VILIM NIČE

KOMPLEKS OSI OSKULACIONIH KRUŽNIH VALJAKA JEDNE KRUŽNICE I NEKE NJEGOVE PLOHE I KONGRUENCIJE

DER ACHSENKOMPLEX DER OSKULATORISCHEN KREISZYLINDER EINES KREISES UND EINIGE SEINER FLÄCHEN UND KONGRUENZEN

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
ZAGREB 1957

VILIM NIČE

KOMPLEKS OSI OSKULACIONIH KRUŽNIH VALJAKA JEDNE KRUŽNICE I NEKE NJEGOVE PLOHE I KONGRUENCIJE

Uvod. Svakom kružnicom u prostoru možemo postaviti ∞^2 valjaka 2. stupnja, od kojih su svi kosi kružni osim jednoga, koji je uspravan kružni. U radnji »O hiperoskulacionim kružnim valjcima jedne kružnice« [1] istraženo je geometrijsko mjesto osi svih opisanih i upisanih hiperoskulacionih kružnih valjaka svim valjcima jedne kružnice. U ovoj radnji razmatrat ćemo geometrijsko mjesto osi oskulacionih kružnih valjaka svih valjaka neke kružnice c, t. j. onih, koji njome prolaze, a prema tome oskuliraju i tu kružnicu. Za svaku izvodnicu nekog valjka 2. stupnja postoji uspravni kružni valjak, koji dani valjak drugog stupnja oskulira duž te izvodnice. Budući da svaka kružnica leži na ∞^2 valjaka 2. stupnja, od kojih svaki ima ∞^1 izvodnica, to će uspravnih kružnih valjaka, koji sve te valjke, a prema tome i tu kružnicu oskuliraju, biti ∞^3. Osi tih oskulacionih kružnih valjaka jedne kružnice čine prema tome neki pravčasti kompleks. Malo prije spomenute osi hiperoskulacionih kružnih valjaka svih valjaka kružnice c čine jednu istaknutu kongruenciju unutar ovog našeg kompleksa, koja je istražena u spomenutoj radnji.

1. Odaberimo po volji neku kružnicu c i povucimo jedan njen promjer m. Postavimo li tim promjerom neku ravninu ϱ_1 i na nju okomito projiciramo kružnicu c u elipsu c_1, tada tu elipsu možemo smatrati osnovkom uspravnog eliptičkog valjka, koji prolazi kružnicom c. U točkama evolute elipse c_1 postavljene okomice na ravninu ϱ_1 bit će osi oskulacionih kružnih valjaka tog eliptičkog valjka duž njegovih izvodnica, t. j. te su osi zrake našeg kompleksa, koji želimo istražiti. Na ravninu kružnice c postavljenu okomicu u njenu središtu O označimo sa s. Zavrtimo li oko osi s ravninu ϱ_1 i njen trag m, zajedno s opisanim eliptičkim valjkom, tad će os svakog oskulacionog kružnog valjka tog eliptičkog valjka kružnice c opisati jedan sistem izvodnica jednog rotacionog hiperboloida, koje će također biti zrake našeg kompleksa. Što naime vrijedi za promjer m, vrijedi i za sve druge promjere kružnice c, a kru-

žnica c rotira oko osi s sama u sebi. Drugi sistem izvodnica tog hiperboloida daje također zrake našeg kompleksa, budući da on nastaje rotacijom oko iste osi onog oskulacionog kružnog valjka kružnice c, koji je s prvim simetrično postavljen s obzirom na ravninu kružnice c. Zarotiramo li oko pravca s osi svih oskulacionih kružnih valjaka eliptičkog valjka osnovke c_1, dobit ćemo ∞^1 rotacionih hiperboloida, kojih izvodnice čine neku rotacionu i centrički simetričnu kongruenciju, kojoj je središte točka O, a os pravac s.

Zavrtimo sada ravninu ϱ_1 oko pravca, na kojemu leži promjer m, a koji također označimo sa m. U svakoj novoj ravnini ϱ_n pravca m nalazi se nova okomita projekcija c_n kružnice c, koja će biti osnovka jednog novog uspravnog eliptičkog valjka. Svaki taj valjak imat će opet ∞^1 osi svojih oskulacionih kružnih valjaka, koje čine za svaki od njih jedan novi valjak 6. reda, budući da je tog reda evoluta elipse. Svakoj ravnini ϱ_n pravca m pripada po jedan takav valjak 6. reda, a izvodnice svih tih valjaka čine neku konoidalnu kongruenciju, budući da su sve zrake te kongruencije okomite na pravcu m, dakle usporedne s jednom ravninom, t. j. sijeku njen neizmjerno daleki pravac. Istaknuti položaj unutar te konoidalne kongruencije imaju oba Plückerova konoida, kojih izvodnice su dvostruke grebenske izvodnice svih spomenutih valjaka 6. reda u toj konoidalnoj kongruenciji. Izvodnice tih Plückerovih konoida su osi upisanih hiperoskulacionih kružnih valjaka svih spomenutih valjaka kružnice c, koji su okomiti na pravcu m [2].

Svakoj točki kružnice c pridružen je jedan konoid unutar ove konoidalne kongruencije, budući da se ta točka okomito projicira u jednu točku P_1^n elipse c_n svake ravnine ϱ_n, a svaka ta točka ima svoje središte zakrivljenosti, dakle i jednu zraku našeg kompleksa. Svi takvi konoidi unutar naše konoidalne kongruencije, pridružene promjeru m, bit će simetrični s obzirom na ravninu kružnice c, budući da svaka ravnina ϱ_n ima jednu simetrično postavljenu s obzirom na tu ravninu. Os s i njom postavljena ravnina okomito na promjer m jesu zajednička torzalna ravnina i zajednički torzalni pravac svih konoida opisane konoidalne kongruencije. Drugi zajednički torzalan pravac ovih konoida je neizmjerno daleki okomiti pravac na promjeru m.

