 1 : (BCAD_6)$. Für den Wert $\lambda = —1$, also $(ABCD_1) = -1$, wird auch $(ABCD_2) = -1$, da, wie gesagt, $(ABCD_1) = 1 : (ABCD_2) = —1$, also $(ABCD_2) = —1$ ist. Auf Grund dessen folgt weiter $(ABCD_1) = (ABCD_2) = (BACD_2)$, also auch die Tatsache, dass die Punkte D_1, D_2 zusammenfallen. Auf dieselbe Weise fallen auch für $\lambda = —1$ die Punkte D_3, D_4 und D_5, D_6 zusammen. Es folgt also: Liegen drei Punkte A, B, C auf einer Geraden, so bestehen auf dieser Geraden nur drei Punkte D, die mit den Punkten, A, B, C drei harmonische Punktquadrupel bilden.

2. Unter den bekannten Eigenschaften des Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes befindet sich auch die folgende: Alle Strahlen des Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes, die einen Punkt einer Seitenebene des Haupttetraeders dieses Komplexes enthalten, liegen in einer Ebene, die den dieser Seitenebene gegenüberligenden Eckpunkt des Haupttetraeders enthält. Es seien nun auf *Abb.* 2 die Punkte A, B, C, D die Eckpunkte des Haupttetraeders, und die diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seitenebenen seien mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet. Man wähle jetzt in der Ebene α einen Punkt K, und ziehe in dieser Ebene eine den Punkt K enthaltende Gerade, die die Kante ~~AB~~ BD im Punkt $\bar{A}$ schneidet. Die Verbindungsgerade CK schneide die Kante BD im Punkt $\bar{C}$. Alle Geraden des Punktes K in der Ebene $(A\bar{A}K)$ sind Strahlen desjenigen Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $ABCD$, für den der

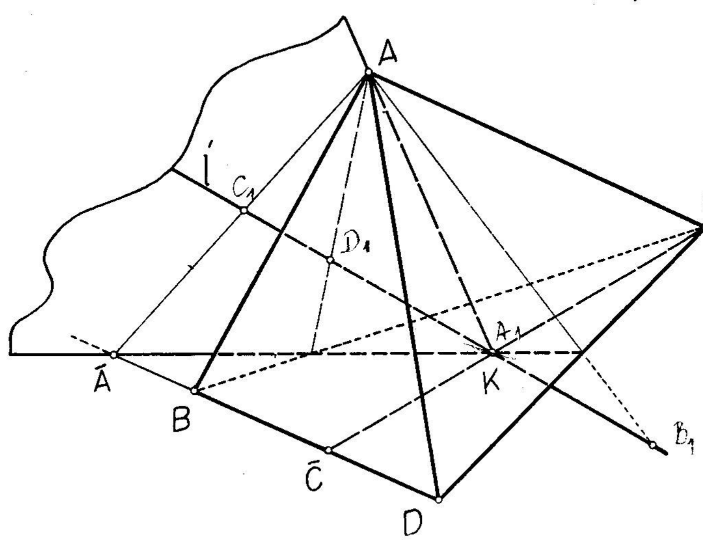

Abb. 2.

Wert der charakteristischen Invariante dem Werte eines der Doppelverhältnisse des Punktquadrupels $\bar{A}, B, \bar{C}, D$ gleich ist. Dies gilt für alle Strahlen dieses Strahlenbüschels (K) in der Ebene $(A\bar{A}K)$, ausser den Strahlen $K\bar{A}$ und KA, da diese zu jedem tetraedralen Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$ gehören.

Legen wir durch einen beliebigen Strahl l des Strahlenbüschels (K) Ebenen, $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \delta^1$ die die Eckpunkte A, B, C, D enthalten. Die Ebenen $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \delta^1$ eines jeden den Strahlen 1 angehörigen Ebenenquadrupels schneiden die Kante BD in Punkten $\bar{A}, B, \bar{C}, D$, wobei auf Grund des bekannten Pappusschen Satzes $(\bar{A}B\bar{C}D) = (\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \delta^1) = \lambda$ und für λ als Parameter durch entsprechende Annahme des Punktes $\bar{A}$ ein beliebiger Wert angenommen werden kann, der dem Werte der charakteristischen Invariante des auf diese Weise bestimmten tetraedralen Strahlenkomplexes gleich ist. Werden die Schnittpunkte der Komplexstrahlen und der Seitenebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Haupttetraeders $ABCD$ mit A^1, B^1, C^1, D^1 bezeichnet, so gilt, wie bekannt, auch $(A^1\, B^1\, C^1\, D^1) = (\alpha^1\, \beta^1\, \gamma^1\, \delta^1) = (\overline{A}B\overline{C}D) = \lambda$. Auf Grund des Pappusschen Satzes ist klar, dass es für unsere Ausführungen ganz gleich ist, in welcher der Seitenebenen wir den Punkt K wählen, da die Ebenen $l\overline{A} = \alpha^1, lB = \beta^1, l\overline{C} = \gamma^1, lD = \delta^1$ in jedem Falle dieselben bleiben.

