Serija II. T. 11. Zagreb 1956. Broj 1 POSEBAN OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Vilko Niče, Zagreb

Die Brennachsenkongruenz der Zylinder eines Kreises

Kongruencija žarišnih osi valjaka jedne kružnice

Zagreb 1956

Štamparski savod „Ognjen Prica" - Zagreb, Savska cesta 31

GLASNIK MAT. - FIZ. I ASTR.
Tom 11. — No. 1 — 1956.

DIE BRENNACHSENKONGRUENZ DER ZYLINDER EINES KREISES

Vilko Niče, Zagreb

Jede Gerade des Mittelpunktes O eines Kreises c ist die Achse eines diesen Kreis enthaltenden Zylinders 2. Grades. Der Kreis c liegt also auf ∞^2 Zylinder 2. Grades, von denen nur einer ein auf die Kreisebene lotrechter Kreiszylinder ist. Die Achse dieses Kreiszylinders sei mit o bezeichnet. Die rotatorische Achsenkongruenz der hyperoskulatorischen Kreiszylinder des Kreises c wurde in der Arbeit[1] »*O hiperoskulacionim kružnim valjcima jedne kružnice*« (»*Über die hyperoskulatorischen Kreiszylinder eines Kreises*«) betrachtet, und der Achsenkomplex der oskulatorischen Kreiszylinder eines Kreises wird in einer anderen Arbeit behandelt werden. Jeder der Zylinder des Kreises c hat zwei reelle und zwei konjugiert imaginäre Brennachsen, die die Brennpunkte aller senkrechten Schnittellipsen dieses Zylinders enthalten. Die reellen Brennachsen aller dieser Zylinder des Kreises c bilden also eine Kongruenz, die den Gegenstand unserer Betrachtungen in dieser Arbeit bildet.

Wird ein Zylinder des Kreises c um die Achse o gedreht, so enthält der Zylinder in allen neuen Lagen den Kreis c. Es folgt also, dass auch die Brennachsen dieser Zylinder in allen neuen Lagen Strahlen unserer Brennachsenkongruenz sein werden. Die ganze Brennachsenkongruenz der Zylinder des Kreises c ist also bezüglich der Achse o rotatorisch. Diese Brennachsenkongruenz wird demnach durch die Erzeugenden von ∞^1 Rotationshyperboloiden H mit gemeinsamer Achse gebildet.

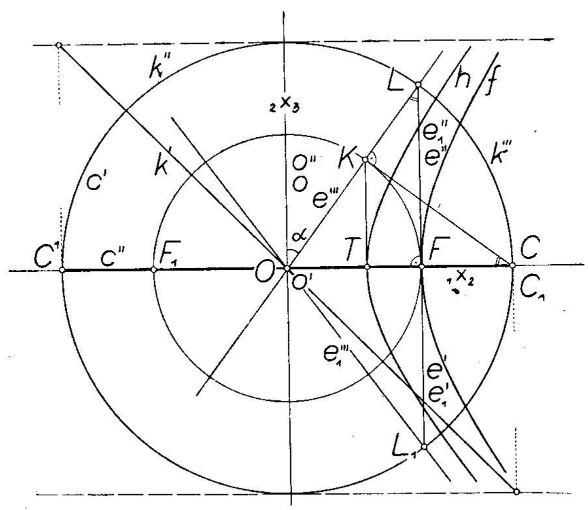
Die Strahlen der Kongruenz der hyperoskulatorischen Kreiszylinder des Kreises c, die die Achse o nicht schneiden, bilden auch ∞^1 einschalige Rotationshyperboloide R mit gemeinsamer Achse o, die sich längs ihrer kleinsten Kreisparallelen hyperoskulatorischen Kreisringflächen anschmiegen, deren gemeinsamer Achsenkreis der Kreis c ist. Alle vier Durchdringungskreise jedes dieser Rotationshyperboloide und seiner koaxialen hyperoskulatorischen Kreisringfläche fallen längs ihrer kleinsten Kreisparallelen zusammen. Alle Meridianschnitte dieser ∞^1 einschaligen Rotationshyperboloide R haben deswegen in ihren Scheiteln gemeinsame auf dem Kreis c liegende Krümmungsmittelpunkte. Es ist klar, dass unsere Brenn-

---

[1]) Glasnik mat.-fiz. i astr., **4** (1949), 1—9.

achsenkongruenz sowohl rotatorisch bezüglich der Achse o, als auch symmetrisch bezüglich der Ebene des Kreises c ist.