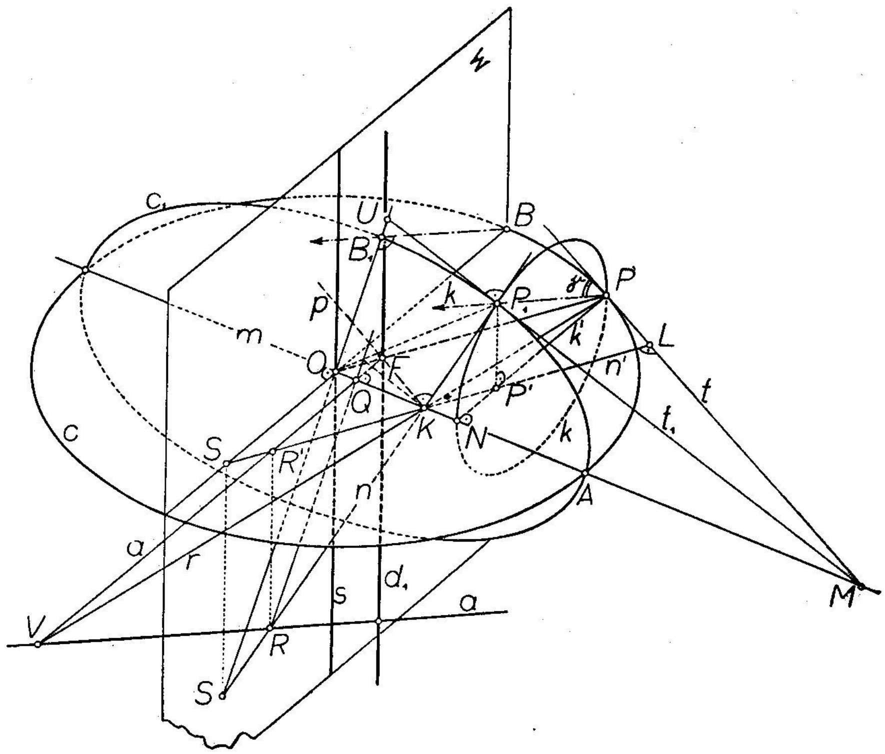
Što vrijedi za promjer m, vrijedi i za sve druge promjere kružnice c. Ako prema tome našu konoidalnu kongruenciju zarotiramo oko osi s, tad će svaka njena zraka i njoj simetrična zraka na ravninu kružnice c opisati jedan rotacioni hiperboloid. Izvodnice svih ∞^2 ovako nastalih rotacionih hiperboloida bit će zrake našeg pravčastog kompleksa. Iz dosadašnjih razmatranja se vidi, da je taj kompleks ne samo rotacioni s pravcem s kao osi, nego je on i centrički simetričan s obzirom na središte O kružnice c. Jer je on prema tome simetričan i s obzirom na ravninu kružnice c, možemo tu ravninu nazvati ekvatorijalnom ravninom tog kompleksa, a ravnine postavljene njegovom osi s zvat ćemo njegovim meridijanskim ravninama.

Osim spomenutih dosada kongruencija i ploha unutar našeg kompleksa mogli bismo razmatrati i čitav niz drugih, ali to bi nas u ovoj radnji odvelo predaleko. U nastavku ove radnje ograničit ćemo se samo na jednu osobitu kongruenciju ovakva kompleksa, jer se unutar nje nalaze zanimljive pravčaste plohe, kojima ćemo se pobliže zabaviti.

2. Kao što svaka algebarska pravčasta ploha ima svoj red i razred, odnosno stepen, jer su joj red i razred isti, tako i svaka pravčasta algebarska kongruencija ima svoj red i razred, a pravčasti algebarski kompleks ima samo svoj stepen, budući da su mu uvijek red i razred isti. Pod redom nekog kompleksa razumijevamo red stošca svih zraka tog kompleksa, koje prolaze jednom točkom u prostoru, a taj je red uvijek jednak razredu krivulje, koju omataju sve zrake tog kompleksa u jednoj ravnini. Istražit ćemo sada stepen našeg opisanog pravčastog kompleksa.

Iz dosadašnjih razmatranja u toč. 1. vidi se, da je svaka točka neizmjerno daleke ravnine vrh nekog stošca, odnosno valjka 6. reda unutar našeg kompleksa. Pogledajmo, kako to izgleda u konačnim točkama. Odaberimo bilo gdje u prostoru točku T, pa je rotirajmo oko osi s. Kružnicu, po kojoj ona putuje, označimo s v. Sjetimo se sada onog uspravnog valjka 6. reda unutar našeg kompleksa, kojemu je osnovka evoluta elipse c_1 u ravnini ϱ_1. Kružnica v točke T probija ovaj valjak 6. reda u 12 točaka. Dakle svakim tim probodištem, koja mogu u parovima biti i konjugirano imaginarna, prolazi po jedna izvodnica tog valjka. Rotacijom ovog valjka 6. reda oko osi s za 360^0 dobivamo već sprijeda spomenutu rotacionu kongruenciju unutar našeg kompleksa. Svako od onih dvanaest probodišta kružnice v s tim valjkom doći će kod te rotacije jedamput u točku T, dakle će njome prolaziti dvanaest zraka te rotacione kongruencije. Sve zrake ove rotacione kongruencije jednako su priklonjene prema ravnini kružnice c. Postavimo li točkom T kao vrhom uspravan kružni stožac tako, da mu izvodnice s ravninom kružnice c zatvaraju kutove jednake kutu, što ga zrake spomenute rotacione kongruencije zatvaraju s tom ravninom, tad ovaj stožac ima s našom rotacionom kongruencijom spomenutih dvanaest zraka zajedničkih. Jasno je, da neki parovi tih zraka mogu biti i bit će konjugirano imaginarni. Svakoj ravnini ϱ_n promjera m pridružen je na taj način jedan takav valjak 6. reda, dakle i jedna takva rotaciona kongruencija unutar našeg kompleksa, kojoj točkom T prolazi 12 njenih zraka. Točkom T prolazi dakle po dvanaest zraka svake ovakve rotacione kongruencije, a sve ove zrake zajedno čine neki stožac, dok sve ove rotacione kongruencije zajedno čine naš kompleks. Vidimo prema tome, da svaki uspravan kružni stožac vrha T, kojeg os je usporedna s osi s kompleksa, siječe stožac zraka našeg kompleksa, koje prolaze točkom T, u dvanaest izvodnica. Ovakav stožac zraka našeg kompleksa svake točke prostora jest prema tome 6. reda, dakle je naš kompleks 6. stepena.

Budući da se u opisanoj rotacionoj kongruenciji, koja je pridružena jednoj ravnini ϱ_n, nalazi ne samo uspravan valjak 6. reda, kojemu je osnovka evoluta elipse c_1, nego i njemu simetrično postavljen s obzirom na ravninu kružnice c, to će stošci zraka našeg kompleksa, bilo koje točke u prostoru, biti simetrični s obzirom na meridijansku ravninu tog kompleksa, koja prolazi tom točkom. Osobit položaj u svakom ovakvu stošcu imat će one njegove izvodnice, koje su osi opisanih i upisanih hiperoskulacionih kružnih valjaka kružnice c. Prvih ima četiri, od kojih dvije mogu pasti skupa ili mogu biti konjugirano imaginarne, a sve četiri leže u simetralnoj ravnini. Drugih ima dvije, a one će biti dvostruke izvodnice svakog takva stošca.



Sl. 1 – Abb. 1

3. Na kružnici c odaberimo po volji točku P, a njenim središtem O postavimo ravninu ϱ_1, koja ravninu te kružnice siječe u pravcu m. Okomita projekcija P_1 točke P na ravninu ϱ_1 past će u jednu točku elipse c_1, koja je okomita projekcija kružnice c na tu ravninu. (Sl. 1.) Tangenta t kružnice c u točki P neka siječe pravac m (trag ravnine ϱ_1) u točki M. Radi afinog odnosa kružnice c i elipse c_1, bit će spojnica točaka $P_1M = t_1$ tangenta elipse c_1 u točki P_1. Okomita projekcija P_1' točke P_1 na ravninu kružnice c ležat će na okomici PN spuštenoj iz točke P na promjer u pravcu m, budući da je ortogonalna projekcija normale neke ravnine uvijek okomita na trag te ravnine u ravnini projekcije. Točka N je