In jedem Strahlenkomplex gibt es ∞^3 Strahlen, während sich im Raume ∞^4 Geraden befinden. Auf Grund von $(A^1\, B^1\, C^1\, D^1 = = (\alpha^1\, \beta^1\, \gamma^1\, \delta^1) = (\overline{A}B\overline{C}D) = \lambda$ wird für jeden Wert des Parameters λ eine Ebene der Verbindungsgeraden AK bestimmt, durch die weiter auch ein Reyescher tetraedraler Strahlenkomplexes des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt ist. Alle so bestimmten tetraedralen Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$, die ausser der Geraden der Eckpunkte und den Geraden der Seitenebenen dieses Haupttetraeders keine Strahlen gemeinsam haben können, bilden einen Strahlenkomplexbüschel tetraedraler Strahlenkomplexe, deren Strahlen alle Geraden des Raumes umfassen. Auf Grund dessen sehen wir auch, dass der Punkt K in unseren Betrachtungen in einer beliebigen der Seitenebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ angenommen werden kann, da wir in jedem Falle denselben Strahlenkomplexbüschel. derselben ∞^1 tetraedralen Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$ erhalten.

Es kann also behauptet werden, dass durch jeden Punkt $\overline{A}_n$ auf der Kante BD und durch den gegebenen Punkt K in der Seitenebene α, ein Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt ist, bei dem jeder Wert seiner sechs charakteristischen Invarianten einem Werte der sechs ungleichwertigen Doppelverhältnisse des Punktquadrupels $\overline{A}, B, \overline{C}, D$ gleich ist. Es ist klar, dass nebst dem festen Punkte K auch der Punkt $\overline{C}$ auf der Kante BD fest liegt, während für die verschiedenen Werte λ nur der Punkt $\overline{A}_n$ verschieden ist.

Will man nun die Zahl der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$ feststellen, bei denen die eine der charakteristischen Invarianten einen gegebenen Wert λ hat, so kann auf Grund unserer Betrachtungen diese Aufgabe durch die folgende ersetzt werden:

Wie viele Punkte $\overline{A}_n$ gibt es auf der Kante BD, die mit den festen Punkten $B, \overline{C}, D$ Punktquadrupel bilden, bei denen einer der sechs Werte ihrer 24 Doppelverhältnisse gleich dem gegebenen Werte λ ist.

Im Absatz 1. dieser Arbeit haben wir gesehn, dass es für jeden Wert des Parameters λ, ausser $\lambda = \pm 1, 0, \infty$, sechs derartige Punkte $\overline{A}_n$ gibt, also damit auch sechs der oben beschriebenen Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$ durch jeden Wert λ bestimmt ist. Es gilt also auch der folgende Satz:

Durch jeden Wert des Parameters λ, ausser den Werten $\lambda = \pm 1, 0, \infty$, ist in dem Strahlenkomplexbüschel der tetraedralen Strahlenkomplexe eines Haupttetraeders ein Sextupel dieser Strahlenkomplexe bestimmt, für den der Wert einer charakteristischen Invariante dem gegebenen Werte des Parameters λ gleich ist.

3. Die durch die Werte $\lambda = 1, 0, \infty$ bestimmten tetraedralen Strahlenkomplexe sind für unsere Betrachtungen nicht interessant, da diese in die Komplexe der Schnittgeraden der Kanten des Haupttetraeders zerfallen. Auf Grund der Betrachtungen nach Absatz 2. ist klar, dass es auf der Kante BD des Haupttetraeders drei Punkte $\overline{A}_n$ gibt, die mit den festen Punkten $B, \overline{C}, D$ harmonische Punktquadrupel bilden. Es gilt also auch folgender Satz:

In jedem Strahlenkomplexbüschel der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe eines Haupttetraeders befinden sich immer drei dieser Strahlenkomplexe, für die eine charakteristische Invariante gleich —1 ist

Man könnte dies auch so ausdrücken:

Jeder Strahlenkomplexbüschel der R e y *eschen tetraedralen Strahlenkomplexe eines Haupttetraeders besitzt drei harmonische Reyesche tetraedrale Strahlenkomplexe.*

4. In der Arbeit [1] wurden zwei Büschel R e y escher tetraedraler Strahlenkomplexe zweier Haupttetraeder unter anderem auch auf folgende Weise projektiv zugeordnet: Zuerst wurden den Eckpunkten A, B, C, D und den gegenüberliegenden Seitenebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines der Haupttetraeder die Eckpunkte $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ und die ihnen gegenüberliegenden Seitenebenen $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}$ des zweiten Haupttetraeders so zugeordnet, dass die Paare zugeordneter Eckpunkte und Seitenebenen gleiche Bezeichnungen tragen. Werden jetzt die Schnittpunkte der Komplexstrahlen und der Seitenebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des ersten Haupttetraeders mit A_n, B_n, C_n, D_n bezeichnet, und die diese Strahlen und die Eckpunkte A, B, C, D enthaltenden Ebenen mit $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$, während dies beim zweiten Haupttetraeder die Schnittpunkte $\overline{A}_n, \overline{B}_n, \overline{C}_n, \overline{D}_n$ und die Ebenen $\overline{\alpha}_n, \overline{\beta}_n, \overline{\gamma}_n, \overline{\delta}_n$ sind, so werden die tetraedralen Komplexbüschel dieser zwei Haupttetraeder auch dann projektiv zugeordnet, wenn $(A_n\, B_n\, C_n\, D_n = \alpha_n\, \beta_n\, \gamma_n\, \delta_n = (\overline{A}_n\, \overline{B}_n\, \overline{C}_n\, \overline{D}_n) = (\overline{\alpha}_n\, \overline{\beta}_n\, \overline{\gamma}_n\, \overline{\delta}_n)$ ist, wobei durch jeden Index n ein R e y escher tetraedraler Strahlenkomplex des ersten Haupttetraeders und ein solcher des zweiten Haupttetraeders bestimmt ist. Der Wert dieser Doppelverhältnisse für jedes n ist der gemeinsame Wert der charakteristischen Invarianten zweier in diesen Büscheln zugeordneten Strahlenkomplexe, und es ist offensichtlich, dass dies auch für die fünf anderen Paare charakteristischer Invarianten dieser zwei Strahlenkomplexe gilt.