Wie bekannt, bilden alle Erzeugenden eines einschaligen Rotationshyperboloides mit seiner Achse gleiche Winkel. Es sei die Bildebene unserer Figur ein Meridianschnitt unserer Brennachsenkongruenz, der den Kreis c in Punkten C, C^1 schneidet. Man betrachte jetzt die den Kreis c enthaltenden Zylinder, die mit der Achse o den Winkel α bilden. Die Achsen der hyperoskulatorischen Kreiszylinder dieser Zylinder längs ihrer Scheitelerzeugenden, die die Achse o nicht schneiden, bilden die Erzeugenden eines einschaligen Rotationshyperboloides R_α. Die Meridianbildebene unserer Figur schneidet dieses Rotationshyperboloid in der Hyperbel h,



deren Asymptoten durch den Mittelpunkt O des Kreises c gehen und mit der Achse o den Winkel α bilden. Eine der Asymptoten der Hyperbel h schneide die im Punkt C auf sie errichtete Senkrechte im Punkt K. Das im Punkt K auf den Halbmesser OC gefällte Lot schneidet diesen Halbmesser OC im Punkt T.

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf jenen Zylinder des Kreises c, dessen auf den Halbmesser OC senkrechte Erzeugenden mit der Achse o den Winkel α bilden. Die auf diesen Zylinder senkrechte und den Halbmesser OC enthaltende Ebene schneide den Zylinder in der Ellipse e. Der Punkt C wird ein Scheitelpunkt auf der grossen Halbachse $OC = a$ dieser Ellipse. Da aber die Achse dieses Zylinders und die Asymptoten der Hyperbel h mit der Achse o denselben Winkel α bilden, wird die Strecke $CK = b$ gleich der kleinen Halbachse der Ellipse e sein. Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $\triangle KTC$ und $\triangle OKC$, wo $\sphericalangle TKC = \sphericalangle KOC$

und $\sphericalangle KTC = \sphericalangle CKO = 90^0$ ist, folgt $KC : CO = CT : KC$, oder $b : a = CT : b$. Weiter ergibt sich $CT = b^2/a$, also ist, wie bekannt, der Punkt T der Krümmungsmittelpunkt im Scheitelpunkt C der Ellipse e. Der Punkt T liegt also auf einer Erzeugenden des Hyperboloides R_α. Der diese Erzeugende enthaltenden und auf unsere Bildebene senkrechten Berührungsebene des Hyperboloides R_α gehört dieser Punkt T als Berührungspunkt an. Da der Punkt T sich in unserer Meridianbildebene befindet, muss er der Scheitelpunkt der Hyperbel h sein, was auch mit der oben ausgesprochenen und in der erwähnten Arbeit bewiesenen Behauptung übereinstimmt.

Die Schnittpunkte F, F_1 der Verbindungsgeraden OC mit dem Kreise mit dem Mittelpunkt O und dem Halbmesser OK müssen also, wie bekannt, die Brennpunkte der Hyperbel h sein. Da der Krümmungsmittelpunkt C und der Scheitelpunkt T als ein zugeordnetes Punktepaar der Brennpunktinvolution auf der reellen Achse der Hyperbel h mit reellen Doppelpunkten F, F_1 betrachtet werden können, so gilt $(F\,F_1\,T\,C) = -1$. Der Punkt C ist aber Scheitelpunkt der Ellipse e und der Punkt T deren Krümmungsmittelpunkt in diesem Scheitelpunkt. Wegen $(F\,F_1\,T\,C) = -1$ folgt also dass die Punkte F, F_1 auch Brennpunkte der Ellipse e sein müssen, da diese Punkte auch hier als Doppelpunkte der mittels der zugeordneten Punktepaare C, T und O, O_∞ (O_∞ ist der unendlich ferne Punkt der Verbindungsgeraden OC) bestimmten Brennpunktinvolution auf der grossen Achse der Ellipse e erscheinen. Die Punkte F, F_1 sind also die Scheitelpunkte der Meridianhyperbel f des von den Brennpunktachsen der Zylinder des Kreises c gebildeten einschaligen Rotationshyperboloides H_α, dessen Erzeugende mit der Achse o den Winkel α bilden.