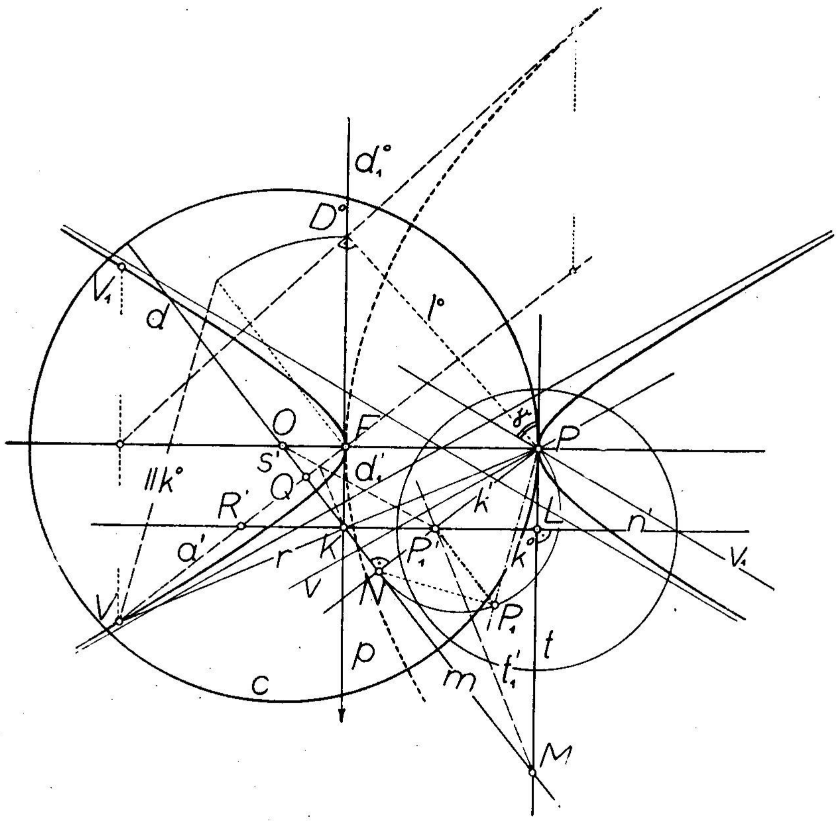
nožište te okomice na promjeru pravca m. Okomita projekcija na ravninu kružnice c normale $P_1 S = n$ elipse c_1 u točki P_1 poklapa se s okomicom $P_1' L = n'$, povučenom iz točke P_1' na tangentu t, gdje je točka L njeno nožište. Ovo izlazi iz činjenice, da je okomica n okomita na ravninu pravaca t, t_1. Okomicom s postavimo ravninu $\Sigma \perp m$. Normala n probada tu ravninu u točki S, a promjer m siječe u točki K. Tangenta t_1 elipse c_1 neka siječe ravninu Σ u točki U. Poznato je, da će na spojnici KS ona točka R biti središte zakrivljenosti elipse c_1 u točki P_1, za koju će vrijediti razmjer $MP_1 : P_1 U = KR : RS$, pa se pomoću tog razmjera točka R dade i odrediti. Osim toga poznat je i ovaj razmjer: $P_1 R : RS = MK : KO$. Točka S nalazi se na produženoj maloj osi $B_1 O$ elipse c_1 u ravnini Σ. U točki R postavljena okomica $a \parallel PP_1$ na ravninu ϱ_1 elipse c_1 je zraka našeg kompleksa. Okomito projicirane točke R, S na ravninu kružnice c označimo s R', S', a usporednica sa spojnicom SO povučena točkom R sjeći će promjer m u točki Q. Budući da su ravnine $(RR'Q)$, (PP_1P_1') usporedne s ravninom Σ, to iz našeg posljednjeg razmjera izlazi i ovaj: $MK : KO = NQ : QO$, budući da je točka N sjecište promjera na pravcu m s ravninom (PP_1P_1'). Produžimo li spojnicu $R'Q$ do polumjera OP, dobit ćemo na njemu točku F, za koju nam radi $R'Q \parallel PN$ vrijedi razmjer $PF : FO = NQ : QO$. Jer su, međutim, spojnice OP i KL okomite na tangenti t, dakle $OP \parallel KL$, to izlazi, da je $MK : KO = ML : LP$, odnosno $ML : LP = NQ : QO = PF : FO$.

Zamislimo sada točku P kao vrh uspravnog kružnog stošca Ψ, kojemu je tangenta t os, a zraka projiciranja PP_1 na ravninu ϱ_1 jedna izvodnica. Ravnina kružnice c siječe ovaj stožac u izvodnicama v, v_1, koje s tangentom t zatvaraju isti kut γ kao i izvodnica PP_1. (Sl. 2.) Normala n elipse c_1 u točki P_1 okomita je na ravninu $(P_1 t)$, dakle se nalazi u dirnoj ravnini stošca Ψ duž njegove izvodnice PP_1. Trag $r = PK$ ove dirne ravnine u ravnini kružnice c dobivamo pomoću harmonijske četvorke zraka $(v\, v_1\, k'\, r) = -1$, gdje je $k' \equiv PP_1'$, budući da je taj pravac r polarna zraka ravnine (PP_1P_1') s obzirom na stožac Ψ. Točka V, u kojoj nam taj trag r siječe produženu spojnicu $R'Q \equiv a'$, jest probodište poznate zrake a našeg kompleksa s ravninom kružnice c. Vidi sl. 1 i 2. Odaberemo li sada jednu novu izvodnicu PP_i stošca Ψ, bit će njoj na opisani način pridružena nova ravnina ϱ_i okomita na nju, kojoj će trag m_i biti okomit na projekciji te izvodnice $k_i' = PP_i'$. Normala novonastale elipse c_1^i u točki P_i nalazit će se opet u dirnoj ravnini stošca Ψ duž izvodnice PP_i, kojoj će trag r^i, dobiven pomoću harmonijske četvorke $(v\, v_1\, k_i'\, r^i) = -1$, sjeći trag m_i ravnine ϱ_i u točki N_i. Tangentu t sjeći će trag m_i u točki M_i. Označimo li i ovdje, analogno kao malo prije, sjecište pravaca k_i', t sa L_i, tada naravno i u ovom slučaju postoji na polumjeru OP neka točka F_i, za koju će vrijediti razmjer $M_i L_i : L_i P = P F_i : F_i O$. Vidjeli smo, da su parovi zraka r^i, k_i' parovi pridruženih zraka hiperboličkog involutornog pramena pravaca vrha P s realnim dvostrukim zrakama v, v_1. Pramen zraka m_i vrha O projektivan je s pramenom zraka k_i' vrha P, jer su pridružene zrake međusobno okomite. Odavle izlazi, da su i pramenovi zraka $O(m_i)$, $P(r^i)$ projektivno pridruženi. Jer je, međutim, zraci OP u pramenu $O(m_i)$ pridružena u pramenu $P(r^i)$ zraka PO, to izlazi, da su pramenovi zraka $O(m_i)$, $P(r^i)$ perspektivno pridruženi. Uzmemo li sada u pramenu $O(m_i)$ zraku okomitu na promjer OP, bit će toj zraci u pramenu $P(r^i)$ pridružena zraka s njom usporedna, koja se poklapa s tangentom t. Izlazi dakle, da je proizvod perspektivnih pramenova $O(m_i)$, $P(r^i)$ niz točaka K_i na nekom pravcu p, koji je okomit na polumjeru OP kružnice c. Dakle $p \parallel t$. Ova nam činjenica dalje direktno kaže, da su radi $M_i K_i : K_i O = M_i L_i : L_i O$ svi omjeri $M_i L_i : L_i P$ jednaki, dakle i svi omjeri $PF_i : F_i O$ imaju konstantnu vrijednost. Jer su točke O, P stalne, izlazi, da čitav stožac Ψ, odnosno smjerovi svih njegovih izvodnica i njima pridružene ravnine ϱ_i, imaju jednu zajedničku točku F na polumjeru OP. Odaberemo li onu izvodnicu stošca Ψ, kojoj se projekcija k' podudara s tangentom t kružnice c, tada njoj pridružena ravnina ϱ_i ima svoj trag m_i u produženom polumjeru OP. U toj ravnini nastala elipsa $c_1{}^i$ imat će u točki P tjeme, a točka F bit će joj središte zakrivljenosti u tom tjemenu. Označimo li polumjer kružnice c sa d, a malu os one elipse $c_1{}^i$, kojoj je točka P tjeme, označimo sa b, onda je $b = d \sin \gamma$, gdje je γ poznati kut izvodnica stošca Ψ s njegovom osi. Budući da polumjer zakrivljenosti e elipse c_1 u tjemenu P iznosi $e = b^2/d = (d \sin \gamma)^2/d = d \sin^2 \gamma$, to smo time uspostavili vezu između dužine $FP = e$ i kuta γ.