In unseren weiteren Ausführungen werden wir die R e y eschen tetraedralen Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$ den R e y eschen tetraedralen Strahlenkomplexen des Haupttetraeders

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ auf folgende Weise zuordnen: Im Absatz 2. führten wir aus, dass für jeden Wert des Parameters λ in dem tetraedralen Strahlenkomplexbüschel ein Sextupel Reyescher tetraedraler Strahlenkomplexe des Haupttetraeders so bestimmt ist, dass diesem Werte der Wert einer charakteristischen Invariante dieser sechs Strahlenkomplexe gleich ist. Auf Grund dessen wird durch jeden Wert des Parameters λ einem Sextupel Reyescher tetraedraler Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$ ein Sextupel derartiger Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ zugeordnet, mit Ausnahme der Werte $\lambda = 0, 1, \infty$. Je einem tetraedralen Strahlenkomplex eines derartigen Sextupels sind andere fünf dieser Sextupel des ersten Haupttetraeders, sowie auch alle sechs des zugeordneten Sextupel des zweiten Haupttetraeders zugeordnet, und dadurch sind auch die zwei zugeordneten Sextupel bestimmt.

Mittels derartiger Zuordnung soll folgende Aufgabe gelöst werden: Es soll der geometrische Ort jener Geraden im Raum aufgesucht werden, die die Seitenebenen zweier gegebener Tetraeder in zwei Punktquadrupeln schneiden, bei denen wenigstens einer der 24 Doppelverhältnisse des ersten Punktquadrupels wenigstens einem der 24 Doppelverhältnisse des zweiten Punktquadrupels gleich ist. Wie bekannt, handelt es sich hier immer um den Wert einer der sechs gleichwertigen Gruppen von vier Doppelverhältnissen in jedem Punktquadrupel.

Auf Grund der bekannten Eigenschaften der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe und unserer bisherigen Betrachtungen folgt, dass durch jeden Wert des Parameters λ jeder Punkt des Raumes die gemeinsame Spitze von sechs Komplexstrahlenkegel 2. Grades ist, die die Eckpunkte des Haupttetraeders enthalten. Jede Erzeugende dieser sechs Kegel schneidet die Seitenebenen dieses Haupttetraeders $ABCD$ im Punktquadrupel, für das der Wert eines seiner 24 Doppelverhältnisse dem gegebenen Werte von λ gleich ist. Dasselbe gilt für die Strahlenkomplexe des ersten, wie auch des zweiten Haupttetraeders, selbstverständlich in jedem Punkte des Raumes. Die gemeinsamen Erzeugenden dieser zum ersten und zweiten Haupttetraeder gehörenden Kegel in jedem Punkte des Raumes werden also den geometrischen Ort der vorher gesuchten Geraden bilden, ausgenommen die die Eckpunkte beider Haupttetraeder enthaltenden Erzeugenden. Jeder dem ersten Haupttetraeder angehörige Kegel 2. Grades jedes Raumpunktes durchdringt die sechs dem zweiten Haupttetraeder angehörigen Kegel 2. Grades desselben Raumpunktes in 24 gemeinsamen Erzeugenden. Die sechs dem ersten Haupttetraeder angehörigen Kegel jedes Raumpunktes haben also mit den sechs derartigen Kegeln des zweiten Haupttetraeders $6 \cdot 24 = 144$ Erzeugende gemeinsam.

Alle in einer Ebene liegenden Strahlen eines Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes hüllen, wie bekannt, eine Kurve 2. Klasse ein, die alle vier Seitenebenen des zu diesem Komplex gehörenden Haupttetraeders berühren. Auf Grund dessen kann ganz einfach dual geschlossen werden, dass sich auch in jeder Ebene des Raumes 144 Gerade befinden, die als gemeinsame Strahlen der zwei Reyeschen Strahlenkomplexe die Seitenebene ihrer Haupttetraeder in Punktquadrupeln schneiden, in denen eines der 24 Doppelverhältnisse des ersten Punktquadrupels den gleichen Wert wie eines der 24 Doppelverhältnisse des zweiten Punktquadrupels haben wird.

