Serija II. T. 9. Zagreb 1954. Broj 3-4 POSEBAN OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO - PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Vilko Niče, Zagreb

Die Brennpunktsfläche der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids

Ploha žarišta čunjosječnica Plückerova konoida

Zagreb 1954

Štamparski zavod „Ognjen Prica“ - Zagreb, Savska cesta 31

GLASNIK MAT. - FIZ. I ASTR.
Tom 9. — No. 3-4 — 1954.

DIE BRENNPUNKTSFLÄCHE DER KEGELSCHNITTE DES PLÜCKERSCHEN KONOIDS

Vilko Niče, Zagreb

Alle Regelflächen 3. Grades, also auch das Plückersche Konoid, enthalten ∞^1 Kegelschnitte, da sie von jeder Ebene jeder ihrer Erzeugenden in einem Kegelschnitte geschnitten werden. Alle diese Kegelschnitte haben natürlich zwei reelle und zwei konjugiert imaginäre Brennpunkte. Wegen der stetig und zusammenhängend eingebetteten zweiparametrigen Mannigfaltigkeit dieser Kegelschnitte auf diesen Flächen, sind im Raume stetig und zusammenhängend auch die Brennpunkte dieser Kegelschnitte verbunden und bilden also eine Fläche. Diese Brennpunktsfläche ist Gegenstand unserer Betrachtungen in dieser Arbeit.

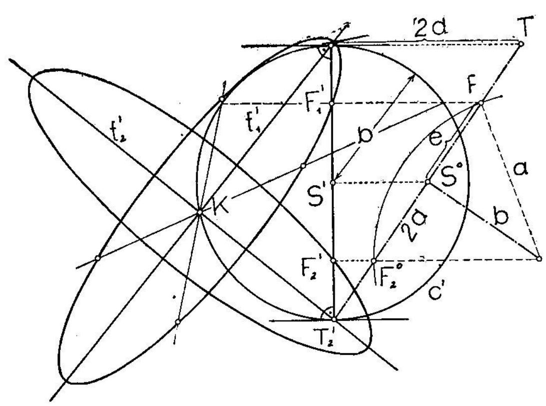

Abb. 1.

Wie bekannt, enthalten die Kegelschnitte einer Regelfläche 3. Grades je einen Punkt ihrer Doppelgeraden. Im Falle des Plückerschen Konoids werden ausserdem diese Kegelschnitte in der Richtung der Doppelgeraden auf die Richtebenen (orthogonal) in Kreise projiziert. Es sollen der Punkt K' und der Kreis c' als solche Projektionen der Doppelgeraden k und eines Kegelschnittes (Ellipse) c des Plückerschen Konoids angenommen werden, wobei die Bildebene eine Richtebene des Konoids sei. Da die Torsalgeraden t_1, t_2 des Plückerschen Konoids aufeinander senkrechte Geraden sind, erscheinen auch ihre Projektionen t_1', t_2' in der Bildebene als senkrechte Geraden $t_1' \perp t_2'$. Die Ebene des Kegelschnittes c schneide die Torsalgeraden t_1, t_2 in den Punkten T_1, T_2, und die dazu gehörigen Torsalebenen in Geraden, die in den Punkten T_1, T_2 den Kegelschnitt c berühren. Da wegen der parallelen Lage der Torsalebenen auch diese Berührungsgeraden parallel sind, kann die Strecke $T_1 T_2$ nur Durchmesser des Kegelschnittes c, und die Strecke $T_1' T_2'$ nur Durchmesser des Kreises c' sein. Da die Tangenten des Kegelschnittes c in den Punkten T_1, T_2 mit der Bildebene parallel sind, also deren Projektionen auf der Strecke $T_1 T_2$ senkrecht stehen, folgt, dass die Strecke $T_1 T_2 = 2a$ die grosse Achse des Kegelschnittes (der Ellipse) c ist. Die reellen Brennpunkte der Ellipse c befinden sich also auf der Strecke $T_1 T_2$. Auf jeder die Geraden t_1, t_2 schneidenden Geraden, also auf jedem Strahle der linearen hyperbolischen Kongruenz der Leitgeraden t_1, t_2, befindet sich solch eine grosse Achse $T_1 T_2$ einer Ellipse des Konoids, da der Punkt K' und die Projektionen T_1', T_2' der Schnittpunkte T_1, T_2 jedes dieser Strahlen mit den Leitgeraden t_1, t_2 einen Kreis bestimmen, der sich mit der orthogonalen Projektion dieser Ellipse auf die Bildebene deckt. Die kleine Achse ($2b$) aller Ellipsen c des Plückerschen Konoids befinden sich in dessen mit der Bildebene parallelen Mittelebene. Die kleine Achse $2b$ der Ellipse c wird also dem Durchmesser des Kreises c' gleich sein. Es folgt deswegen, dass $T_1' T_2' = 2b$ ist. Hieraus erhält man auch sofort weiter, dass sich die konjugiert imaginären Brennpunkte aller Ellipsen des Plückerschen Konoids in seiner Mittelebene befinden. Die von den Kuspidalpunkten begrenzte Strecke soll mit $2d$, und der Mittelpunkt der Ellipse c soll mit S bezeichnet werden. Mittels des Höhenunterschiedes der Punkte T_1, T_2, der gleich $2d$ ist, erhält man die Gleichung $(T_1 T_2)^2 = (2d)^2 + (T_1' T_2')^2$, woraus man weiter $b^2 + d^2 = a^2$ folgert, wobei a, b die Halbachsen der Ellipse c sind. Die Brennpunkte der Ellipse c sollen mit F_1, F_2, und deren Entfernung vom Mittelpunkt S mit e (Exzentrizität) bezeichnet werden.