Točki P_1 elipse c_1, u ravnini ϱ_1 pridružena zraka a našeg kompleksa probada, kao što je poznato, ravninu kružnice c u točki V. Ova je točka i na tragu r, budući da je zraka a u ravnini $(P_1 r)$, dakle je ona sjecište pravaca r i a' $(R'O)$ u ravnini kružnice c. U pravac k' na ravnini kružnice c projicira se osim izvodnice PP_1 stošca Ψ i njoj simetrično postavljena izvodnica tog stošca ispod ravnine kružnice c. Dirna ravnina stošca Ψ duž te nove izvodnice imat će isti trag r u ravnini kružnice c, a s njom povezana zraka našeg kompleksa bit će simetrično postavljena iznad ravnine kružnice c zraci a. Te dvije zrake sjeći će se prema tome u točki V ravnine kružnice c. Uzmemo li sada redom sve izvodnice stošca Ψ, tad svakoj toj izvodnici i njoj simetrično postavljenoj na ravnini kružnice c pripada u toj ravnini jedna točka V_i. Ovim izvodnicama pridružene zrake a_i našeg kompleksa projicirat će se na ravninu kružnice c u pramen zraka $F(a_i')$, koji je perspektivan s pramenom $P(k_i')$, jer su pridružene zrake a, k usporedne u prostoru, a prema tome i njihove projekcije na ravnini kružnice c. Saznali smo malo prije, da je $P(k_i') \overline{\wedge} P(r^i)$. Jer je međutim $P(k_i') \overline{\overline{\wedge}} F(a_i')$, to je i $P(r^i) \overline{\wedge} F(a_i')$. Točke V_i su prema tome proizvod dvaju projektivnih pramenova pravaca, t. j. geometrijsko mjesto tih točaka je krivulja 2. stupnja. Budući da su zrake v, v_1 dvostruke zrake projektivnih hiperbolički involutornih pramenova $P(r^i)$, $P(k_i')$, to u projektivnim pramenovima zraka $F(a_i')$, $P(r^i)$ postoje dva para pridruženih usporednih zraka, dakle će geometrijsko mjesto točaka V_i biti neka hiperbola d u ravnini kružnice c, koja prolazi točkama F, P.

Iz činjenice, da je ravnina vrha P i osi s simetralna ravnina stošca Ψ, izlazi, da je spojnica PF os te hiperbole, a točke P, F njena tjemena.

Na onom dijelu ravnine kružnice c unutar pravaca v, v_1, gdje se nalazi tangenta t, nalaze se projekcije k_i' realnih parova izvodnica stošca Ψ, koje su simetrično postavljene na ravninu kružnice c. Izvan pravaca v, v_1 nalaze se projekcije k_i' konjugirano imaginarnih, na ravninu kružnice c simetrično postavljenih, parova izvodnica stošca Ψ. Odavle izlazi,



Sl. 2 – Abb. 2

da će se u točkama V_i onog dijela hiperbole d, na kojemu leži točka P, sjeći parovi konjugirano imaginarnih zraka našeg kompleksa.

Uzmemo li na stošcu Ψ neku izvodnicu k i njoj simetrično postavljenu k_1 ispod ravnine kružnice c, pa na tom stošcu odaberemo tim dvjema izvodnicama aksijalno simetrične izvodnice k^0, k_1^0, tad će se ovom novom paru izvodnica k^0, k_1^0 stošca Ψ pridružene zrake našeg kompleksa sjeći u onoj točki V_1 na hiperboli d, koja je simetrično postavljena s primarnom točkom V s obzirom na realnu os FP te hiperbole. Budući da izvodnice k, k^0 i k_1, k_1^0 imaju isti prikloni kut ω, odnosno $360^0 - \omega$, prema ravnini kružnice c, to će se tim izvodnicama pridruženi parovi zraka našeg kompleksa sjeći negdje ispod točke F, odnosno iznad nje, dakle na okomici d_1 ravnine kružnice c postavljenoj u točki F i to u točkama simetrično postavljenim s obzirom na ravninu te kružnice.

Kad bi sada svim realnim i imaginarnim izvodnicama stošca Ψ odredili pridružene zrake našeg kompleksa, dobili bismo neku pravčastu plohu, koja prema dosadašnjim razmatranjima ima dvije simetralne ravnine (ravnina kružnice c i ravnina (Ps)), jedan dvostruki pravac d_1 i jednu dvostruku hiperbolu d. Promotrimo pobliže ovakvu pravčastu plohu.