Die vorher besprochene Aufgabe hat also folgende Lösung:

Alle Geraden des Raumes, die die Seitenebenen zweier gegebener Tetraeder in derartigen zwei Punktquadrupeln schneiden, in denen einer der sechs Werte der 24 Doppelverhältnisse des ersten Punktquadrupels einem festen im voraus gegeneben Werte der sechs Werte der 24 Doppelverhältnisse des zweiten Punktquadrupels gleich ist, bilden eine Strahlenkongruenz 144-ten Ordnung und Klasse, also 144-ten Grades.

Jedem festen im voraus gegebenen Werte λ ist also eine solche Strahlenkongruenz zweier Tetraeder zugeordnet.

Auf Grund der bekannten Eigenschaften des Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes gilt auch der folgende dem obigen duale Satz:

Alle Geraden des Raumes, deren die Eckpunkte zweier Tetraeder enthaltende Ebenen zwei Ebenenquadrupel bilden, für die einer der sechs Werte der 24 Doppelverhältnisse des ersten Ebenenquadrupels einem festen im voraus gegebenen Werte der sechs Werte der 24 Doppelverhältnisse des zweiten Ebenenquadrupels gleich ist, bilden eine Strahlenkongruenz 144-ten Grades.

Auf Grund dessen, dass jedem Werte des Parameters λ eine derartige Strahlenkongruenz zugeordnet ist, folg, dass durch alle Werte des Parameters λ ein Büschel derartiger Strahlenkongruenzen 144-ten Grades bestimmt ist.

5. Im Absatz 3. dieser Arbeit haben wir gesehn, dass jeder Büschel der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe eines Haupttetraeders drei harmonische Strahlenkomplexe (für $\lambda = -1$) enthält. Jeder Raumpunkt ist also die gemeinsame Spitze dreier zu diesen drei harmonischen Strahlenkomplexen gehörden Strahlenkegln 2. Grades, die die Eckpunkte des Haupttetraeders enthalten. Sind im Raum durch zwei Haupttetraeder zwei Büschel Reyscher tetraedraler Strahlenkomplexe bestimmt, so laufen also durch jeden Punkt im Raum 3.4.3 = 36 gemeinsame Strahlen der harmonischen Strahlenkomplexe dieser zwei Strahlenkomplexe dieser zwei Strahlenkomplexbüschel, von denen immer einer der harmonischen Strahlenkomplexe zum ersten und der zweite zum zweiten Strahlenkomplexbüschel gehören.

Wie obenen kann auch hier bewiesen werden, dass sich in jeder Ebene des Raumes 36 derartige gemeinsame Komplexstrahlen befinden. Es gelten also folgende Sätze:

a) *Alle Geraden des Raumes, deren Schnittpunkte mit den Seitenebenen zweier Tetraeder harmonische Punktquadrupel bilden, bilden eine Strahlenkongruenz 36-ten Grades.*

b) *Alle Geraden des Raumes, deren die Eckpunkte zweier Tetraeder enthaltende Ebenen zwei harmonische Ebenenquadrupel bilden, bilden eine Strahlenkongruenz 36-ten Grades.*

6. Die Schnittpunkte der Geraden und der Seitenebenen α, β, γ, δ, bzw. $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$ zweier Tetraeder $ABCD$, bzw. $\overline{ABCD}$, bezeichne man mit A_n, B_n, C_n, D_n, bzw. $\overline{A}_n, \overline{B}_n, \overline{C}_n, \overline{D}_n$. Die Geraden, für die $(A_n, B_n, C_n, D_n) = \lambda$ gilt, bilden, wie schon im Absatz 2. erwöhnt, wurde, einen Büschel Reyescher tetraedraler Strahlenkomplexe des Haupttetraeders $ABCD$, wobei durch jeden Wert von λ ein Strahlenkomplex dieses Büschels bestimmt ist. Durch die Gleichung $(\overline{A}_n\, \overline{B}_n\, \overline{C}_n\, {}_n\overline{D}) = \mu$ ist ein zweiter derartiger Strahlenkomplexbüschel des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt, bei dem durch die Werte des Parameters μ gewisse Strahlenkomplexe dieses Büschels bestimmt sind. Auf Grund der bekannten Eigenschaften der Doppelverhältnisse ist klar, dass wegen $(A_n\, B_n\, C_n\, D_n) = \lambda$ und $(\overline{A}_n\, \overline{B}_n\, \overline{C}_n\, \overline{D}_n) = \mu$, auch $(D_n\, C_n\, B_n\, A_n) = (C_n\, D_n\, A_n\, B_n) = (B_n\, A_n\, D_n\, C_n) = \lambda$, und $(\overline{D}_n\, \overline{C}_n\, \overline{B}_n\, \overline{A}_n) = (\overline{C}_n\, \overline{D}_n\, \overline{A}_n\, \overline{B}_n) = (\overline{B}_n\, \overline{A}_n\, \overline{D}_n\, \overline{C}_n) = \mu$ gilt. Derartige vier Doppelverhältnisse gleichen Wertes eines Punktquadrupels oder eines Ebenenquadrupels haben wir schon oben als eine Gruppe gleichwertiger Doppelverhältnisse bezeichnet. Setzen wir jetzt $\lambda = \mu$, bzw. $(A_n\, B_n\, C_n\, D_n) = (\overline{A}_n\, \overline{B}_n\, \overline{C}_n\, \overline{D}_n)$.