Wie bekannt, gilt bei der Ellipse c die Gleichung $b^2 + e^2 = a^2$, woraus weiter folgt, dass e und d gleich sind. Man erhält also, da dies für jede Ellipse des Plückerschen Konoids giltig ist, dass die Brennpunktsfläche der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids auf folgende Weise entstehen kann: *Wird die Hälfte des Abstandes der Kuspidalpunkte des Plückerschen Konoids auf die Strahlen der hyperbolischen linearen Kongruenz seiner Torsalgeraden als Leitlinien auf beiden Seiten seiner Mittelebene aufgetragen, so liegen alle so gewonnenen Punkte auf der Brennpunktsfläche der Kegelschnitte dieses Plückerschen Konoids.*

Die Brennpunktsfläche der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids ist also eine konchoidale Fläche der Mittelebene dieses Konoids, wobei das Strahlenbündel des Pols durch die lineare hyperbolische Kongruenz der Torsalgeraden des Konoids als Leitlinien ersetzt ist. Alle eine Torsalgerade des Konoids enthaltenden ebenen Schnitte dieser Brennpunktsfläche sind Nikomedische Konchoiden der in der Mittelebene liegenden Schnittgeraden und des im Schnittpunkte der zweiten Torsalgeraden liegenden Pols. Da alle Nikomedischen Konchoiden zirkuläre Kurven sind, muss die erwähnte Brennpunktsfläche den absoluten Kegelschnitt enthalten. Aus der Art der Erzeugung der Brennpunktsfläche folgt nun offensichtlich, dass die Symmetrieebenen und die Mittelebene des Plückerschen Konoids sich mit den Symmetrieebenen und der Mittelebene der Brennpunktsfläche seiner Kegelschnitte decken.

Die Verbindungsstrecke irgend eines Punktes T_1 der Torsalgeraden t_1 mit irgend einem Punkte T_2 der Torsalgeraden t_2 wird immer die grosse Achse einer Ellipse des Plückerschen Konoids, da der von den Projektionen T_1', T_2' und K' bestimmte Kreis die bekannte Projektion dieser Ellipse ist. Verschiebt man die Punkte T_1', T_2' auf den Geraden $t_1' t_2'$ so, dass die Länge der Strecke $T_1' T_2'$ unverändert bleibt, gehört zu jeder neuen Lage der Strecken $T_1' T_2'$ ein neuer Kreis c' mit demselben der Hälfte der Strecke $T_1' T_2'$ gleichen Halbmesser. Alle diese Kreise sind Projektionen kongruenter Ellipsen des Konoids, woraus weiterhin folgt, dass sich die Brennpunkte dieser Ellipsen in zwei Richtebenen dieses Konoids befinden, da die Hauptachsen gleich lang und gegen die Bildebene gleich geneigt sind. Aus demselben Grund sind auch die Projektionen der Entfernungen der Brennpunkte von dem Mittelpunkt S (der Exzentrizitäten) dieser Ellipsen gleich lang. Werden die Brennpunkte mit F_1, F_2, und ihre Projektionen mit F_1', F_2' bezeichnet, folgt auf Grund dieser Darlegungen dass $S' F_1' = S' F_2'$ und $T_1' F_1' = T_2' F_2'$ auf jeder der Strecken $T_1' T_2'$ sein muss. Aus der bekannten Ellipsenkonstruktion folgt dann leicht, dass alle Punkte T_1' und alle Punkte T_2' sich auf kongruenten Ellipsen befinden, deren Halbachsen den Strecken $T_2' F_1' = T_1' F_2'$, resp. $T_1' F_1' = T_2' F_2'$, gleich sind. Die grossen Achsen dieser zwei kongruenten Ellipsen mit gemeinsamen Mittelpunkte stehen aufeinander senkrecht. Da dies für jedes Punktepaar T_1, T_2 auf der Torsalgeraden t_1, t_2, und deren Projektionen T_1', T_2' gültig ist, erhält man folgende Eigenschaft unserer Brennpunktsfläche:

Die die reellen Erzeugenden enthaltenden Richtebenen des Plückerschen Konoids schneiden die Brennpunktsfläche der Kegelschnitte dieses Konoids in Ellipsen, deren Achsen sich in den Symmetrieebenen des Konoids befinden. In der Mittelebene des Konoids und der Brennpunktsfläche geht die Ellipse in die unendlich ferne Doppelgerade dieser Brennpunktsfläche über. Die Brennpunktsfläche wird also von der unendlich fernen Ebene in dieser Doppelgeraden und dem absoluten Kegelschnitte geschnitten. Aus der Lage der kongruenten, von der Mittelebene gleich entfernten und mit ihr parallelen Ellipsen folgt, dass die Brennpunktsfläche aus zwei kongruenten, ober- und unterhalb der Mittelebene zueinander senkrecht liegenden Teilen zusammengesetzt ist.

Wie bekannt sind die Nikomedischen Konchoiden zirkuläre Kurven 4. Ordnung mit einem endlichen im Pol befindlichen Doppelpunkt, und einem unendlich fernen Doppelpunkt, in dem die Kurve sich selbst berührt. Irgend eine Ebene α des Raumes schneide die Torsalgerade t_1 im Punkte P. Jede den Punkt P enthaltende Gerade s in der Ebene α und die Torsalgerade t_1 bestimmen eine Ebene, deren Schnitt mit unserer Brennpunktsfläche eine Nikomedische Konchoide ist. Jede der Geraden s in der Ebene α hat also mit der Brennpunktsfläche vier Punkte gemeinsam, woraus weiterhin folgt, dass der Schnitt der Brennpunktsfläche mit der Ebene α eine Kurve 4. Ordnung sein muss. *Die Brennpunktsfläche der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids ist also 4. Ordnung.* Die Torsalgeraden des Konoids gehören der Brennpunktsfläche als Doppelgeraden an, da die in den Torsalebenen befindlichen Ellipsen der Brennpunktsfläche in diese Doppelgeraden zerfallen.

In jeder, ein Paar reeller Erzeugenden enthaltenden Richtebene des Plückerschen Konoids befindet sich, wie bekannt, eine reelle Ellipse der Brennpunktsfläche, die in der Mittelebene in eine unendlich ferne Doppelgerade dieser Fläche zerfällt. Jedes dieser Erzeugendenpaare schneidet die in seiner Ebene befindliche Ellipse der Brennpunktsfläche in vier Punkten. Da die Erzeugendenpaare auf dem Plückerschen Konoid, wie auch die Ellipsen in deren Ebenen auf der Brennpunktsfläche, stetig und zusammenhängend aufeinander folgen, so sind auch die Quadrupel der in den Richtebenen befindlichen Schnittpunkte stetig zu einer Raumkurve verbunden, die als Durchdringungskurve der Brennpunktsfläche und des Plückerschen Konoids betrachtet werden kann. Die gemeinsamen Symmetrieebenen des Konoids und der Brennpunktsfläche werden also auch Symmetrieebenen dieser Raumkurve.

Wie bekannt, ist die Torsalgerade einer Regelfläche 3. Grades ein in diese Gerade in der Torsalebene zusammengefallenes Erzeugendenpaar. Unsere dem Plückerschen Konoid und der Brennpunktsfläche gemeinsame Raumkurve hat also in den Kuspidalpunkten des Konoids Doppelpunkte, in denen sie sich selbst berührt, da sie in diesen Punkten die Torsalgeraden doppelt berührt.

Es wurde vorher in unseren Ausführungen festgestellt, dass die Brennpunktsfläche aus zwei kongruenten Teilen besteht, die mit dem Plückerschen Konoid gemeinsame Symmetrieebenen haben. Da dasselbe auch für die durch die Mittelebene zerschnittenen Teile des Plückerschen Konoids gilt, muss auch die gemeinsame Raumkurve dieser Flächen aus zwei kongruenten Teilen zusammengesetzt sein.

In den unendlich fernen Punkten des in der Mittelebene liegenden senkrechten Erzeugendenpaares des Konoids hat diese Raumkurve unendlich ferne Doppelpunkte, da dieselben auf der Doppelgeraden der Brennpunktsfläche liegen. Die Durchdringungskurve des Plückerschen Konoids und der Brennpunktsfläche seiner Kegelschnitte ist von 12. Ordnung. Da aber die Torsalgeraden und die unendlich ferne Leitgerade des Konoids als Doppelgeraden dieser Baumkurve angehören, zerfällt diese in drei Doppelgeraden und eine Raumkurve 6. Ordnung. Man erhält also folgenden Satz:

Auf dem Plückerschen Konoid gibt es ∞^1 Ellipsen, deren Brennpunkte sich auf dem Konoid befinden und eine Raumkurve 6. Ordnung mit zwei endlichen und zwei unendlich fernen Doppelpunkten bilden. Diese Raumkurve hat ihre Symmetrieebenen und die Mittelebene mit dem Konoid gemein. In den Kuspidalpunkten, die Doppelpunkte dieser Raumkurve sind, werden die Torsalgeraden und die Torsalebenen von dieser Raumkurve, wie diese auch von sich selbst, berührt.

PLOHA ŽARIŠTA ČUNJOSJEČNICA PLÜCKEROVA KONOIDA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

Plückerov konoid, kao i svaka druga pravčasta ploha 3. stepena, ima smješteno na svojoj plohi ∞^2 neprekinuto povezanih čunjosječnica (elipsi), od kojih svaka ima par realnih i par konjugirano imaginarnih žarišta. Radi neprekinute povezanosti tih čunjosječnica, neprekinuto su povezana i njihova žarišta, dakle čine neku plohu. Razmatrat ćemo pobliže takvu plohu.

Svaka čunjosječnica Plückerova konoida siječe njegov dvostruki pravac u jednoj točki, te se u smjeru tog dvostrukog pravca projicira na direkcione ravnine tog konoida u kružnice. Ravnina jedne elipse c tog konoida neka siječe njegove torzalne pravce t_1, t_2 u točkama T_1, T_2, a dvostruki pravac u točki K. Presječnice torzalnih ravnina tog konoida s ravninom elipse c su njene usporedne tangente u točkama T_1, T_2, dakle je dužina $T_1 T_2$ jedan promjer elipse c. Točke K', T_1' i T_2' neka su projekcije spomenutih točaka u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, koja neka bude ravnina slike (vidi sliku). Točkama K', T_1' i T_2' određena kružnica c' je projekcija elipse c u istom smjeru i na istu ravninu. Budući da je ravnina naše slike usporedna s torzalnim ravninama našeg konoida, izlazi, da je $T_1' T_2'$ promjer kružnice c', odakle dalje proizlazi, da su tangente elipse c u točkama T_1', T_2 okomite na dužini $T_1 T_2$, t. j. ta je dužina velika os elipse c. Njena mala os leži u središnjoj ravnini konoida i jednaka je promjeru kružnice c'. Konjugirano imaginarna žarišta svih elipsi Plückerova konoida nalaze se dakle u njegovoj središnjoj ravnini.

Označimo s $2a$ veliku os, a s $2b$ malu os elipse c. Znamo, da je $2a = T_1 T_2$ i $2b = T_1' T_2'$. Svaka dužina u prostoru, koja ima svoje krajnje točke na torzalnim pravcima t_1, t_2, bit će na opisani način velika os jedne elipse našeg konoida. Pol razmaka između kuspidalnih točaka našeg Plückerovog konoida označimo s d. Iz $(T_1' T_2')^2 + (2d)^2 = (T_1 T_2)^2$ izlazi, da je $b^2 + d^2 = a^2$. Žarište elipse c označimo s F_1, F_2, a njeno središte sa S. Osim toga neka je $SF_1 = SF_2 = e$ (ekscentricitet elipse c). Znamo da je kod elipse c, kao i kod svake druge elipse, $b^2 + e^2 = a^2$. Izlazi dakle, da je $e = d$. Budući da ovo vrijedi za svaku transverzalu torzalnih pravaca t_1, t_2, t. j. za sve zrake linearne hiperboličke kongruencije ravnalica t_1, t_2, to dobivamo ovaj stavak:

Geometrijsko mjesto realnih žarišta svih čunjosječnica Plückerova konoida je ploha, koju dobivamo tako, da na svaku zraku linearne hiperboličke kongruencije torzalnih pravaca tog konoida kao ravnalica nanesemo od njegove središnje ravnine pol razmaka između kuspidalnih točaka tog konoida.

Iz ove definicije izlazi, da ravnine torzalnih pravaca Plückerova konoida sijeku plohu žarišta njegovih čunjesječnica u Nikomedovim konhoidama, koje su cirkularne krivulje 4. reda. Iz ovog dalje proizlazi, da ploha žarišta čunjesječnica Plückerova konoida prolazi apsolutnom čunjosječnicom.

Putujemo li točkama T_1, T_2 po pravcima t_1, t_2 tako, da veličina dužine $T_1 T_2$ ostane nepromijenjena, bit će i sve projekcije $T_1' T_2'$ tih dužina jednake. Svim ovim dužinama pridružene elipse c bit će sukladne, budući da su im projekcije jednake kružnice c'. Iz sukladnosti tih elipsi i jednakog nagiba njihovih velikih osi prema ravnini slike izlazi, da će se njihova realna žarišta nalaziti u dvjema direkcionim ravninama tog konoida, u kojima su dvije njegove realne izvodnice, a koje su od središnje ravnine jednako udaljene. Projekcije $S' F_1' = S' F_2'$ ekscentriciteta $e = SF_1 = SF_2$ su na dužinama $T_1' T_2'$ također jednake. Odavle direktno izlazi, da se sve točke F_1' i F_2' nalaze na dvije sukladne, koncentrične i za 90^0 međusobno zakrenute elipse, kojima je mala os jednaka duljini $T_1' F_1' = T_2' F_2'$, a velika os $T_1' F_2' = T_2' F_1'$. Budući da se sve točke F_1, odnosno F_2, nalaze u ravninama usporednim s ravninom slike, to se i ove točke nalaze u tim ravninama na elipsama, koje su sukladne i slično položene s prećašnjima. Vidimo dakle, da ravnine realnih ukrštenih parova izvodnica Plückerova konoida sijeku plohu žarišta čunjosječnica tog konoida u elipsama, kojih se osi nalaze u simetralnim ravninama tog konoida. U središnjoj ravnini Plückerova konoida prelazi ta elipsa u neizmjerno daleki dvostruki pravac opisane plohe žarišta. Iz činjenice, da su svi ravninski presjeci plohe žarišta čunjosječnica Plückerova konoida, koji prolaze njegovim torzalnim pravcima, Nikomedove konhoide, izlazi, da je takva ploha žarišta 4. reda. Torzalni pravci tog konoida su izolirani dvostruki pravci te plohe, budući da se u te pravce stegnula elipsa te plohe u svakoj torzalnoj ravnini. Već iz načina kako nastaje ploha žarišta čunjosječnica Plückerova konoida izlazi, da ona ima s njim zajedničke simetralne ravnine, te da se sastoji iz dva sukladna dijela, koji su međusobno zakrenuti za 90^0, a dijeli ih središnja ravnina tog konoida.

Svaki par realnih izvodnica u direkcionim ravninama konoida siječe elipse opisane plohe žarišta u tim ravninama u četiri točke, koje će u torzalnoj ravnini pasti u kuspidalne točke na torzalnim pravcima. U središnjoj ravnini bit će te točke u neizmjerno dalekim točkama okomitog para izvodnica tog konoida na neizmjerno dalekom dvostrukom pravcu naše plohe žarišta. Sva ovakva sjecišta čine geometrijsko mjesto neprekinuto povezanih onih žarišta čunjosječnica Plückerova konoida, koja se nalaze na njegovoj plohi. Sve ovakve točke leže dakle na prodornoj krivulji Plückerova konoida i plohe žarišta njegovih čunjosječnica, t. j. čine neku prostornu krivulju. Kao što znademo, prodorna krivulja ovih ploha je 12. reda. Torzalni pravci i neizmjerno daleki pravac konoida su međutim sastavni dio te prostorne krivulje i to kao dvostruki pravci naše plohe žarišta, dakle je onaj njen dio, koji nas zanima, 6. réda. Dobivamo dakle ovo:

Geometrijsko mjesto onih žarišta čunjosječnica Plückerova konoida, koja leže na tom konoidu, je prostorna krivulja 6. reda.

Iz oblika i međusobnog položaja Plückerova konoida i plohe žarišta njegovih čunjosječnica izlazi, da ta prostorna krivulja ima zajedničke simetralne ravnine i središnju ravninu s tim plohama, te da se također sastoji iz dva sukladna za 90^0 zakrenuta dijela. Kuspidalne točke konoida su konačne dvostruke točke te prostorne krivulje u kojima ona sama sebe dira, dok su u središnjoj ravnini njene dvije neizmjerno daleko dvostruke točke, u kojima međusobno okomiti par izvodnica konoida siječe dvostruki pravac naše plohe žarišta u toj ravnini.

(Primljeno 16. VI. 1954.)