Parovi simetralnih izvodnica k, k^0 i k_1, $k_1{}^0$ jesu dijametralni parovi izvodnica stošca Ψ, dakle će se parovi dirnih ravnina tog stošca duž tih dijametralnih parova izvodnica sjeći u takvu pravcu vrha P, koji je okomit na ravninu tih parova izvodnica, a leži u simetralnoj ravnini (Ps). Budući da se tim izvodnicama stošca Ψ pridružene zrake našeg kompleksa nalaze upravo u tim dirnim ravninama, a presječnica tih dirnih ravnina leži u ravnini (Ps), dakle siječe pravac d_1 koji je u toj ravnini, to će ta presječnica sjeći okomicu d_1 u njenu zajedničkom probodištu s takvim parom dirnih ravnina. Postavimo li prema tome jednim parom zraka našeg kompleksa, koje se sijeku u jednoj točki D dvostrukog pravca d_1, ravninu, onda je spojnica točke D dvostrukog pravca d_1 s točkom P uvijek okomita na toj ravnini. Odavle direktno izlazi, da ravnine onih parova izvodnica ovakve pravčaste plohe, koje se sijeku na dvostrukom pravcu d_1, omataju paraboličan valjak, kojemu tjemena izvodnica p prolazi točkom F usporedno s tangentom t, a tangenta t mu je žarišna os. Ova naša pravčasta ploha je prema tome geometrijsko mjesto pravaca, koji leže u dirnim ravninama jednog paraboličkog valjka, koji sijeku jednu hiperbolu, koja taj valjak dira, i jednu tangentu tog valjka, koja tu hiperbolu siječe. Poznato je, da ovakve pravčaste plohe ubrajamo u pravčaste plohe 4. stupnja V. vrste prema raspodjeli po Sturmu [3]. Da je ova pravčasta ploha uistinu 4. stupnja, može se lako zaključiti i ovako: Uzmemo li hiperbolu d, pravac d i neizmjerno daleku kružnicu stošca Ψ kao ravnalice triju pravčastih kompleksa, onda je ova ploha prijesjek ovih triju kompleksa, budući da njene izvodnice sijeku ravnalice ovih triju kompleksa. Vidjeli smo, da pravac d_1 siječe u jednoj točki hiperbolu d, a ova opet neizmjerno daleku kružnicu stošca Ψ u dalje dvije točke, budući da su asimptote ove hiperbole usporedne s izvodnicama v, v_1 tog stošca. Stupanj ovakve pravčaste plohe, nastale kao prijesjek triju pravčastih kompleksa, dobije se pomoću poznate formule $2\,(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3) - (an_1 + bn_2 + cn_3)$, gdje su n_1, n_2, n_3 redovi ravnalica, odnosno stupnjevi kompleksa, a veličine a, b, c daju nam brojeve sjecišta druge i treće ravnalice, prve i treće ravnalice i prve i druge ravnalice tih kompleksa [4]. U našem je dakle slučaju stupanj plohe jednak $2\,(2 \cdot 2 \cdot 1) - (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = 4$.

Točka P nalazi se na žarišnoj osi našeg paraboličkog valjka, t. j. na prijesječnici izotropnog para dirnih ravnina tog valjka, a osim toga je ona i u simetralnoj ravnini te plohe. U svakoj ravnini pravca d_1 nalazi se po jedan realan ili konjugirano imaginaran par izvodnica naše plohe, koje se sijeku u jednoj točki hiperbole d, a svaka od njih leži u jednoj dirnoj ravnini našeg paraboličkog valjka. Ravnina pravca d_1 i točke P je simetralna ravnina naše pravčaste plohe i siječe opisani parabolički valjak okomito. Ova ravnina siječe prema tome izotropni par dirnih ravnina našeg paraboličkog valjka, koje prolaze točkom P, u paru izotropnih pravaca, koji su izvodnice ove naše pravčaste plohe. Točka P je dakle izolirana kružna točka [5] naše pravčaste plohe.

U svakoi dirnoj ravnini našeg paraboličkog valjka nalaze se po dvije izvodnice ovakve pravčaste plohe, koje se sijeku na pravcu d_1. U izotropnim dirnim ravninama tog valjka, koje prolaze pravcem t, padaju u svakoj od njih ove dvije izvodnice skupa, a obje ove dvoznačne izvodnice leže u simetralnoj ravnini (Pd_1). Odavle izlazi, da su izotropne izvodnice ovakve pravčaste plohe, koje se sijeku u točki P, a leže u simetralnoj ravnini te plohe, njeni torzalni pravci, kojima kao torzalne ravnine te plohe pripadaju izotropne ravnine žarišne osi t.

Dio hiperbole d, na kojoj leži točka P, jest izolirani dio dvostruke linije naše plohe, pa se u točkama duž tog dijela dvostruke linije d sijeku samo konjugirano imaginarni parovi izvodnica. Na dijelu hiperbole d, na kojemu leži točka F, sijeku se samo realni parovi izvodnica naše plohe. U ravninama položenim pravcem d_1 usporedo s asimptotama hiperbole d, nalaze se realni neizmjerno daleki torzalni pravci te plohe, a te su im ravnine torzalne.

Iz naših dosadašnjih razmatranja izlazi, da možemo napisati ovaj stavak: Geometrijsko mjesto osi onih oskulacionih kružnih valjaka jedne kružnice u jednoj njenoj točki, koji s tangentom te kružnice u toj točki zatvaraju jednake kutove, jest pravčasta ploha 4. stupnja V. vrste, koja u toj točki ima izoliranu kružnu točku.

Što vrijedi za točku P, vrijedi i za sve ostale točke kružnice c. Našem kompleksu pripadaju prema tome svi oni parovi izotropnih zraka, koji se sijeku na kružnici c, a leže u meridijanskim ravninama tog kompleksa.

Mijenjajmo sada veličinu kuta γ, koji izvodnice stošca Ψ čine s tangentom t. Svaki novi kut γ_i dat će nam novi stožac Ψ_i, a ovaj opet njemu pridruženu pravčastu plohu 4. stupnja V. vrste. Sve ove plohe imat će zajednički par izotropnih izvodnica u zajedničkoj simetralnoj ravnini (Ps), koje se sijeku u točki P, budući da izotropni par ravnina tangente t dira opisane paraboličke valjke svih ovih pravčastih ploha 4. stupnja V. vrste vezanih uz točku P. Iz izraza $FP = e = d \sin^2 \gamma$ vidi se, da sa porastom kuta γ raste i duljina FP, a kut asimptota hiperbole d, koja je dvostruka linija ovakve plohe, opada. Sve ovakve plohe zajedno, pridružene točki P, čine jednu kongruenciju, koju možemo definirati kao geometrijsko mjesto osi oskulacionih kružnih valjaka kružnice c u njenoj točki P.

4. Poznato je, da se strikciona linija neke pravčaste plohe podudara s krivuljom njene prave konture onda, kada je direkcioni stožac te plohe

uspravan kružni, a smjer projiciranja se podudara s osi tog stošca [6]. Budući da kod naše pravčaste plohe 4. stupnja V. vrste imamo takav slučaj, to ne će biti teško odrediti njenu strikcionu liniju. Vidjeli smo, da parovi izvodnica ovakve naše plohe, koji se sijeku na njenu dvostrukom pravcu d_1, leže u ravninama, koje omataju parabolički valjak. Žarišna os tog valjka je tangenta t, a tjemena izvodnica prolazi točkom F. Tangenta t je os direkcionog stošca naše plohe za vrh P. Projiciramo li prema tome našu plohu u smjeru tangente t na neku ravninu α, tad će kontura te projekcije ove plohe biti prijesječna parabola našeg paraboličkog valjka s tom ravninom α. Odavle izlazi, da se strikciona linija, kao prava kontura ovakva projiciranja nalazi na površini tog valjka. Ova će strikciona linija biti prema tome geometrijsko mjesto dirališta izvodnica te plohe s tim paraboličkim valjkom. Poznato je, da tjemena tangenta parabole raspolavlja udaljenost na svakoj njenoj tangenti omeđenu diralištem i sjecištem na osi. Analogno vrijedi naravno i za parabolički valjak. Postavimo li prema tome tom strikcionom linijom valjak okomit na ravninu kružnice c, bit će njegova osnovka u toj ravnini hiperbola, koja leži centrički simetrično s hiperbolom d s obzirom na točku F kao središte simetrije. Ovo izlazi odatle, što tjemena dirna ravnina našeg paraboličkog valjka raspolavlja udaljenost na svakoj izvodnici naše plohe, omeđenu njenom centralnom točkom i točkom na dvostrukoj hiperboli d u ravnini kružnice c, kao simetralnoj ravnini tog paraboličkog valjka. Sva se ta polovišta nalaze, međutim, upravo na dvostrukom pravcu d_1, budući da je on u tjemenoj dirnoj ravnini tog paraboličkog valjka. Osim toga se u svakoj paralelnoj projekciji projicira polovište neke dužine u polovište njene projekcije, a time je naprijed spomenuta tvrdnja i dokazana.