Wird die Asymptote OK von der im Punkt F auf die Verbindungsgerade OC senkrecht stehenden Geraden im Punkt L geschnitten, so schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Halbmesser OL die Verbindungsgerade OC im Brennpunkte C_1 der Hyperbel f. Da aber $OK = OF$, $\sphericalangle KOC = \sphericalangle FOL$ und $\sphericalangle CKO = \sphericalangle LOF = 90^0$ ist, so wird auch $OL = OC_1 = OC$, beziehungsweise $C_1 = C$. Da bei unseren Betrachtungen die Grösse des Winkels α keine Rolle spielte, sind also unsere bisherigen Schlüsse für alle Zylinder des Kreises c, ohne Rücksicht auf die Grösse des Winkels α, giltig.

Es folgt also weiter, dass alle Meridianschnitte der zur rotatorischen Brennachsenkongruenz der Zylinder des Kreises c gehörenden Rotationshyperboloide H ein Büschel konfokaler Hyperbeln mit gemeinsamen reellen auf dem Kreis c sich befindenden Brennpunkten bilden. Hieraus erkennt man auch, dass die Strahlen der Brennachsenkongruenz der Zylinder des Kreises c ein Büschel koaxialer und symmetrisch liegender Rotationshyperboloide H bilden, von denen jeder längs zweier imaginären Kreise eine aus lauter isotropen Erzeugenden bestehende Regelfläche 6. Grades berühren, die durch die Leitlinien c, o und den absoluten Kegelschnitt bestimmt ist. In unserem Falle zerfällt diese Regelfläche in zwei den Kreis c enthaltende isotrope Kegel, mit auf der Achse o sich befindenden konjugiert imaginären Spitzen, und ein Paar isotroper Ebenen mit der Achse o. Die zwei konjugiert imaginären Spitzen auf der Achse o sind gemeinsame konjugiert imaginäre Brennpunkte aller Meridianschnitte der Rotationshyperboloide H unserer Brennachsenkongruenz der Zylinder des Kreises c, und können als konjugiert imaginäre Doppelpunkte jener elliptischen Involution auf der Achse o betrachtet werden, die jeden Punkt des Kreises c als Laguerreschen Punkt haben kann.

Die konjugiert imaginären Berührungspunkte der isotropen aus einem Brennpunkt einer Kurve 2. Grades auf diese gelegten imaginären Berührungsgeraden, befinden sich auf der diesem Brennpunkte bezüglich dieser Kurve zugeordneten Polare. Da dies auch für jeden Meridianschnitt des Hyperboloides H gilt, folgt, dass die imaginären Kreise, längs deren das Hyperboloid H die isotropen Kegel des reellen Kreises c berührt, sich in konjugierten Paaren auf einem reellen Zylinder befinden, also konjugiert imaginäre Kreise mit Durchmessern gleicher reeller Länge sind.

Jeder Punkt des Raumes liegt in einer Meridianebene unserer rotatorischen Brennachsenkongruenz, und diese Ebene schneidet die Rotationshyperboloide H unserer Kongruenz in einem Büschel konfokaler Hyperbeln. Nur eine dieser Hyperbeln enthält den Punkt, es muss also auch nur ein Rotationshyperboloid H unserer Kongruenz diesen Punkt enthalten. Da durch jeden Punkt eines einschaligen Hyperboloides zwei seiner Erzeugenden gehen, folgt weiter, dass durch jeden Punkt im Raume nur zwei Strahlen unserer rotatorischen Brennachsenkongruenz der Zylinder des Kreises c gehen, also diese 2. Ordnung sein muss.