Durch eine derartige Zuordnung werden diese zwei Strahlenkomplexbüschel projektiv zugeordnet, und man bekommt als ihr Erzeugnis einen Strahlenkomplex vierten Grades.. Jedem tetraedralen Strahlenkomplexe des ersten Büschels wurde auf diese Weise ein solcher tetraedraler Strahlenkomplex des zweiten Büschels zugeordnet, so dass einander zugeordnete Strahlenkomplexe gleichnamige Doppelverhältnisse gleichen Wertes haben. Es ist hier nicht nötig zu erwähnen, dass auch die anderen fünf Werte der charakteristischen Invarianten in Paaren gleich sind. Alle Strahlen des erhaltenen Strahlenkomplexes vierten Grades schneiden also die Seitenebenen der beiden Haupttetraeder in Punktquadrupeln, in denen gleichnamige Doppelverhältnisse den gleichen Wert haben. Dies gilt dann auch für die Ebenenquadrupel der die Eckpunkte der Haupttetraeder enthaltenden Ebenen dieser Strahlen.

Es gibt in jedem Punkt- und Ebenenquadrupel sechs Doppelvarhältnissgruppen, wobei jede dieser Gruppen aus vier gleichwertigen Doppelverhältnissen besteht, und die sechs Werte dieser Gruppen untereinander abhängig sind. In den Punktquadrupeln A_n, B_n, C_n, D_n und $\overline{A}_n, \overline{B}_n, \overline{C}_n, \overline{D}_n$ der betrachteten Schnittpunkte mit den Seitenebenen der Haupttetraeder $ABCD$ und $\overline{ABCD}$ nehme man als Vertreter der erwähnten sechs Gruppen gleichwertiger

Doppelverhältnisse folgende Doppelverhältnisse an: $(A_n\, B_n\, C_n\, D_n)$, $(B_n\, A_n\, C_n\, D_n)$, $(A_n\, C_n\, B_n\, D_n)$, $(C_n\, A_n\, B_n\, D_n)$, $(B_n\, C_n\, A_n\, D_n)$, $(C_n\, B_n\, A_n\, D_n)$ und $(\overline{A}_n\, \overline{B}_n\, \overline{C}_n\, \overline{D}_n)$, $(\overline{B}_n\, \overline{A}_n\, \overline{C}_n\, \overline{D}_n)$, $(\overline{A}_n\, \overline{C}_n\, \overline{B}_n\, \overline{D}_n)$, $(\overline{C}_n\, \overline{A}_n\, \overline{B}_n\, \overline{D}_n)$, $(\overline{B}_n\, \overline{C}_n\, \overline{A}_n\, \overline{D}_n)$, $(\overline{C}_n\, \overline{B}_n\, \overline{A}_n\, \overline{D}_n)$. Mit jedem Wert des Parameters λ wird durch die Gleichung $(A_n\, B_n\, C_n\, D_n) = \lambda$ ein Reyescher tetraedraler Strahlenkomplex des Haupttetraeders $ABCD$ bestimmt, und dasselbe gilt auch für die anderen fünf Doppelverhältnisse des ersten, wie auch für die sechs des zweiten Haupttetraeders.

Man gebe jetzt einem Vertreterdoppelverhältnisse der Gruppe des ersten Haupttetraeders und einem der Vertreterdoppelverhältnisse der Gruppe des zweiten Haupttetraeders gleiche Werte. Z. B. $(B_n\, A_n\, C_n\, D_n) = (\overline{C}_n\, \overline{A}_n\, \overline{B}_n\, \overline{D}_n) = \lambda$. Es sind auf diese Weise wieder zwei projektiv zugeordnete tetraedrale Strahlenkomplexbüschel der Haupttetraeder $ABCD$ und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ bestimmt, wenn auch diese zwei gleichwertigen Doppelverhältnisse nicht gleichnamig sind. Vertauscht man nämlich die Bezeichnungen der Eckpunkte $\overline{B}$, $\overline{C}$ des Haupttetraeders $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$, so wird im Raum bei der projektiven Zuordnung dieser zwei Komplexbüschel gar nichts neues geschehen, aber die zwei ungleichnamigen Doppelvarhältnisse verwendeln sich in zwei gleichnamige, und dadurch werden diese zwei Strahlenkomplexbüschel wie die schon erwähnten projektiv zugeordnet. Jeder Wert des Parameters λ bestimmt durch die Gleichung $(B_n\, A_n\, C_n\, D_n) = (\overline{C}_n\, \overline{A}_n\, \overline{B}_n\, \overline{D}_n) = \lambda$ einem Strahlenkomplex vierten Grades.