Vidimo prema tome, da je strikciona linija naše pravčaste plohe prodorna krivulja jednog paraboličkog i jednog hiperboličkog valjka, koji su jedan na drugom okomiti, a diraju se u jednoj točki njihovih tjemenih izvodnica. Ta će strikciona linija dakle biti prostorna krivulja 4. reda I. vrste s dvije simetralne ravnine i jednom dvostrukom točkom u konačnosti, koja leži na pravcu OP u simetralnoj ravnini. U beskonačnosti dira ta krivulja na dva mjesta neizmjerno daleku ravninu.

Mijenjamo li neprekinuto veličinu našeg poznatog kuta γ, dobit ćemo neprekinuto povezani sistem naših pravčastih ploha 4. stupnja V. vrste, koje sve zajedno čine već malo prije spomenutu kongruenciju. Strikcione linije tih ploha prelazit će kontinuirano također jedna u drugu, dakle će sve zajedno činiti neku opću plohu, kojoj će spojnica OP biti dvostruki pravac. Ova se opća ploha sastoji prema našim razmatranjima iz dirališta izvodnica spomenutih pravčastih ploha 4. stupnja V. vrste pridruženih točki P, s tim plohama pridruženim opisanim paraboličkim valjcima. Zajednički izotropni par izvodnica svih tih pravčastih ploha, koje se sijeku, kao što znamo, u točki P, dira također, ali u parovima konjugirano imaginarnih dirališta, svaki taj parabolički valjak. Parovi ovih konjugirano imaginarnih dirališta leže na ravnalicama prijesječnih parabola tih valjaka sa simetralnom ravninom (*Ps*). Ovaj zajednički izotropni par izvodnica nalazi se prema tome čitav na toj općoj plohi spomenutih strikcionih linija. Opisani parabolički valjci svih ovih pravčastih ploha 4. stupnja V. vrste točke P diraju se međusobno, kao i neizmjerno daleku ravninu, duž neizmjerno dalekog pravca ravnine kružnice c, budući da je ova ravnina njihova zajednička simetralna ravnina. Strikcione linije ovih pravčastih ploha, koje leže na tim paraboličkim valjcima, dirat će prema tome njihovu zajedničku neizmjerno daleku dirnu ravninu duž tog istog pravca, i to svaka od njih u drugom paru točaka. Ovaj par točaka određen je poznatim parom pravaca v, v_1 točke P u ravnini kružnice c za svaku takvu plohu. Izlazi dakle, da naša opća ploha strikcionih linija svih spominjanih pravčastih ploha točke P dira neizmjerno daleku ravninu i sve pripadne paraboličke valjke duž neizmjerno dalekog pravca ravnine kružnice c.

Postavimo li, da bude poznati kut $\gamma = 90^0$, t. j. da stožac Ψ vrha P i osi t prijeđe u okomitu ravninu na tu os, stegnut će se ovom kutu γ pridružena pravčasta ploha 4. stupnja V. vrste u pramen pravaca 2. razreda, koje će na temelju razmatranja u radnji »O hiperoskulacionim kružnim valjcima jedne kružnice« omatati parabolu u ravnini osi s i točke P, kojoj je točka P žarište, a točka O tjeme. Strikciona linija ove degenerirane pravčaste plohe jest ova parabola sama, dakle se i ona nalazi na plohi strikcionih linija svih naših pravčastih ploha 4. stupnja V. vrste pridruženih na opisani način točki P.

Iz činjenice, da zajednička simetralna ravnina (*Ps*) svih opisanih pravčastih ploha pridruženih točki P, siječe opću plohu sastavljenu iz strikcionih linija svih tih pravčastih ploha u dvostrukom pravcu OP, u jednoj paraboli i u jednom paru izotropnih pravaca, izlazi, da je opća ploha strikcionih linija svih pravčastih ploha 4. stupnja V. vrste pridruženih točki P 6. reda.

LITERATURA

[1] *Glasnik Društva mat. fiz. i astr. NRH*, Zagreb, 1949. T. 4. Str. 3—10.

[2] Vidi radnju cit. pod [1].

[3] Müller, Krames, Vorles. über Darstellende Geometrie, Bd. III. str. 258 (Deuticke, Leipzig und Wien, 1931).

[4] Vidi cit. pod [3] str. 33.

[5] V. Niče, Izolirane kružne točke na pravčastim plohama 3. i 4. stupnja. *Rad*, knjiga *292.*, str. 193.

[6] Vidi cit. pod [3] str. 136. i 137.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 3. I. 1957.

Vilim Niče

DER ACHSENKOMPLEX DER OSKULATORISCHEN KREISZYLINDER EINES KREISES UND EINIGE SEINER FLÄCHEN UND KONGRUENZEN*

Die Strahlen des Mittelpunktes O eines Kreises c sind die Achsen der diesen Kreis enthaltenden Zylinder 2. Grades. Die Achsen der ∞^1 oskulatorischen Kreiszylinder des einen diesen Kreis c enthaltenden Zylinders, die auch den Kreis c oskulieren, bilden, wie bekannt, einen Evolutenzylinder 6. Ordnung. Die Achsen der oskulatorischen Kreiszylinder aller ∞^2 den Kreis c enthaltenden Zylinder 2. Grades, oder, die Achsen der ∞^3 oskulatorischen Kreiszylinder des Kreises c, bilden einen algebraischen Strahlenkomplex, der wahrscheinlich vom 6. Grade sein wird. Offensichtlich ist dieser Strahlenkomplex rotatorisch und symmetrisch bezüglich der Ebene des Kreises c. Die im Mittelpunkt O des Kreises c auf seine Ebene errichtete Senkrechte s ist die Achse dieses algebraischen Strahlenkomplexes.

Die Achsen der oskulatorischen Kreiszylinder aller auf einen Durchmesser m des Kreises c senkrechten Zylinder dieses Kreises bilden eine konoidale algebraische Strahlenkongruenz, die aus den Evolutenzylindern dieser Zylinder des Kreises c besteht. Dreht man einen Punkt T um die Achse s, so durchläuft dieser Punkt einen Kreis, der jeden der ∞^1 erwähnten Evolutenzylinder in 12 Punkten schneidet, die in Paaren konjugiert imaginär sein können und auch sind. Wird die ganze konoidale Strahlenkongruenz um die Achse s gedreht, so beschreibt jeder ihrer Strahlen ein Drehhyperboloid, und alle Erzeugenden dieser ∞^2 Drehhyperboloide sind Strahlen des beschriebenen Strahlenkomplexes. Bei dieser Drehung werden die erwähnten 12 Erzeugenden eines jeden in der konoidalen Strahlenkongruenz sich befindenden Evolutenzylinders einmal in den Punkt T fallen. Daraus folgt, dass der Kegel der Strahlen unseres Komplexes, die den Punkt T enthalten, jeden Kreiskegel desselben Punktes, dessen Achse mit der Achse s parallel ist, in 12 Erzeu-

* Originalüberschrift dieser Arbeit: *Kompleks osi oskulacionih kružnih valjaka jedne kružnice i neke njegove plohe i kongruencije.*

genden schneidet, also vom 6. Grade ist. Da jeder algebraische Strahlenkomplex einen Grad hat, so ist Achsenkomplex der oskulatorischen Kreiszylinder eines Kreises vom 6. Grade.