Jede in einer Meridianebene unserer rotatorischen Brennachsenkongruenz sich befindende Gerade, die die gemeinsame reelle Achse der in ihr liegenden konfokalen Hyperbeln innerhalb der gemeinsamen Brennpunkte schneidet, wird von einer dieser Hyperbeln berührt. Es folgt dies aus der Tatsache, dass jede Kurve 2. Grades durch fünf Berührungsgeraden, unter denen sich auch zwei isotrope Geradenpaare befinden können, bestimmt ist. Ist der Schnittpunkt ausserhalb der Brennpunkte, so wird dadurch eine Ellipse bestimmt. Wird eine Rotationsfläche von einer Ebene berührt, so befindet sich der Berührungspunkt in der auf diese Berührungsebene senkrechten Meridianebene. Wählt man also eine den Kreis c in zwei reellen Punkten schneidende Ebene φ, so kann dieser nur von einem der Rotationshyperboloide H unserer rotatorischen Brennachsenkongruenz berührt werden, und man erhält den Berührungspunkt auf folgende Weise: Die auf die Ebene φ senkrechte Meridianebene unserer rotatorischen Brennachsenkongruenz schneide den Kreis c in den Punkten F, F_1 und die Ebene φ in der Geraden t. Die Punkte F, F_1 sind, wie bekannt, die gemeinsamen Brennpunkte der konfokalen Hyperbeln, in denen diese Meridianebene alle Rotationshyperboloide H unserer Brennachsenkongruenz schneidet. Da die Gerade t die Verbindungsgerade FF_1 innerhalb der Punkte F, F_1 schneidet, wird mittels dieser Geraden und der Brennpunkte F, F_1 eine Hyperbel h dieses konfokalen Hyperbelbüschels bestimmt, die zu einem unserer Rotationshyperboloide H der Brennachsenkongruenz als Meridianschnitt gehört. Der Berührungspunkt der Geraden t und der Hyperbel h wird also der Berührungspunkt der Ebene φ und des zur Meridianhyperbel h gehörenden Rotationshyperboloides H.

Man sieht, dass jede den Kreis c reell schneidende Ebene nur einen der Rotationshyperboloide unserer rotatorischen Brennachsenkongruenz berührt, also in jeder solchen Ebene sich nur zwei Strahlen dieser Kongruenz befinden. Es folgt endlich, dass die rotatorische und bezüglich der Ebene des Kreises c symmetrische Brennachsenkongruenz der Zylinder des Kreises c 2. Ordnung und 2. Klasse, also 2. Grades ist.

Unseren Ausführungen nach ist es offensichtlich, dass es sich bei unserer Brennachsenkongruenz nur um reelle Strahlen dieser Kongruenz handelt. Die ∞^2 konjugiert imaginären Strahlenpaare dieser Kongruenz, die alle die Achse o schneiden, wurden hier nicht betrachtet.

Alle den Durchmesser $C^1 C$ des Kreises c schneidenden und auf ihn lotrechten Strahlen unserer Brennachsenkongruenz sind Erzeugende einer die Gerade $C^1 C$ als Doppelgerade enthaltenden Regelfläche, deren Erzeugende mit der auf die Doppelgerade $C_1 C$ lotrechten Richtebene parallel sind, also ein Konoid bilden.

In unserer Figur nehme man an, dass der Kreis c in der Grundrissebene liegt, während die Aufrissebene den Durchmesser $C^1 C$ enthält und die Achse o in der Seitenrissebene sich befindet. Man nehme weiters den Durchmesser $C^1 C$ als Achse jenes Kreiszylinders an, dessen Durchmesser dem Durchmesser des Kreises c gleich ist. Schneidet man diesen Zylinder mit jener die Achse o enthaltenden Ebene, die mit der Aufrissebene und mit der Seitenrissebene den gleichen Winkel (45^0) bildet, so wird der Aufriss k'' und der Seitenriss k''' der Schnittellipse k mit dem Grundriss c' des Kreises c zusammenfallen. Man wähle auf dem Durchmesser $C^1 C$ einen Punkt F. Unseren vorher durchgeführten Schlüssen nach bilden die in diesem Punkt F den Durchmesser $C^1 C$ schneidenden Strahlen unserer Brennachsenkongruenz mit der Ebene des Kreises c den Winkel $LOF = L_1OF$, wo die auf die Gerade $C^1 C$ lotrechte Gerade LL_1 als Grundriss e', e_1' und Aufriss e'', e_1'', und die Verbindungsgeraden OL, OL_1 als Seitenrisse e''', e_1''' dieser Kongruenzstrahlen angenommen werden können. Da diese Strahlen dieselben Geraden sind, die die Doppelgerade $C^1 C$ (senkrecht) und auch die Ellipse k schneiden, so können diese Strahlen e, e_1 als Erzeugenden desjenigen Konoides angenommen werden, der durch die Normalen des besprochenen Kreiszylinders mit der Achse $C^1 C$ längs der Schnittellipse k gebildet wird. Die Punkte C, C^1 sind die Kuspidalpunkte, die Berührungsgeraden des Kreises c in diesen Punkten sind die Torsalgeraden und die Achse o ist Doppelerzeugende dieses bekannten Konoides 4. Grades.