Auf ganz dieselbe Weise kann jedes Vertreterdoppelverhaltnis der ersten Gruppe einem Vertreterdoppelverhältnis der zweiten Gruppe zugeordnet werden. Man erhält also bei diesen Zuordnungen $6 \cdot 6 = 36$ Paare projektiv zugeordneter tetraedraler Strahlenkomplexbüschel, von denen jedes Paar dieser projektiv zugeordneten Büschel einen bekannten Strahlenkomplex vierten Grades erzeugt. Man hat also 36 Strahlenkomplexe vierten Grades erzeugt, deren Strahlen die Seitenebenen der Haupttetraeder $A\,B\,C\,D$ und $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ in Punktquadrupeln schneiden, in denen der Wert eines Doppelverhältnisses des ersten Punktquadrupels dem Werte eines der Doppelverhältnisse des zweiten Punktquadrupels gleich ist. Es ist klar, dass diese zwei Doppelverhältnisse nicht gleichnamig sein müssen, wie auch alle zugeordneten Paare nicht denselben Wert haben werden. Jeder Raumpunkt ist also die gemeinsame Spitze von 36 Kegeln vierter Ordnung und in jeder Ebene liegen 36 Kurven vierter Klasse, die aus den Strahlen dieser Komplexe als Erzeugenden bzw. Tangenten, zausammengesetzt sind. Auf jeder gemeinsamen Erzeugenden dieser 36 Kegel vierter Ordnung in jeden Raumpunkt, die keinen Eckpunkt der zwei Haupttetraeder $ABCD$ und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ enthält, und auf jeder gemeinsamen Tangente der 36 Kurven vierter Klasse in jeder Ebene des Raumes, die in keiner Seitenebene der zwei erwähnten Haupttetraeder liegt, befinden sich also zwei nicht gleichwertige Doppelverhältnisse im Schnittpunktquadrupel mit den Seitenebene des ersten Haupttetraeders und zwei nicht gleichwertige Doppelverhältnisse im Schnittpunktquadrupel mit den Seitenebenen des zweiten Haupttetraeders, bei denen die Werte in Paaren gleich sind. In jedem Paar befindet sich offensichtlich ein Doppelverhältnis bezüglich des ersten und ein Doppelverhältnis bezüglich des zweiten Haupttetraeders.

Da die 36 Kegel vierter Ordnung in jedem Raumpunkt die acht die Eckpunkte der Haupttetraeder enthlatenden Erzeugenden immer gemeinsam haben, so bestehen für jede zwei derartige Kegel nur acht weitere gemeinsame Erzeugende, die die Eckpunkte nicht enthalten. Jeder Punkt des Raumes enthält also $8 \cdot \binom{36}{2} = 5040$ derartige gemeinsame Erzeugende der beschriebenen 36 Kegel vierter Ordnung, die die Eckpunkte der zwei Haupttetraeder nicht enthalten. Ebensoviele derartige Geraden befinden sich auch in jeder Ebene des Raumes, was sehr leicht dual nachzuweisen ist. Auf Grund aller dieser Betrachtungen gilt also auch folgender Satz:

Alle Geraden des Raumes, die die Seitenebenen zweier Tetraeder in derartigen zwei Punktquadrupeln schneiden, in denen sich zwei verschiedenwertige Doppelverhältnisse im ersten und zwei ebensolche im zweiten Punktquadrupel befinden, die in Paaren gleiche Werte haben, bilden eine Strahlenkongruenz 5040-ten Grades.

Ordnen wir bei der beschriebenen Zuordnung der Vertreterdoppelverhältnisse nur die gleichnamigen einander zu, also: $(A_n\, B_n\, C_n\, D_n) = (\bar{A}_n\, \bar{B}_n\, \bar{C}_n\, \bar{D}_n)$, $(B_n\, A_n\, C_n\, D_n) = (\bar{B}_n\, \bar{A}_n\, \bar{C}_n\, \bar{D}_n)$ u. s. w., so erhält man als Erzeugnisse dieser sechs Paare projektiv zugeordneter Strahlenkomplexbüschel nur sechs der oben erwähnten Strahlenkomplexe vierten Grades. Jeder Punkt des Raumes ist also die gemeinsame Spitze der sechs Strahlenkegel dieser Strahlenkomplexe und durch jeden Raumpunkt laufen $8 \cdot \binom{6}{2} = 120$ gemeinsame Erzeugende dieser Kegel. Auch hier muss die Tatsache berücksichtigt werden, dass die sechs Strahlenkegel jedes Raumpunktes die Eckpunkte der Haupttetraeder $ABCD$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ enthalten. In jeder Ebene des Raumes befindet sich selbstverständlich die gleiche Zahl derartiger Geraden. Auf Grund dessen gilt auch folgender Satz: Alle Geraden des Raumes, die die Seitenebenen zweier Tetraeder in derartigen zwei Punktquadrupeln schneiden, dass sich in jedem dieser Punktquadrupel zwei ungleichwertige Doppelverhältnisse befinden, die in Paaren gleichwertig und gleichnamig sind, bilden eine Strahlenkongruenz 120-ten Grades.

Offenbar ist diese Strahlenkongruenz 120-ten Grades ein Bestandteil der Strahlenkongruenz 5040-ten grades. Ersetzt man die Punktquadrupel der Schnittpunkte durch die Ebenenquadrupel der die den Seitenebenen gegenüberliegenden Eckpunkte enthaltenden Ebenen, so erhält man den letzten zwei Sätzen duale Sätze für dieselben zwei Strahlenkongruenzen.

7. In jedem tetraedralen Strahlenkomplexbüschel eines Haupttetraeders befinden sich drei harmonische tetraedrale Strahlenkomplexe. Durch zwei Haupttetraeder $ABCD$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ sind zwei derartige Strahlenkomplexbüschel bestimmt, und in jedem dieser Büschel befinden sich drei tetraedrale Strahlenkomplexe, deren Strahlen die Seitenebenen des Haupttetraeders $ABCD$, bzw. $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ in harmonischen Punktquadrupeln schneiden. Die gemeinsamen Erzeugenden der sechs Strahlenkegel zweiter Ordnung dieser sechs Strahlenkomplexe in jedem Raumpunkt werden also die Seitenebenen des ersten und des zweiten Haupttetraeders in harmonischen Punktquadrupeln schneiden. Die Zahl dieser gemeinsamen Erzeugenden beträgt $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$, da bei der Durchdringung dieser Strahlenkegel nur die zu zwei verschiedenen Haupttetraedern gehörenden Kegel in Betracht kommen. Man weiss schon, dass dieselbe Zahl derartiger Geraden sich auch in jeder Ebene des Raumes befindet, so dass auch folgender Satz gilt:

Alle Geraden des Raumes, die die Seitenebenen zweier Tetraeder in zwei harmonischen Punktquadrupeln schneiden, bilden eine Strahlenkongruenz 36-ten Grades.

Es ist offensichtlich, dass auf Grund der bekannten Eigenschaften der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe auch der folgende duale Satz gilt:

Alle Geraden des Raumes, deren die Eckpunkte zweier Tetraeder enthalten Ebenen zwei harmonische Ebenenquadrupel bilden, bilden eine Strahlenkongruenz 36-ten Grades.

Es ist klar, dass auch diese Strahlenkongruenz ein Bestandteil der zwei letzten ist.

LITERATUR

[1] V. *Niče*, Die Büschel der Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexe und ihre projektive Zuordnung, »Rad« Jug. Akad. knj. 314.

PARAMETARSKE ŠESTORKE REYEOVIH TETRAEDRALNIH KOMPLEKSA JEDNOG I DVAJU GLAVNIH TETRAEDARA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Poznato je, da istoimeni dvoomjeri probodišta zraka Reyeovog tetraedralnog kompleksa s pobočnim ravninama njegovog glavnog tetraedra, imaju jednaku vrijednost. Ova se vrijednost zove prva karakteristična invarijanta tog kompleksa. No to je samo jedna od karakterističnih invarijanata tog kompleksa, jer on ima još i daljnjih pet, koje su o prvoj ovisne, što proizlazi iz činjenice, da svaka

četvorka točaka na nekom pravcu ima 24 dvoomjera sa šest skupina od po četiri dvoomjera jednakih vrijednosti. Vrijednost ovih dvoomjera probodišta jednaka je vrijednosti dvoomjera četvorke ravnina položenih tim zrakama i nasuprotnim vrhovima glavnog tetraedra. Pod istoimenim dvoomjerima razumijevamo uvijek one dvoomjere, kod kojih se probodišta s istim pobočnim ravninama nalaze uvijek na istom mjestu tih dvoomjera. Analogno vrijedi i za istoimene dvoomjere četvorki ravnina zraka takvog kompleksa, koje prolaze vrhovima njegovog glavnog tetraedra.

Zadamo li po volji neku vrijednost λ, koja neka je prva karakteristična invarijanta jednog Reyeovog tetraedralnog kompleksa nekog zadanog glavnog tetraedra $ABCD$, može se postaviti pitanje, da li je ovom zadanom karakterističnom invarijantom λ i ovim zadanim glavnim tetraedrom $ABCD$ određen samo jedan Reyeov tetraedralni kompleks, ili možda njih više? U ovoj radnji pokazano je, da takvih kompleksa postoji šest. Dokaz za ovo svodi se na ovu činjenicu: Zadamo li na nekom pravcu po volji tri točke A, B, C i vrijednost λ, tada na tom pravcu postoji šest točaka D_n, kojima će jedan, a prema tome i daljnja tri, između 24 dvoomjera četvorke, A, B, C, D_n imati zadanu vrijednost λ. Ti dvoomjeri su ovi: $(ABCD_1) = (BACD_2) = (ACBD_3) = (CABD_4) = (BCAD_5) = (CBAD_6) = \lambda$.

Spomenuti dokaz oslanja se na ovu osobinu Reyeovog tetraedralnog kompleksa: Sve zrake Reyeovog tetraedralnog kompleksa nekog glavnog tetraedra $ABCD$, koje prolaze jednom točkom jedne pobočke tog tetraedra, čine pramen pravaca, kojeg ravnina sadrži toj pobočki nasuprotni vrh tog tetraedra. Neka je točka K u ravnini pobočke ABC vrh takvog pramena zraka našeg kompleksa. Postavimo li bilo kojom zrakom ovog pramena i vrhovima A, B, C, D glavnog tetraedra ravnine, sjeći će one brid AB u točkama $A, B, \overline{C}, \overline{D}$. Očito je, na temelju Pappusova stavka, da je $(AB\overline{C}\overline{D}) = \lambda$ jedna karakteristična invarijanta tog tetraedralnog kompleksa, ako su $\overline{C}, \overline{D}$ sjecišta tog brida ravninama, koje prolaze vrhovima C, D. Ravnina, koja prolazi vrhom D, je očito ista za svaku zraku tog pramena zraka. Uzmemo li sada spojnicu KD kao os pramena ravnina, a u svakoj toj ravnini pramen zraka vrha K, bit će svakim tim pramenom određen po jedan Reyeov tetraedralni kompleks zadanog glavnog tetraedra $ABCD$, kojemu će prva karakteristična invarijanta imati vrijednost $(AB\overline{C}\overline{D}_n) = \lambda$ gdje je $\overline{D}_n$ sjecište brida AB sa svakom takvom ravninom spojnice KD. Budući da je jednim glavnim tetraedrom određeno ∞^1 Reyeovih tetraedralnih kompleksa, to će pramenom ravnina spojnice KD na opisani način biti zadani svi takvi kompleksi tog glavnog tetraedra. Kako su kod sječenja brida AB s ravninama svake zrake točke K, bilo u kojoj ravnini spojnice KD, koje prolaze vrhovima A, B, C, D, točke A, B i $\overline{C}$ ostale iste, to je prema tome na opisani način svakom točkom $\overline{D}_n$ na bridu AB, uz zadani vrh K u ravnini ABC, određen po jedan Reyeov tetraedralni kompleks glavnog tetraedra $ABCD$.

Spomenuli smo već, da uz čvrste točke $A, B, \bar{C}$ na bridu AB postoji na tom bridu šest točaka $\bar{D}_n$ tako, da one s točkama $A, B, \bar{C}$ čine dvoomjere jednakih vrijednosti. Izlazi dakle, da mi sve Reyeove tetraedralne komplekse pramena takvih kompleksa jednog glavnog tetraedra možemo razdijeliti u ∞^1 grupa po šest takvih kompleksa s karakterističnim invarijantama jednakih vrijednosti.

Budući da je $(ABCD_1) = 1 : (BACD_1)$, što dakako vrijedi i za preostalih pet spomenutih dvoomjera točaka D_2, D_3, D_4, D_5 i D_6, to na pravcu točaka A, B, C postoje samo tri točke $\bar{D}_n$, koje s točkama $A, B, \bar{C}$ čine harmonijske četvorke točaka. Izlazi prema tome, da unutar svih Reyeovih tetraedralnih kompleksa jednog glavnog tetraedra postoje uvijek tri, kojima je vrijednost jedne karakteristične invarijante jednaka —1.

Vidimo dakle, da je svakoj vrijednosti nekog parametra λ, osim $\lambda = 0, \pm 1, \infty$, pridružena jedna šestorka Reyeovih tetraedralnih kompleksa za svaki realni tetraedar kao glavni tetraedar tih kompleksa. Iz činjenice, da je Reyeov tetraedralni kompleks kvadratni, a uz pomoć razmatranja u ovoj radnji, dobiven je ovaj stavak:

Svi pravci prostora, koji pobočne ravnine dvaju tetraedara probadaju u takvim dvjema četvorkama točaka, kojima će vrijednost barem jednog od 24 dvoomjera svake ove četvorke imati neku zadanu vrijednost λ, čine kongruenciju 144-tog reda i razreda.

Ako je $\lambda = -1$, onda je takva kongruencija 36-tog reda i razreda, dok se za $\lambda = 0, 1, \infty$ raspada ta kongruencija u same linearne hiperboličke kongruencije.

Provedemo li ovo isto za svaku vrijednost parametra λ za ovakva dva glavna tetraedra, sačinjavat će svih ∞^1 ovakvih kongruencija 36 kompleksa četvrtog stupnja. Zajedničke zrake svih ovih kompleksa, koje ne prolaze vrhovima glavnih tetraedara, čine kongruenciju 5040-tog reda i razreda, pa se na taj način dobiva ovaj stavak:

Svi pravci prostora, koji pobočne ravnine dvaju tetraedara probadaju u takvim dvjema četvorkama točaka, kod kojih će postojati takva dva dvoomjera raznih istovrijednih grupa u prvoj četvorci i dva takva dvoomjera u drugoj četvorci, kojima će vrijednost po jednog tog dvoomjera u prvoj četvorci i po jednog dvoomjera od tih u drugoj četvorci, biti jednake, čine kongruenciju 5040-tog reda i razreda.

Ako su parovi dvoomjera jednakih vrijednosti u tim dvjema četvorkama probodišta istoimeni, onda svi takvi pravci unutar spomenute kongruencije 5040-tog reda i razreda čine kongruenciju 120-tog reda i razreda.

Zamijenimo li probodišta zraka s pobočnim ravninama dvaju tetraedara s ravninama tih zraka, koje prolaze tim pobočnim ravninama nasuprotnim vrhovima tih tetraedara, dobit ćemo iste ove kongruencije, što proizlazi iz poznatih sprijeda spomenutih osobina svakog Reyeovog tetraedralnog kompleksa.

(Primljeno 4. IV. 1958.)