Die erwähnte in diesem Strahlenkomplex sich befindende konoidale Strahlenkongruenz befindet sich auch in dem singulären linearen Strahlenkomplex der auf dem Durchmesser m senkrechten unendlich fernen Leitgeraden, ist also auch 6. Ordnung und 6. Klasse.

Die Erzeugenden der durch das Drehen eines auf dem Durchmesser m senkrechten Evolutenzylinders entstandenen Drehhyperboloide bilden eine rotatorische Strahlenkongruenz 12. Ordnung und 12. Klasse. Ausser diesen zwei Strahlenkongruenzen werden wir noch die algebraische Achsenkongruenz der den Kreis c in einem Punkt P oskulierenden Kreiszylinder betrachten, da sich in dieser Strahlenkongruenz interessante Regelflächen 4. Grades befinden, deren Erzeugende mit der Tangente t des Kreises c im Punkt P den gleichen Winkel bilden. Die Strahlenkongruenz der Achsen der hyperoskulatorischen Kreiszylinder eines Kreises wurde bereits in einer anderen Abhandlung betrachtet.

Es schneide eine den Mittelpunkt O des Kreises c enthaltende Ebene ϱ die Kreisebene in der Geraden m. Die orthogonale Projektion P_1 eines beliebigen Punktes P des Kreises c auf die Ebene ϱ befindet sich selbstverständlich auf der gleichartigen Projektion c_1 des Kreises c auf dieselbe Ebene. Der Schnittpunkt der Tangente t des Kreises c im Punkt P und der Geraden m bezeichne man mit M. Abb. 1. Die Verbindungsgerade t_1 der Punkte M, P_1 wird die Tangente der Ellipse c_1 im P_1 sein. Die orthogonale Projektion P_1' des Punktes P_1 auf die Ebene des Kreises c liegt auf der den Punkt P enthaltenden Senkrechten auf der Geraden m, da diese Senkrechte die orthogonale Projektion auf dieselbe Ebene der Verbindungsgeraden $PP_1 \perp \varrho$ ist. Der Punkt N sei der Fusspunkt dieser Senkrechten auf der Geraden m. Die orthogonale Projektion n' der Normalen $n = P_1 S$ der Ellipse c_1 im Punkte P_1 auf die Ebene des Kreises c fällt mit der auf die Tangente t gefällten und den Punkt P_1' enthaltenden Senkrechten $P_1' L$ zusammen, da die Normale n auf der Ebene der Geraden t, t_1 senkrecht steht. Der Punkt L ist der Fusspunkt dieser Senkrechten auf der Geraden t. Nun soll für die Ebene Σ der Achse $s\,\Sigma \perp m$ gelten. Die Normale n schneide die Gerade m im Punkt K und die Ebene Σ im Punkt S, während die Gerade t_1 diese Ebene im Punkt U schneidet. Wie bekannt, gilt für den Krümmungsmittelpunkt R der Ellipse c_1 im Punkt P_1 auf der Normalen n folgende Proportion: $MP_1 : P_1 U = KR : RS$. Es gilt ausserdem $P_1 R : RS = MK : KO$. Das im Punkt R auf die Ebene ϱ gefällte Lot $a \parallel PP_1$ ist ein Strahl unseres Strahlenkomplexes. Die orthogonalen Projektionen der Punkte R, S auf die Ebene des Kreises c bezeichne man mit R', S' und die mit SO durch den Punkt R parallel gezogene Gerade schneide die Gerade m im Punkte Q. Auf Grund der parallelen Lagen der Ebenen $(R\,R'\,Q)$ und $(P\,P_1\,P_1')$ und auf Grund der oben erwähnten Proportion folgt $MK : KO = NQ : QO$. Wegen $R'Q \parallel PN$ gilt für den Schnittpunkt F der Verbindungsgeraden

$R'Q$ und PO die Proportion $PF:FO = NQ:QO$. Da aber $OP \parallel KL \perp t$ ist, gilt auch $MK:KO = ML:LP$, bzw. $ML:LP = NQ:QO = PF:FO$.

Es sei P der Scheitel des Kreiskegels Ψ, für den die Tangente t Achse, und der Strahl PP_1 eine Erzeugende sind. Die in der Ebene des Kreises c liegenden Erzeugenden v, v_1 dieses Kegels bilden mit der Achse t den mit dem Winkel der Geraden t und PP_1 gleichen Winkel γ. Da die Normale n der Ellipse c_1 im Punkt P_1 senkrecht auf der Ebene $(P_1 t)$ steht, wird sie in der Berührungsebene des Kegels längs der Erzeugenden PP_1 liegen müssen. Die Spur $r = PK$ dieser Berührungsebene in der Ebene des Kreises c kann mittels des harmonischen Strahlenwurfes $(v\, v_1\, k'\, r) = -1$ $(k' = PP_1')$ erhalten werden, da r der Polarstrahl der Ebene $(P P_1 P_1')$ bezüglich des Kegels Ψ ist. Der der Erzeugenden PP_1 zugeordnete Komplexstrahl a durchläuft den Schnittpunkt V der Spurgeraden r und der Geraden $R'Q = a'$.

Es sei irgend eine neue Erzeugende PP_i des Kegels Ψ gegeben. Die Spur m_i der auf diese Erzeugende senkrechten und ihr zugeordneten Ebene ϱ_i wird wieder senkrecht auf die Projektion $k_i' = PP_i'$ dieser Erzeugenden sein. Die Normale n_i der zugeordneten Ellipse c_i im Punkt P_i wird wieder in der Berührungsebene des Kegels Ψ längs der Erzeugenden PP_i liegen. Die mittels des harmonischen Strahlenwurfes $(v\, v_1\, k_i'\, r_i) = -1$ erzeugte Spur r_i dieser Berührungsebene wird von der Spur m_i der Ebene ϱ_i im Punkt N_i geschnitten. Die Gerade t werde von der Spur m_i im Punkt M_i geschnitten. Bezeichnet man auch hier den Schnittpunkt der Geraden k_i, t mit L_i, so wird es auf dem Halbmesser OP einen Punkt F_i geben, der mittels der Proportion $M_i L_i : L_i P = PF_i : F_i O$ bestimmt werden kann. Es war ersichtlich, dass r, k' und r_i, k_i' Paare zugeordneter Strahlen des hyperbolisch involutorischen Strahlenbüschels des Scheitels P sind, dem die Geraden v, v_1 als Doppelstrahlen angehören. Der Büschel $O\,(m_i)$ der Strahlen m_i des Scheitels O ist projektiv dem Büschel $P\,(k_i')$ der Strahlen k_i' des Scheitels P zugeordnet, da die Paare zugeordneter Strahlen aufeinander senkrecht stehen. Es folgt also, dass auch $O\,(m_i) \overline{\wedge}\, P\,(r_i)$ gilt. Da aber in diesen Büscheln der Strahl PO sich selbst zugeordnet ist, wird $O\,(m_i) \overline{\overline{\wedge}}\, P\,(r_i)$. Dem auf OP senkrecht stehenden Strahle des Büschels $O\,(m_i)$ ist im Büschel $O\,(r_i)$ die Gerade $t \perp OP$ zugeordnet, also muss das Erzeugnis der perspektiven Strahlenbüschel $O\,(m_i) \overline{\overline{\wedge}}\, P\,(r_i)$ eine Punktreihe K_i auf einer Geraden $p \parallel t$ sein. Auf Grund des Doppelverhältnisses $MK:KO = PF:FO$ wird die Gerade p den Punkt F enthalten. Allen Erzeugenden des Kegels Ψ, beziehungsweise den ihnen zugeordneten Ebenen ϱ_i, ist also der Punkt F auf dem Halbmesser OP gemeinsam. Es ist leicht zu beweisen, dass $FP = OP \sin^2 \gamma$ ist.