Der unendlichferne Punkt der Doppelgeraden $C^1 C$ ist ein isolierter Kreispunkt, in dem sich ein unendlich fernes isotropes Erzeugendenpaar dieses Konoides schneidet. Die in der Richtung der Doppelgeraden auf eine Richtebene gefällten Projektionen aller Kegelschnitte solcher Konoide 4. Grades sind konzentrische Kreise, mit in dem Schnittpunkte der Doppelgeraden mit dieser Richtebene sich befindendem gemeinsamen Mittelpunkt.

Zu jedem Durchmesser des Kreises c gehört ein solches Konoid. Dreht man also das Konoid des Durchmessers $C^1 C$ um die ihm als Doppelerzeugende angehörige Achse o unserer Brennachsenkongruenz, so können die Erzeugenden dieses Konoides in allen ihren Lagen als Strahlen dieser Brennachsenkongruenz betrachtet werden. Jedes durch die Normalen eines Kreiszylinders längs eines seiner Ebenenschnitte gebildetes Konoid, wird von derjenigen Ebene seiner Doppelerzeugenden, die mit der Doppelgeraden den Winkel von 45^0 bildet, in einer Ellipse geschnitten, die aus dem unendlich fernen Kreispunkte auf eine seiner Richtebenen in einen Kreis projiziert wird, dessen Durchmesser der Länge der von den Kuspidalpunkten begrenzten Strecke gleich ist.

Man sieht also, dass auf Grund aller unserer Betrachtungen und Schlüsse auch folgendes gilt: Wird ein Konoid 4. Grades, das durch die Normalen eines Kreiszylinders längs eines seiner Ebenenschnitte gebildet wird, um seine Doppelerzeugende gedreht, so sind seine Erzeugenden in allen ihren Lagen die Strahlen der Kongruenz der Brennachsen aller Zylinder des Kreises, der von den Kuspidalpunkten dieses Konoides bei dieser Drehung beschrieben wird.

KONGRUENCIJA ŽARIŠNIH OSI VALJAKA JEDNE KRUŽNICE

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Jednom kružnicom c možemo postaviti ∞^2 valjaka, od kojih su svi osim jednoga kosi kružni. Žarišta okomitih presjeka valjaka 2. stupnja leže na pravcima, koji su usporedni s njihovim osima, a zovu se žarišne osi tih valjaka. Dvije su takve osi realne, a dvije konjugirano imaginarne. Realne žarišne osi svih valjaka neke kružnice čine dakle neku kongruenciju.

Zarotiramo li jedan valjak kružnice c i njegove žarišne osi oko osi o uspravnog kružnog valjka te kružnice, opisat će ove osi svaka po jedan sistem izvodnica jednoplošnog rotacionog hiperboloida, kojemu će ravnina kružnice c biti ravnina grlene kružnice. Sve izvodnice tog i takvih hiperboloida bit će zrake spomenute kongruencije, budući da rotirani valjak u svim svojim položajima prolazi tom kružnicom. Kongruencija žarišnih osi valjaka kružnice c bit će dakle rotaciona i simetrična s obzirom na ravninu te kružnice, a sastojat će se iz ∞^1 koncentričnih i koaksijalnih jednoplošnih hiperboloida.

U mojoj radnji »*O hiperoskulacionim kružnim valjcima jedne kružnice*«[1] pokazano je, da osi hiperoskulacionih kružnih valjaka svih valjaka kružnice c, dakle i same te kružnice, koje ne sijeku os o, čine pramen koncentričnih i koaksijalnih jednoplošnih rotacionih hiperboloida, kojima hiperoskulacioni torusi duž grlenih kružnica imaju zajedničku osnu kružnicu c. Na temelju ovoga i činjenice, da se kružnica žarišta meridijanskih presjeka svakog rotacionog jednoplošnog hiperboloida, sastavljenog iz osi hiperoskulacionih kružnih valjaka kružnice c, koji su prema njenoj ravnini jednako nagnuti, podudara sa grlenom kružnicom jednoplošnog rotacionog hiperboloida, sastavljenog iz žarišnih osi tih istih valjaka kružnice c, dade se vrlo jednostavno zaključiti, da je kružnica c geometrijsko mjesto žarišta meridijanskih presjeka svih rotacionih jednoplošnih hiperboloida unutar naše kongruencije, sastavljenih iz žarišnih osi valjaka kružnice c jednako nagnutih prema njenoj ravnini. Dirališta izotropnih tangenata na presječne hiperbole u tim meridijanskim ravninama leže na ravnalicama tih hiperbola (polare žarišta), koje za svaki spomenuti hiperboloid čine uspravan kružni valjak.

Vidimo dakle, da svi rotacioni jednoplošni hiperboloidi kongruencije žarišnih osi valjaka kružnice c diraju dva izotropna stošca duž para konjugirano imaginarnih kružnica, kojima su duljine polumjera realne. Ova se dva izotropna stošca prodiru u kružnici c, a konjugirano imaginarni vrhovi tih stožaca na osi o određeni su kao dvostruke točke eliptičkog involutornog niza, kojemu svaka točka kružnice c može biti Laguerreova točka.

Budući da je svakom točkom u prostoru i svakom ravninom u prostoru, koja realno siječe kružnicu c, određen samo jedan rotacioni jednoplošni hiperboloid u opisanom pramenu hiperboloida naše kongruencije, dakle svakom točkom prolaze samo dvije i u svakoj ravnini se nalaze samo dvije zrake naše kongruencije kao izvodnice tih hiperboloida, to će naša kongruencija žarišnih osi valjaka kružnice c biti 2. reda i 2. razreda, t. j. ona je 2. stupnja.

Sve zrake ove kongruencije, koje sijeku jedan promjer CC^1 kružnice c, čine neki konoid, kojemu je taj promjer dvostruki pravac, a os o dvostruka izvodnica. Lako se može dokazati, da je ovaj konoid geometrijsko mjesto normala uspravnog kružnog valjka, kojemu je promjer CC^1 os, a polumjer jednak polumjeru kružnice c, i to duž onog njegovog ravninskog presjeka, koji sadrži os o i nagnut je prema osi valjka pod 45^0. Krajnje točke C, C^1 promjera su kuspidalne točke, a tangente kružnice c u tim točkama su torzalni pravci tog konoida. Neizmjerno daleka točka dvostrukog pravca tog konoida je izolirana kružna točka, u kojoj se siječe par neizmjerno dalekih izotropnih izvodnica tog konoida. Ovakav konoid je 4. stupnja.

Budući da svaki konoid, sastavljen od normala nekog uspravnog kružnog valjka duž bilo kojeg njegovog ravninskog presjeka, možemo smatrati i konoidom normala koaksijalnog uspravnog kružnog valjka, kojemu je promjer jednak razmaku kuspidalnih točaka tog konoida, i to duž presjeka, kojeg ravnina čini s osi tog valjka kut od 45^0, to iz naših razmatranja proizlazi još i ovo:

Zavrtimo li konoid 4. stupnja, sastavljen od normala uspravnog kružnog valjka duž jednog njegovog ravninskog presjeka, oko njegove dvostruke izvodnice, bit će izvodnice tog konoida u svim njegovim zarotiranim položajima zrake kongruencije žarišnih osi svih valjaka kružnice, koju kod te rotacije opišu kuspidalne točke tog konoida.

(Primljeno 5. I. 1956.)