Die in der Ebene des Kreises c sich befindenden orthogonalen Projektionen a_i' der mit den Erzeugenden des Kegels Ψ parallelen Komplexstrahlen a_i enthalten den Punkt F, also schneiden alle diese Komplexstrahlen a_i eine auf diese Kreisebene im Punkt F lotrechte Gerade d_1. Die

Schnittpunkte V_i dieser Strahlen a_i mit der Ebene des Kreises c erscheinen als Erzeugnis der Strahlenbüschel $F(a_i')$ und $P(r_i)$. Auf Grund von $F(a_i') \overline{\overline{\wedge}} P(k_i')$ und $P(r_i) \overline{\wedge} P(k_i')$ gilt auch $F(a_i') \overline{\wedge} P(r_i)$, also wird das erwähnte Erzeugnis eine Kurve 2. Grades sein. Jeder Punkt dieser Kurve ist der Schnittpunkt eines bezüglich der Kreisebene symmetrischen Komplexstrahlenpaares. Auf Grund der Tatsache, dass in den projektiven Strahlenbüscheln $F(a_i') \overline{\wedge} P(r_i)$ sich zwei Paare zugeordneter, mit den Geraden v, v_1 paralleler Strahlen befinden, wird die erwähnte Kurve 2. Grades eine Hyperbel d, die mit der Geraden v, v_1 parallele Asymptoten hat und die Punkte F, P als Scheitel besitzt. Man sieht also, dass alle mit den Erzeugenden des Kegels Ψ parallele Komplexstrahlen a_i eine Regelfläche bilden, die bezüglich der Ebene (Pd_1) symmetrisch ist und die Gerade d_1 und die Hyperbel d als Doppellinien enthält. Die längs eines diametralen Erzeugendenpaares den Kegel Ψ berührenden Ebenen schneiden sich in einer in der Symmetrieebene sich befindenden Geraden l, die senkrecht auf der Ebene dieses diametralen Erzeugendenpaares steht. Die diesem diametralen Erzeugendenpaare zugeordneten Komplexstrahlen werden den Schnittpunkt D der Geraden l, d_1 enthalten. Aus der Tatsache, dass die Gerade l eine Senkrechte der Ebene der im Punkt D sich treffenden Komplexstrahlen ist, und dasselbe für alle Ebenen der in Punkten der Geraden d_1 sich treffenden Komplexstrahlenpaare gilt, folgt, dass die Ebenen aller in den Punkten der Geraden d_1 sich treffenden Komplexstrahlenpaare einen parabolischen Zylinder einhüllen, dem die Gerade p die Scheitelerzeugende und die Gerade t die Brennachse sind. Der geometrische Ort der mit den Erzeugenden des Kegels Ψ parallelen Komplexstrahlen unseres Komplexes ist also eine Regelfläche, deren Erzeugenden die Hyperbel d und die Gerade d_1 schneiden, und den erwähnten parabolischen Zylinder berühren. Auf Grund der Tatsache, dass die Gerade d_1 die Hyperbel d schneidet und beide den parabolischen Zylinder berühren, folgt, dass dies, der STURMschen Einteilung nach, eine Regelfläche 4. Grades V. Art ist. In den Punkten des den Punkt P enthaltenden Teiles der Hyperbel d schneiden sich Paare konjugiert imaginärer Erzeugenden dieser Regelfläche, während der Punkt P ein isolierter Kreispunkt ist, in dem sich ein Paar isotroper Torsalgeraden trifft. Die dazu gehörenden Torsalebenen sind als das isotrope Ebenenpaar der Geraden t bestimmt.

Variiert man die Grösse des Winkels γ, so gehört jedem dieser Winkel eine derartige Regelfläche 4. Grades V. Art. Die Erzeugenden dieser ∞^1 Regelflächen bilden also die Strahlenkongruenz der Achsen der im Punkt P den Kreis c oskulierenden Kreiszylinder.

Wie bekannt, ist Ψ der Richtkegel der ihm zugeordneten Regelfläche 4. Grades V. Art. Auf Grund dessen kann die Striktionslinie dieser Fläche als ihre Eigenschattengrenze bezüglich der mit der Geraden t parallelen Lichtrichtung bestimmt werden. Mittels einer bekannten Parabeleigenschaft kann weiter leicht bewiesen werden, dass man diese Striktionslinie als Durchdringungskurve des erwähnten parabolischen Zylinders und eines mit der Geraden d_1 parallelen hyperbolischen Zylinders erzeugen kann, wobei die Basis des letzteren Zylinders in der Kreisebene die zur Hyperbel d bezüglich des Punktes F zentralsymmetrisch liegende Hyperbel ist. Die Striktionslinie ist also eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art. Die Striktionslinien aller derartigen dem Punkt P zugeordneten Regelflächen 4. Grades V. Art sind im Raum stetig verbunden, bilden also eine Fläche, der die Gerade OP als Doppelgerade angehört. Bei $\gamma = 90^0$ geht der Kegel Ψ in einen gewöhnlichen Strahlenbüschel und die dazu gehörige Regelfläche 4. Grades V. Art in einen doppelwertigen Strahlenbüschel 2. Klasse über. Dieser Strahlenbüschel 2. Klasse ist von den Tangenten der dem Scheitel O und dem Brennpunkte P gehörenden Parabel gebildet. Als Striktionslinie dieser degenerierten Regelfläche 4. Grades liegt diese Parabel auch auf der beschriebenen Striktionslinienfläche der zum Punkt P gehörenden Regelflächen 4. Grades V. Art. Dieser Striktionslinienfläche gehören auch die in der Symmetrieebene (Pd_1) sich befindenden isotropen Geraden des Punktes P an, da diese gemeinsamen Erzeugenden allen dem Punkt P zugeordneten Regelflächen 4. Grades V. Art sind und alle den zu diesen Flächen gehörenden parabolischen Zylinder berühren. Die allen Regelflächen 4. Grades V. Art des Punktes P gemeinsame Symmetrieebene (Pd_1) schneidet, wie man sah, diese Striktionslinienfläche, auch als deren Symmetrieebene, in einer Doppelgeraden, in einer Parabel und in einem isotropen Geradenpaare. Diese Striktionslinienfläche ist also von der 6. Ordnung. Längs der unendlichen Geraden der Ebene des Kreises c wird diese Striktionslinienfläche von der unendlich fernen Ebene berührt.

Angenommen auf der am 3. I. 1957. abgehaltenen Sitzung der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften.