VILIM NIČE

CISOIDALNE PLOHE RAVNINE I KUGLE, NJIHOVE PRATILICE I NEKE NJIHOVE GENERALIZACIJE

ÜBER GEWISSE ZISSOIDALE BEGLEITKURVEN UND BEGLEITFLÄCHEN ALLER ORDNUNGEN

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

ZAGREB 1955

Vilim Niče

CISOIDALNE PLOHE RAVNINE I KUGLE, NJIHOVE PRATILICE I NEKE NJIHOVE GENERALIZACIJE

Uvod. U ravnini slike neka su zadane dvije krivulje p, p_1 i točka O, a pravci točke O neka sijeku krivulje p, p_1 u točkama P, P_1. Odredimo li na svim tim pravcima točke O točke Q tako, da bude $OQ = OP_1 - OP$, onda ćemo geometrijsko mjesto q svih točaka Q zvati *»cisoida«* ili *»cisoidalna krivulja«* krivulja p_1 i p s obzirom na pol O. Ako su krivulje p, p_1 reda r, r_1, od kojih točkom O prolazi a puta krivulja p, a b puta krivulja p_1, te se osim toga sijeku te krivulje u c neizmjerno dalekih točaka, bit će red njihove cisoide jednak $[2\,rr_1 - (ar_1 + br + c)]$ *(1)*. U polu O imat će ta cisoida $r \cdot r_1$-struku točku. Neizmjerno daleke točke krivulja p, p_1 ostaju u takvoj cisoidalnoj transformaciji invarijantne, t. j. dobivena cisoida prolazi tim točkama, ako one nisu tim krivuljama zajedničke. ? $\infty - \infty$

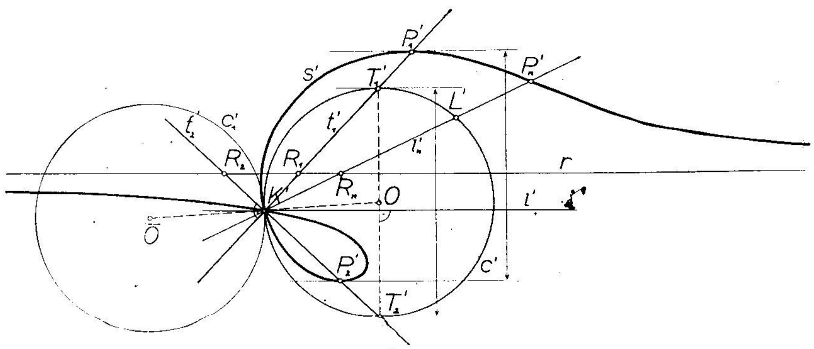
Uzmemo li u našim razmatranjima namjesto razlike zbroj, t. j. postavimo li da bude $O\bar{Q} = OP_1 + OP$, onda će tako dobivene točke $\bar{Q}$ ležati na krivulji $\bar{q}$, koju ćemo zvati *»pratilica«* cisoide q ili *»cisoidalna krivulja pratilica«* krivulja p_1, p s obzirom na pol O. Iz $OQ = OP_1 - OP$ izlazi, da je $OP_1 = OQ + OP$ i $OP = OP_1 - OQ$, a iz $O\bar{Q} = OP_1 + OP$ izlazi, da je $OP_1 = O\bar{Q} - OP$ i $OP = O\bar{Q} - OP_1$. Vidimo dakle, da je krivulja p_1 cisoidalna krivulja pratilica krivulja q, p, a istovremeno i cisoida krivulja $\bar{q}$, p, sve za isti pol O, dok je krivulja p cisoida krivulja p_1, q i cisoida krivulje $\bar{q}$, p_1, uz isti pol O. Ako smo krivulju $\bar{q}$ nazvali cisoidalnom pratilicom krivulja p_1, p, onda je ona i cisoidalna krivulja pratilica krivulja p, p_1, sve uz isti pol. Krivulju $\bar{q}$ možemo prema tome kratko zvati *»cisoidalna pratilica«* krivulja p, p_1 s obzirom na pol O.

Postanak krivulja q, $\bar{q}$ možemo zamisliti i ovako: Pomaknemo li na svakom pravcu pola O dužinu OP tako, da točka P dođe u točku P_1, onda će sve pomaknute točke O doći u točke Q, dakle će činiti krivulju q. Dođe li kod svakog takva pomaka točka O u točku P_1, onda će sve pomaknute točke P doći u točke $\bar{Q}$, dakle će ležati na krivulji $\bar{q}$. Posve se analogno naravski čini, ako iz krivulja q, $\bar{q}$ i p ovim cisoidalnim postupkom određujemo krivulju p_1, ili iz krivulja q, $\bar{q}$, p_1 određujemo tim postupkom krivulju p. Prebacimo li centralno oko pola O krivulju p na drugu stranu u položaj $\bar{p}$, onda će krivulja $\bar{q}$ biti cisoida krivulje $\bar{p}$ s obzirom na krivulju p_1 i pol O, dok će krivulja q biti njena krivulja pratilica, što se vrlo jednostavno zapaža u našem malo prije spomenutom kinematičkom načinu izvođenja tih krivulja. Odatle izlazi, da svaka cisoida i njena pratilica imaju isti red.

Odaberemo li namjesto krivulja p, p_1 bilo kakve dvije plohe φ, φ_1 u prostoru i po volji neku točku O, pa malo prije spomenuti postupak, gdje je $OQ = OP_1 - OP$, provedemo na svih ∞^2 pravaca točke O u prostoru, ako su P, P_1 probodišta tih pravaca s plohama φ, φ_1, ležat će sve točke Q na plohi, koju ćemo zvati *»cisoidalna ploha«* plohe φ_1 s obzirom na plohu φ i pol O. Sve točke $\bar{Q}$, za koje vrijedi $O\bar{Q} = OP_1 + OP$, ležat će na plohi pratilici spomenute cisoidalne plohe, koju ćemo zvati analogno kao kod krivulja *»cisoidalna ploha pratilica«* ploha φ, φ_1 s obzirom na pol O. Prebacimo li plohu φ centrički simetrično kroz pol O na suprotnu stranu u položaj $\bar{\varphi}$, postaje spomenuta cisoidalna ploha pratilica cisoidalna ploha plohe φ_1 s obzirom na plohu $\bar{\varphi}$ za isti pol O, dok prva cisoidalna ploha postaje cisoidalna ploha pratilica ove posljednje. Ako su plohe φ, φ_1 reda r, r_1, prodiru se one u prostornoj krivulji $r \cdot r_1$-tog reda. Spojnica svake točke te krivulje s polom O je tangenta cisoidalne plohe u polu O, dakle je ta točka O $r \cdot r_1$-struka točka te cisoidalne plohe, budući da joj je dirni stožac u toj točki $r \cdot r_1$-tog reda. Ako je točka O a-struka točka plohe φ i b-struka točka plohe φ_1, a te plohe imaju osim toga u beskonačnosti zajedničku krivulju c-tog reda, onda će cisoidalna ploha plohe φ_1 s obzirom na plohu φ i pol O, kao i obrnuto, imati red $[2\, rr_1 - (ar_1 + br + c)]$, budući da takav red ima svaki ravninski prijesjek ove cisoidalne plohe, kojega ravnina prolazi polom O. Na temelju spomenutog centrički simetričnog prebacivanja plohe φ oko pola O na suprotnu stranu izlazi, da ne samo cisoidalna ploha i njena pratilica imaju isti red, nego one obje prolaze i istom neizmjerno dalekom krivuljom.

U ovoj ćemo radnji najprije promatrati cisoidalne plohe pratilice jedne kugle i jedne ravnine, a onda i cisoidalne plohe pratilice tih pratilica i bilo koje ravnine uz bilo koji pol, pa tako dalje sve do po volji visokog reda takvih ploha. Prije prijelaza na takve cisoidalne plohe pratilice izvest ćemo neka razmatranja na cirkularnim krivuljama 3., 4. i viših redova u vezi s njihovim četverostrukim fokusom te ćemo pomoću izvedenih osobina na tim krivuljama, kao cisoidalnim pratilicama, otkriti i neke zajedničke osobine spomenutih cisoidalnih ploha pratilica, što će zapravo i biti konačni cilj naših razmatranja u ovoj radnji.

I. Okomiti pravci t_1', t_2' na sl. 1. neka su projekcije torzalnih pravaca t_1, t_2 PLÜCKEROva konoida u smjeru njegova dvostrukog pravca k na jednu direkcionu ravninu. Sjecište K' tih pravaca je prema tome takva projekcija dvostrukog pravca $k$tog konoida. Poznato je: 1. Svaka čunjosječnica (elipsa) na PLÜCKEROvu konoidu siječe njegov dvostruki pravac. 2. Ravnina svake te čunjosječnice prolazi jednom izvodnicom tog konoida. 3. Sve se te čunjosječnice projiciraju u smjeru dvostrukog pravca na direkcionu ravninu u kružnice, a svi ravninski prijesjeci u cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga. Kružnica c' na sl. 1. neka je slika takve



Slika 1. — Abb. 1.

jedne čunjosječnice c PLÜCKEROva konoida. Tangente te elipse u njenim sjecištima T_1, T_2 s torzalnim pravcima t_1, t_2 su tragovi ravnine te čunjosječnice u torzalnim ravninama. Radi $t_1' \perp t_2'$ bit će spojnica $T_1' T_2'$ promjer kružnice c', dakle su tangente te kružnice u točkama T_1', T_2' okomite na tom promjeru. Izvodnica i, koja leži u ravnini elipse c, mora biti usporedna s tim tangentama, dakle je $i' \perp T_1' T_2'$, budući da se te tangente i izvodnica i sijeku na neizmjerno dalekom jednostrukom pravcu tog konoida. Pretpostavimo, da je ravnina naše slike direkciona ravnina konoida, koja prolazi izvodnicom i, tako da je izvodnica i trag ravnine čunjosječnice c u ravnini slike. Pomaknimo sada ravninu naše čunjosječnice c usporedno u novi položaj, tako da ta nova ravnina ϱ siječe ravninu slike u nekom tragu $r \parallel i'$. Sjecišta tog traga r s projekcijama t_1', t_2' torzalnih pravaca t_1, t_2 označimo s R_1, R_2. Ravnina ϱ siječe naš konoid u krivulji 3. reda roda nultoga, koja će se u smjeru dvostrukog pravca projicirati na našu direkcionu ravninu slike u cirkularnu krivulju s' 3. reda, s točkom K' kao dvostrukom točkom. Iz prostornih odnosa tih usporednih prijesjeka odmah se zapaža, da će za projekcije P_1', P_2' sjecišta torzalnih pravaca s ravninom ϱ na pravcima t_1, t_2 vrijediti ovo: $K'P_1' = K'T_1' + K'R_1$, odnosno $K'P_2' = K'T_2' + K'R_2$ (dužina KR_2 ima suprotan predznak od dužine KT_2). Projekcija i_n' bilo koje izvodnice i_n našeg konoida neka siječe kružnicu c' u točki L', a trag r u točki R_n. Budući da su izvodnice našeg konoida usporedne s ravninom slike, dade se iz prostornih odnosa lako zaključiti, da će točka P_n' na projekciji i_n' izvodnice i_n, za koju vrijedi $K'P_n' = K'L' + K'R_n$, biti projekcija probodišta te izvodnice s ravninom ϱ, dakle će se nalaziti na krivulji s'. Vidimo dakle, da je krivulja s' cisoidalna krivulja pratilica kružnice c' i pravca r s obzirom na točku K' kao pol.

Poznato je, da se usporedni ravninski prijesjeci PLÜCKERova konoida, od kojih se uvijek jedan raspada u pravac i elipsu, projiciraju u smjeru dvostrukog pravca na svaku direkcionu ravninu u cirkularne krivulje sa zajedničkom dvostrukom točkom i sa zajedničkim četverostrukim fokusom *(2)*. Jedna od tih cirkularnih krivulja raspada se uvijek u kružnicu i pravac, dakle je središte te kružnice zajednički četverostruki fokus svih tih cirkularnih krivulja. Budući da su na našoj slici krivulje c' i s' upravo takve opisane projekcije dvaju usporednih ravninskih prijesjeka našeg PLÜCKERova konoida, to je središte O kružnice c' četverostruki fokus unikurzalne cirkularne krivulje s'.

Bilo koja cirkularna krivulja s' 3. reda roda nultoga neka je osnovka uspravnog valjka 3. reda, koji presijecimo u krivulji s 3. reda roda nultoga tako, da ravnina prijesjeka bude usporedna s asimptotom krivulje s'. Dvostruka točka krivulje s bit će na dvostrukoj izvodnici tog valjka. Sve okomice dvostruke izvodnice ovog valjka, koje ju sijeku, a koje prolaze točkama krivulje s, činit će uspravan konoid 3. reda. Ovo proizlazi odatle, što ta dvostruka izvodnica, kao ravnalica konoida, prolazi dvostrukom točkom krivulje s, koja je također ravnalica tog konoida, dok je neizmjerno daleki pravac, kao treća ravnalica, siječe u jednoj običnoj točki. Iz međusobnog položaja krivulja s i s' izlazi, da je cirkularna krivulja s' projekcija krivulje s u smjeru dvostrukog pravca na direkcionu ravninu. Odatle dalje izlazi, da taj valjak ima dvije neizmjerno daleke izotropne izvodnice, koje će ostati i izvodnice našeg konoida, budući da sijeku sve tri njegove ravnalice. Vidimo dakle, da taj uspravan konoid 3. reda ima par neizmjerno dalekih izotropnih izvodnica, dakle je to PLÜCKERov konoid. Pomaknemo li sada ravninu krivulje s usporedno u izvodnicu i ovog konoida, koja prolazi neizmjerno dalekom točkom krivulje s, t. j. koja je usporedna s asimptotama krivulja s i s', sjeći će ona u novom položaju naš konoid u toj izvodnici i jednoj elipsi, koja će se projicirati u kružnicu u istom smjeru i na istu ravninu kao krivulja s u krivulju s'. Središte te kružnice bit će dakle četverostruki fokus, a cirkularna unikurzalna krivulja s' bit će cisoidalna krivulja pratilica te kružnice i asimptote krivulje s' uz njenu dvostruku točku kao pol. Budući da mi sa svakom cirkularnom krivuljom 3. reda roda nultoga možemo učiniti to isto, to za svaku cirkularnu krivulju 3. reda roda nultoga vrijedi ovo:

Svaka cirkularna krivulja 3. reda roda nultoga je cisoidalna krivulja pratilica svoje asimptote i one kružnice, koja prolazi dvostrukom točkom te cirkularne krivulje sa središtem u njenom četverostrukom fokusu, uz njenu dvostruku točku kao pol.

Promjer te kružnice jednak je uvijek razmaku između tangenata cirkularne krivulje usporednih s njenom asimptotom, što direktno izlazi iz usporednog položaja ravnina krivulja s i c na spomenutom PLÜCKEROVU konoidu.

II. Pretpostavimo, da je krivulja s' u ravnini slike cirkularna krivulja 4. reda roda nultoga, s jednom konačnom i jednom neizmjerno dalekom dvostrukom točkom, u kojoj ta krivulja sama sebe dodiruje. Provedemo li sada jednaka prostorna razmatranja kao malo prije kod cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga, bit će izvedeni konoid uspravan konoid 4. reda, budući da su mu ravnalice dva pravca i jedna ravninska krivulja 4. reda roda nultoga, kojoj ti pravci prolaze dvostrukim točkama. Ravnina krivulje s odabrana je i ovdje usporedno s dvostrukom asimptotom krivulje s'. Spojnica konačne dvostruke točke s neizmjerno dalekom takvom točkom krivulje s' (usporednica s dvostrukom asimptotom) je okomita projekcija na ravninu slike dvostruke izvodnice tog konoida. Budući da je i ovdje cirkularna krivulja s' projekcija krivulje s u smjeru dvostrukog pravca na direkcionu ravninu, imat će i taj uspravan konoid 4. reda, analogno kao malo prije onaj 3. reda, dvije neizmjerno daleke izotropne izvodnice. Pomaknemo li prema tome i ovdje ravninu krivulje s usporedno u onu izvodnicu (dvostruku) konoida, koja prolazi neizmjerno dalekom dvostrukom točkom te krivulje, dakle usporednu s dvostrukim asimptotama krivulja s i s', sjeći će ona taj konoid u toj dvostrukoj izvodnici i u krivulji 2. stepena, koja će se u opisanom smjeru na direkcionu ravninu slike projicirati u kružnicu. Budući da i ovdje imaju opisane projekcije na direkcionu ravninu usporednih ravninskih prijesjeka toga konoida iz istog razloga zajednički četverostruki fokus, bit će središte te kružnice četverostruki fokus cirkularne krivulje s'. Iz jednakih prostornih odnosa kao kod konoida 3. reda i ovdje prema tome izlazi, da je cirkularna krivulja s' 4. reda roda nultoga cisoidalna krivulja pratilica svoje dvostruke asimptote i one kružnice, kojoj je središte u četverostrukom fokusu te krivulje, a promjer joj je jednak razmaku tangenata usporednih s dvostrukom asimptotom, za konačnu dvostruku točku kao pol. Budući da naša razmatranja vrijede za svaku cirkularnu krivulju 4. reda opisanog tipa, to dobivamo i ovakav stavak:

Svaka je cirkularna krivulja 4. reda roda nultoga s jednom konačnom i jednom neizmjerno dalekom dvostrukom točkom, u kojoj ta krivulja sama sebe dodiruje, cisoidalna krivulja pratilica svoje dvostruke asimptote i one kružnice, kojoj je središte u četverostrukom fokusu te cirkularne krivulje, a promjer joj je jednak razmaku tangenata te cirkularne krivulje usporednih s njenom dvostrukom asimptotom, uz konačnu njenu dvostruku točku kao pol.

III. Spomenuli smo u uvodu, da će cisoidalna krivulja pratilica $\overline{q}$ cisoide q postati cisoida krivulje p_1 s obzirom na krivulju p za isti pol O, ako je krivulja $\overline{p}$ centrički simetrična krivulji p s obzirom na središte O, a kojoj će krivulja q tada biti cisoidalna krivulja pratilica. Naša krivulja

s' na sl. 1. bit će dakle cisoida, s obzirom na svoju asimptotu, one kružnice c_1', koja je simetrično prebačena kružnica c' oko točke K' na suprotnu stranu uz isti pol K'. Budući da svaku cisoidalnu krivulju pratilicu neke kružnice i nekog pravca, za bilo koji pol, možemo smatrati projekcijom jednog ravninskog prijesjeka PLÜCKERova konoida ili njemu analognog konoida 4. reda, ako pol leži ili ne leži na kružnici, to smo za četverostruke fokuse takvih krivulja pratilica i njihove cisoide dobili ovu, uglavnom poznatu, osobinu:

Četverostruki fokus svake cisoide neke kružnice i nekog pravca nalazi se u točki, koja spojena sa središtem te kružnice daje dužinu, koju raspolavlja dvostruka točka te cisoide, dok se četverostruki fokus cisoidalne krivulje pratilice svake ove cisoide nalazi u središtu te kružnice.

IV. PLÜCKERov konoid u toč. I. određen je ravnalicama c, k i položajem direkcionih ravnina, kojim je određen njegov neizmjerno daleki jednostruki pravac kao treća ravnalica. Uz isti neizmjerno daleki pravac, t. j. uz isti položaj direkcionih ravnina, odaberimo sada kao drugu ravnalicu krivulju s, a pravac k pomaknimo usporedno u pravac k_1 tako, da ovaj ne siječe krivulju s, a prema tome niti cirkularnu krivulju s'. Projekciju tog pravca, koja je izvan krivulje s', označimo s K_1'. Tim trima ravnalicama određeni konoid je 5. reda s konačnim dvostrukim i neizmjerno dalekim trostrukim pravcem, budući da neizmjerno daleki pravac siječe krivulju s. Svakom točkom konačnog dvostrukog pravca prolazi jedan par realnih ili konjugirano imaginarnih izvodnica, a probodištem pravca k_1 s ravninom krivulje s prolazi dvostruka izvodnica tog konoida u toj ravnini. Neizmjerno dalekom točkom konačnog dvostrukog pravca prolazi par izotropnih izvodnica ovog konoida, budući da ove izvodnice prolaze sjecištima cirkularne krivulje s' s neizmjerno dalekim trostrukim pravcem, t. j. apsolutnim točkama ravnine te krivulje. Projekcije svih usporednih ravninskih prijesjeka u smjeru konačnog dvostrukog pravca na direkcionu ravninu bit će i ovdje cirkularne krivulje, i to 5. reda, sa zajedničkim četverostrukim fokusom, budući da se zajednička sjecišta neizmjerno dalekih izotropnih izvodnica s ravninama svih ovih usporednih prijesjeka projiciraju u opisanom smjeru u apsolutne točke ravnine slike, u kojima projekcije tih krivulja diraju isti par izotropnih pravaca. Taj par zajedničkih izotropnih tangenata čine presječnice ravnine cirkularne krivulje s' s konjugirano imaginarnim dirnim ravninama našeg konoida, u spomenutim zajedničkim sjecištima njegovih izotropnih izvodnica s ravninama usporednih ravninskih prijesjeka. Onaj između tih ravninskih prijesjeka, koji prolazi dvostrukom izvodnicom, a to je naša krivulja s, raspada se u tu krivulju i dvostruku izvodnicu. Dakle se četverostruki fokusi svih tih projekcija paralelnih prijesjeka nalaze u četverostrukom fokusu naše cirkularne krivulje s'. Budući da su i kod ovog našeg konoida 5. reda sve izvodnice usporedne s ravninom slike, vidi se i ovdje na temelju posvema istih prostornih odnosa kao kod PLÜCKERova konoida u toč. II. i opisanog analognog konoida 4. reda u toč. III., da su cirkularne četverostruko konfokalne opisane projekcije 5. reda naših usporednih ravninskih prijesjeka s ravninom krivulje s cisoidalne krivulje pratilice naše cirkularne krivulje s' i jednog pravca, koji je usporedan s dvostrukom izvodnicom našeg konoida, za točku K_1' kao pol. Iz naših razmatranja u uvodu jasno izlazi, da su sve te četverostruko konfokalne cirkularne krivulje 5. reda cisoide one cirkularne krivulje $\overline{s}'$, koju dobivamo prebacivanjem svake točke krivulje s' preko točke K_1' na suprotnu stranu, s obzirom na isti pravac i isti pol. Četverostruki fokus krivulje $\overline{s}'$ nalazi se naravski u četverostrukom fokusu krivulje s', koji je na isti način prebačen.

Presiječemo li u toč. I. opisani uspravan valjak 3. reda, kojemu je osnovka cirkularna krivulja s' 3. reda, bilo kojom ravninom u krivulji s_1, pa odaberemo neki pravac k usporedan s izvodnicama tog valjka, ali koji mu nije izvodnica, pa uz istu direkcionu ravninu sastavimo iz tih ravnalica novi konoid, bit će on 6. reda s dva trostruka pravca, od kojih je jedan u neizmjernosti i s jednom trostrukom izvodnicom. Budući da je okomit prijesjek tog valjka cirkularna krivulja, imat će i on par neizmjerno dalekih izotropnih izvodnica, koje ostaju izvodnice i na svakom upravo spomenutom konoidu. Budući da je krivulja s' projekcija krivulje s_1 u smjeru konačnog trostrukog pravca k na direkcionu ravninu, vrijedit će i ovdje posve isti odnosi kao ranije. Svi usporedni ravninski prijesjeci ovog konoida s ravninom krivulje s_1 projicirat će se u opisanom smjeru na direkcionu ravninu kao četverostruko konfokalne cirkularne krivulje 6. reda, od kojih se je jedna (projekcija s' krivulje s_1) raspala u krivulju s' i projekciju trostruke izvodnice. Sve su te cirkularne krivulje 6. reda i opet cisoidalne krivulje pratilice cirkularne krivulje s' i jednog pravca, koji je usporedan s trostrukom izvodnicom konoida, uz neki pol izvan krivulje s'. Sve su te pratilice i ovdje cisoide već spomenute cirkularne krivulje s'.

Potražimo li sada nove cisoidalne krivulje pratilice već izvedenih cisoidalnih krivulja pratilica 4., 5. i 6. reda, uz bilo koji pravac i bilo koji pol na krivuljama ili izvan tih krivulja, dobit ćemo nove cisoidalne cirkularne krivulje pratilice 7., 8., 9., 10., 11. i 12. reda, koje će sve zajedno imati opet isti četverostruki fokus u četverostrukom fokusu one krivulje, kojoj su te krivulje cisoidalne pratilice. Sve se to može dokazati jednakim prostornim razmatranjima na analognim konoidima odgovarajućih redova. Na isti način mogu se iz takvih novih cisoidalnih krivulja pratilica izvesti njihove daljnje cisoidalne krivulje pratilice uz bilo koji pravac i pol, koje će biti 13., 14., ..., 24. reda, opet s istim osobinama, pa tako dalje sve do po volji visokog reda. Iz naših razmatranja izlazi prema tome ovo:

Cisoidalne krivulje pratilice bilo koje cirkularne krivulje i bilo kojeg pravca uz bilo koji pol u njihovoj ravnini imaju uvijek s tom cirkularnom krivuljom zajednički četverostruki fokus.

Kao što smo cirkularnu krivulju s' postavili kao osnovku uspravnog valjka 3. reda, možemo i kružnicu c' na sl. 1. postaviti kao osnovku uspravnog kružnog valjka, kojemu su također neizmjerno daleke izvodnice izotropni pravci. Svaki ravninski prijesjek c_n tog valjka dat će nam jednu ravnalicu, a svaka njegova izvodnica drugu ravnalicu novog PLÜCKEROVA konoida, za kojega usporedne ravninske prijesjeke s ravninom krivulje c_n vrijedi isto što i za opisani konoid. Ako druga ravnalica nije izvodnica tog valjka, nego bilo koji pravac usporedan s tim izvodnicama, imat ćemo već opisani uspravni konoid 4. reda, a dobivene cirkularne četverostruko konfokalne cisoidalne krivulje pratilice bit će 4. reda roda nultoga. Vidimo dakle, da na taj način svaki pravac u ravnini kružnice c' daje s njom, uz neki po volji odabrani pol, jednu cisoidalnu krivulju pratilicu. Dobivamo dakle i ovaj stavak:

Cirkularne cisoidalne krivulje pratilice 3. i 4. reda neke kružnice c *i bilo kojeg pravca uz bilo koji pol, te na isti način i uz iste uvjete nastale cirkularne cisoidalne krivulje pratilice 5., 6., 7. i 8. reda iz proizvedenih krivulja pratilica 3. i 4. reda, kao i na isti način i uz iste uvjete proizvedene cirkularne cisoidalne krivulje pratilice 9., 10., ..., 15. i 16. reda iz posljednjih dobivenih pratilica i tako sve ostale na taj način proizvedene cirkularne cisoidalne krivulje pratilice svih predašnjih pratilica sve do neizmjerno velikog reda imaju uvijek zajednički četverostruki fokus u središtu početne kružnice* c.

Drugim riječima izraženo taj stavak znači, da sve tako izvedene cisoidalne krivulje pratilice do neizmjerno velikog reda, dobivene iz jedne kružnice i bilo kojeg pravca i bilo kojeg pola, diraju tu kružnicu u apsolutnim točkama njene ravnine, t. j. one se međusobno imaginarno diraju u tim točkama.

V. Namjesto bilo kakvih ploha φ, φ_1 u uvodu odaberimo sada neku ravninu ϱ i kuglu Φ. Pol P neka se nalazi negdje na toj kugli. Učinimo li sada po postupku opisanom u uvodu cisoidalnu plohu ψ^3 kugle Φ s obzirom na ravninu ϱ i pol P i njoj pridruženu cisoidalnu plohu pratilicu $\overline{\psi}^3$, bit će te plohe 3. reda, budući da je pol P obična točka na plohi kugle Φ. U svakoj ravnini točke P dešavat će se ono, o čemu smo govorili u točkama I.–IV., t. j. svi ravninski prijesjeci ploha ψ^3 i $\overline{\psi}^3$, kojih ravnine prolaze točkom P, bit će cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga. Plohe ψ^3 i $\overline{\psi}^3$ prolaze dakle apsolutnom čunjosječnicom, t. j. svi ravninski prijesjeci su im cirkularni. Poznata je činjenica, da svi cirkularni ravninski prijesjeci ploha, koje prolaze apsolutnom čunjosječnicom, sa usporednim ravninama, imaju četverostruke fokuse na jednom pravcu, koji je okomit na tim usporednim ravninama *(3)*. Svaki ravninski prijesjek plohe ψ^3, koji prolazi točkom P, bit će cisoida presječne kružnice kugle Φ s obzirom na presječnicu ravnine ϱ s tom ravninom, za točku P kao pol. Ravninski prijesjek plohe $\overline{\psi}^3$ s tom istom ravninom bit će cisoidalna krivulja pratilica te iste presječnice i presječne kružnice uz isti pol. Četverostruki fokus te cisoidalne krivulje pratilice nalazi se u središtu O te presječne kružnice. Četverostruki fokus O spomenute cisoide u toj ravnini, nalazit će se na spojnici PO simetrično na suprotnoj strani s obzirom na točku P.

Presiječemo li našu cisoidalnu plohu ψ^3 i njenu cisoidalnu plohu pratilicu $\overline{\psi}^3$ bilo kakvom ravninom α, dobit ćemo, na temelju malo prije spomenutog, četverostruke fokuse tih ravninskih cirkularnih prijesjeka ovako: Polom P postavimo usporednu ravninu $\alpha_1 \parallel \alpha$ s ravninom tog prijesjeka, pa njome presijecimo kuglu Φ u kružnici, koje središtem O postavimo okomit pravac l na ravnine $\alpha_1 \parallel \alpha$. Probodište S te okomice s ravninom α bit će četverostruki fokus cirkularnog prijesjeka plohe ψ^3 s ravninom α. Prebacimo li točku O na spojnici PO oko točke P na suprotnu stranu u točku $\overline{O}$, pa točkom $\overline{O}$ postavimo također okomit pravac $\overline{l}$ na ravninu α, bit će njegovo probodište $\overline{S}$ s tom ravninom četverostruki fokus cirkularnog prijesjeka plohe $\overline{\psi}^3$ s ravninom α. Budući da okomice postavljene u središtima presječnih kružnica neke kugle na njihove ravnine prolaze središtem te kugle, to znači, da svi pravci l, za sve ravnine α u prostoru, prolaze središtem F kugle Φ, dakle čine snop pravaca. Pravac $\overline{l}$ dobili smo zapravo tako, da smo pravac l u ravnini (lP) prebacili oko točke P centrički simetrično na suprotnu stranu. Odatle izlazi, da i svi pravci $\overline{l}$ prolaze jednom točkom $\overline{F}$, koja se nalazi na spojnici PF simetrično s druge strane točke P. Vidimo dakle, da su točke $\overline{F}$, F vrhovi izotropnih dirnih stožaca cisoidalne plohe ψ^3 i njene cisoidalne plohe pratilice $\overline{\psi}^3$ duž apsolutne čunjosječnice. Drugim riječima, duž apsolutne čunjosječnice diraju se kugla Φ i ploha $\overline{\psi}^3$, te jednaka kugla Φ_1 kugli Φ, koja je opisana oko središta $\overline{F}$, s plohom ψ^3. Kao što znademo iz uvoda, ploha $\overline{\psi}^3$ je cisoidalna ploha kugle Φ_1 s obzirom na ravninu ϱ i isti pol P, kojoj je, kao što znademo, ploha ψ^3 u tom slučaju cisoidalna ploha pratilica.

Odaberemo li pol P bilo gdje u kugli ili izvan kugle Φ, ostat će sva naša razmatranja nepromijenjena s tom razlikom, da će cisoidalna ploha ψ^4 i njena cisoidalna ploha pratilica $\overline{\psi}^4$ biti četvrtog reda. Budući da je uvijek $FP = \overline{F}P$, a kod svake cisoidalne plohe 3. reda kugle Φ s obzirom na neku ravninu je pol P na plohi te kugle, to će se kod cisoidalnih ploha 3. reda kugle, s obzirom na bilo kakvu ravninu, vrhovi njihovih izotropnih dirnih stožaca nalaziti na jednoj koncentričnoj kugli s kuglom Φ dvostrukog polumjera. Na temelju naših razmatranja dobivamo prema tome ovo:

1. *Cisoidalne plohe neke kugle, bez obzira na koju ravninu i pol u prostoru, prolaze apsolutnom čunjosječnicom, duž koje svaku od njih dira izotropan stožac, kojemu se realan vrh nalazi na spojnici pola (dvostruke točke te cisoidalne plohe) sa središtem te kugle, simetrično na suprotnoj strani tog pola. Vrhovi ovakvih dirnih izotropnih stožaca duž apsolutne čunjosječnice kod svih ovakvih cisoidalnih ploha 3. reda nalaze se na onoj kugli koncentričnoj sa zadanom, koja ima dvostruki promjer.*

2. *Cisoidalne plohe pratilice 3. i 4. reda neke kugle i svake ravnine i svakog pola u prostoru imaju zajednički izotropni dirni stožac duž apsolutne čunjosječnice kojom prolaze, a kojega vrh se nalazi u središtu te kugle.*

Ravninski prijesjeci svih takvih cisoidalnih ploha pratilica zadane kugle bit će prema tome četverostruko konfokalne cirkularne krivulje 3. i 4. reda. Zadamo li pol P i ravninu ϱ u zgodnom položaju s obzirom na kuglu Φ, može se dogoditi, da točke F, $\overline{F}$ padnu na plohe $\overline{\psi}^3$, ψ^3 odnosno $\overline{\psi}^4$, ψ^4, pa se na taj način može doći do strofoidalne vrste ploha 3. i 4. reda, među kojima smo one 3. reda već izveli na drugi način i na drugom mjestu *(4)*.

Naše cisoidalne plohe 3. i 4. reda, kao i njihove cisoidalne plohe pratilice, imaju u neizmjernosti osim apsolutne čunjosječnice još i jedan realan pravac, koji se podudara s neizmjerno dalekim pravcem ravnine ϱ, budući da u našoj cisoidalnoj transformaciji taj pravac ostaje invarijantan. Kod cisoidalnih ploha 3. reda i njihovih ploha pratilica diraju te plohe duž tog pravca svoju ravninu ϱ, dok kod cisoidalnih ploha 4. reda i njihovih ploha pratilica diraju te plohe duž tog pravca same sebe, tako da su se kod takvih ploha 3. reda u taj pravac stegnula dva neizmjerno bliza pravca te plohe, dok je kod takvih ploha 4. reda taj neizmjerno daleki pravac dvostruk. Kod cisoidalnih ploha i njihovih pratilica 3. reda ostat će u našoj cisoidalnoj transformaciji invarijantna i presječnica ravnine ϱ s dirnom ravninom kugle Φ u polu P, budući da sve tangente kugle Φ u točki P sijeku tu kuglu u paru neizmjerno blizih točaka, dakle će i tim točkama cisoidalno transformirane slike s obzirom na ravninu ϱ biti neizmjerno blizu toj ravnini, t. j. nalazit će se u presječnici s ravninom tih tangenata. Ta presječnica nalazi se prema tome također na cisoidalnoj plohi i njenoj plohi pratilici 3. reda. Svi ravninski presjeci takvih cisoidalnih ploha 3. i 4. reda i njihovih ploha pratilica, kojih ravnine prolaze tim pravcima, jesu kružnice. U dirnim ravninama tih ploha, koje prolaze tim pravcima, raspadaju se te kružnice u par izotropnih izvodnica, koje se sijeku u njihovim diralištima. U tim diralištima imaju dakle te plohe kružne točke. Tim pravcima i dvostrukom točkom P položene ravnine sadrže u sebi također izotropan par pravaca takvih ploha, budući da su se i u takvim ravninama presječne kružnice raspale u par izotropnih pravaca.

VI. Namjesto kugle Φ uzmimo sada cisoidalnu plohu pratilicu $\overline{\psi}^3$ cisoidalne plohe ψ^3 i neku po volji u prostoru odabranu ravninu ϱ_1, a kao pol P_1 neka bude jedna točka na toj plohi izvan njene dvostruke točke P. Iz ovih elemenata nastala cisoidalna ploha ψ^5 i njena cisoidalna ploha pratilica $\overline{\psi}^5$ bit će 5. reda, budući da pol P_1 leži na plohi $\overline{\psi}^3$. Budući da su cisoide i njihove cisoidalne krivulje pratilice svih ravninskih prijesjeka plohe $\overline{\psi}^3$, koji prolaze točkom P_1, s obzirom na presječnice tih ravnina s ravninom ϱ_1 i točku P_1 kao pol, cirkularne krivulje, to i plohe $\overline{\psi}^5$, ψ^5 prolaze apsolutnom čunjosječnicom, dakle će i svi njihovi ravninski prijesjeci biti cirkularni. Neizmjerno daleki pravac ravnine ϱ_1 bit će trostruki pravac tih ploha, duž kojega se te plohe dva puta dodiruju, a presječnica dirne ravnine plohe $\overline{\psi}^3$ u točki P_1 s ravninom ϱ_1 bit će običan pravac ploha $\overline{\psi}^5$ i ψ^5. Sve ravnine neizmjerno dalekog pravca sjeći će te plohe opet u kružnicama, dok će ih ravnine konačnog pravca sjeći u cirkularnim krivuljama 4. reda.

Presijecimo sada plohu $\overline{\psi}^5$ bilo kojom ravninom β, a polom P_1 postavimo s njom usporednu ravninu β_1. Ove dvije ravnine sjeći će tu plohu u cirkularnim krivuljama, kojih će četverostruki fokusi ležati na pravcu l_1 okomitom na tim ravninama. To i ovdje proizlazi iz poznate činjenice, da obje presječne krivulje imaju zajednički par apsolutnih točaka, u kojima diraju isti par izotropnih dirnih ravnina plohe $\overline{\psi}^5$, koje se sijeku u spomenutoj okomici l_1. Postavimo međutim sada dvostrukom točkom P plohe $\overline{\psi}^3$ ravninu β_2 usporednu s ravninama β_1 i β. Presječne krivulje kugle Φ i plohe $\overline{\psi}^3$ s tom ravninom imaju zajednički četverostruki fokus. Četverostruki fokus ravninskog prijesjeka plohe $\overline{\psi}^3$ s ravninom β_1, koja je usporedna s ravninom β_2, nalazi se na okomici tih ravnina, koja prolazi četverostrukim fokusom presječne krivulje plohe $\overline{\psi}^3$ s ravninom β_2. Na temelju razmatranja u toč. V. nadalje znademo, da presječne krivulje ploha $\overline{\psi}^3$ i $\overline{\psi}^5$ s ravninom β_1 imaju zajednički četverostruki fokus. Pravac l_1, postavljen u tom fokusu okomito na ravnine $\beta_1 \parallel \beta_2$, probada, kao što smo vidjeli, ravninu β u četverostrukom fokusu presječne krivulje plohe $\overline{\psi}^5$ s tom ravninom. Vidimo dakle, da se svi ti četverostruki fokusi u ravninama β, β_1 i β_2 nalaze zapravo na našem pravcu l_1, t. j. i taj pravac prolazi središtem F kugle Φ. Budući da smo ravninu β uzeli bilo kako u prostoru, izlazi, da se četverostruki fokusi ravninskih prijesjeka i plohe $\overline{\psi}^5$ s usporednim ravninama nalaze na pravcima okomitim na tim ravninama, koji prolaze središtem F kugle Φ. Odatle dalje proizlazi, da kuglu Φ i cisoidalne plohe pratilice $\overline{\psi}^3$ i $\overline{\psi}^5$ duž apsolutne čunjosječnice, koja leži na tim plohama, dira isti izotropan stožac. Plohe Φ, $\overline{\psi}^3$ i $\overline{\psi}^5$ imaju prema tome u prostoru analogan položaj, kao koncentrične kugle.

Odaberemo li sada točku P_1 negdje izvan plohe $\overline{\psi}^3$, pa izvršimo sasvim ista razmatranja, bit će dobivena cisoidalna ploha ψ^6 i njena cisoidalna ploha pratilica $\overline{\psi}^6$ šestoga reda, a sve ostalo ostaje kao i malo prije.

Kada bismo sada negdje na plohama pratilicama $\overline{\psi}^4$, $\overline{\psi}^5$ ili $\overline{\psi}^6$ ili izvan njih odabrali novu točku P_2 kao pol i bilo kakvu ravninu ϱ, dobili bismo cisoidalne plohe $\psi^7, \psi^8, \ldots, \psi^{12}$ i njihove cisoidalne plohe pratilice $\overline{\psi}^7, \overline{\psi}^8, \ldots, \overline{\psi}^{12}$, koje bi bile 7., 8., ..., 12. reda, a za koje bismo dobili opet na temelju jednakih razmatranja, da četverostruki fokusi ravninskih prijesjeka ovih cisoidalnih ploha pratilica s usporednim ravninama leže na pravcima, koji su okomiti na tim ravninama, a svi prolaze središtem F kugle Φ. Sve takve plohe pratilice dira prema tome isti izotropan stožac duž apsolutne čunjosječnice njima zajedničke, koji duž te čunjosječnice dira i kuglu Φ. Nastavimo li ovako dalje i s cisoidalnim plohama pratilicama $\overline{\psi}^7$, $\overline{\psi}^8$, ..., $\overline{\psi}^{12}$ i onda dalje s cisoidalnim plohama pratilicama nastalih pratilica i tako dalje sve do po volji visokog reda takvih cisoidalnih ploha pratilica, dobit ćemo uvijek isto, t. j. četverostruki fokusi svih ravninskih prijesjeka takvih cisoidalnih ploha pratilica s usporednim ravninama leže na pravcima, koji su okomiti na tim ravninama, a prolaze središtem kugle Φ. To jest, sve takve cisoidalne plohe pratilice diraju zajedno s kuglom Φ isti izotropni stožac duž apsolutne čunjosječnice, koja se nalazi na svim takvim plohama. Sva naša razmatranja možemo prema tome sažeti u ovom stavku:

Proizvedemo li cisoidalne plohe pratilice neke kugle i bilo koje ravnine uz bilo koji pol, pa onda proizvedemo cisoidalne plohe pratilice proizvedenih cisoidalnih ploha pratilica i bilo koje ravnine uz bilo koji pol, te tako nastavimo proizvoditi cisoidalne plohe pratilice sve do po volji visokog reda, imat će sve tako nastale cisoidalne plohe pratilice svih redova zajednički dirni izotropni stožac duž apsolutne čunjosječnice, koja se nalazi na svim tim plohama.

Oblik, singulariteti i degeneracije tako proizvedenih cisoidalnih ploha i njihovih cisoidalnih ploha pratilica mogu biti raznovrsni, a ovise uglavnom o tome, gdje smo i kako smo odabrali ravninu i pol s obzirom na plohu $\overline{\psi}^n$. Za istraživanja u tom smislu nije međutim postojala namjera u ovoj radnji.

VII. Bilo koji ravninski prijesjek c uspravnog kružnog valjka i njegova os k neka su ravnalice uspravnog konoida 4. stepena, kojemu su direkcione ravnine okomite na tu os. Neizmjerno daleki izotropan par izvodnica tog valjka su izvodnice i tog konoida, a odatle dalje izlazi, da će se svi ravninski prijesjeci tog konoida projicirati u smjeru dvostrukog pravca na direkcione ravnine u cirkularne krivulje 4. reda. Nekom ravninom, koja je usporedna s ravninom elipse c, presijecimo taj konoid u krivulji s. Dvostruka asimptota r te krivulje bit će usporedna s dvostrukom izvodnicom i našeg konoida u njegovoj središnjoj ravnini. Budući da se ravnina krivulje s može dobiti usporednim pomakom ravnine krivulje c, bit će projekcija s' krivulje s u opisanom smislu NIKOMEDova konhoida projekcije r' asimptote r i projekcije K' dvostrukog pravca k kao pola, budući da se elipsa c u istom smislu na ravninu slike projicira kao kružnica c'. Poznate dužine na zrakama pola K', nanošene od pravca r', jednake su polumjeru kružne projekcije c' elipse c. Poznato je, da su projekcije usporednih ravninskih prijesjeka našeg konoida, u smjeru dvostrukog pravca na direkcione ravnine, cirkularne krivulje 4. reda sa zajedničkim četverostrukim fokusom. Izlazi dakle, da će se četverostruki fokus krivulje s' nalaziti u središtu kružnice c', dakle u dvostrukoj točki te cirkularne krivulje 4. reda. Budući da mi naša razmatranja možemo provesti i obrnutim smjerom, polazeći od NIKOMEDove konhoide s' i pravca r', izlazi ovaj poznati stavak:

Četverostruki fokus NIKOMEDove *konhoide nalazi se uvijek u njenoj dvostrukoj točki.*

Usporedivši ova naša razmatranja s onima sprijeda vidimo, da je NIKOMEDova konhoida s' cisoidalna krivulja pratilica kružnice i pravca u specijalnom slučaju, kada se pol O nalazi u središtu te kružnice.

Odaberemo li namjesto kružnice c' u ravnini neku kuglu Φ u prostoru, a namjesto pravca r' neku ravninu ϱ, i to opet tako, da se pol P nalazi u središtu te kugle, dobit ćemo analognom konhoidalnom transformacijom u prostoru specijalnu konhoidalnu plohu $\overline{\psi}$ ravnine ϱ i pola P. Budući da za svaki ravninski prijesjek takvih specijalnih konhoidalnih ploha, kojih ravnine prolaze njenom dvostrukom točkom, vrijedi sve ono, što smo govorili o krivulji s' u ravnini, izlazi, da i ta specijalna konhoidalna ploha prolazi apsolutnom čunjosječnicom prostora. Također smo pri našim razmatranjima u ravnini vidjeli, da svaka NIKOMEDova konhoida ima svoj četverostruki fokus u dvostrukoj točki te krivulje. Svaki ravninski prijesjek takve specijalne konhoidalne plohe s ravninom, koja prolazi njenom dvostrukom točkom, ima prema tome u toj dvostrukoj točki svoj četverostruki fokus. Osim toga znademo, da su svi usporedni prijesjeci ploha, koje prolaze apsolutnom čunjosječnicom, cirkularne krivulje, kojih se četverostruki fokusi nalaze na jednom, na te ravnine okomitom, pravcu. Svi takvi pravci prolaze dakle kod naše specijalne konhoidalne plohe njenom dvostrukom točkom, a iz te činjenice izlazi dalje ovaj stavak:

Svaku specijalnu konhoidalnu plohu neke ravnine dira duž apsolutne čunjosječnice na toj plohi izotropan stožac, kojemu se realan vrh nalazi u dvostrukoj točki te plohe.

Analogno kao pri razmatranju u ravnini lako se uviđa i ovdje, da su specijalne konhoidalne plohe ravnine zapravo cisoidalne plohe pratilice ravnine i kugle u specijalnom slučaju, kada se pol P nalazi u središtu te kugle.

LITERATURA

1. WIELEITNER, H., *Spezielle ebene Kurven* (S. S. LVI.), Leipzig 1908, str. 3.
2. *O Plückerovu i nekim drugim konoidima 3. i 4. reda,* Rad Jug. akademije, knj. 276.
3. *Strofoidalne plohe 3. reda,* Zbornik Matem. instituta Srp. akad. nauka, knj. 2.
4. V. cit. 3.

Katedra za nacrtnu geometriju Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 29. IX. 1954.

Vilim Niče

ÜBER GEWISSE ZISSOIDALE BEGLEITKURVEN UND BEGLEITFLÄCHEN ALLER ORDNUNGEN*

Jede Gerade eines Punktes O schneide zwei Kurven p, p_1 in Punkten P, P_1. Die auf diesen Geraden der Bedingung $OQ = OP_1 — OP$ genügenden Punkte Q bilden eine Kurve q, die »zissoidale Kurve« der Kurve p_1 bezüglich der Kurve p und des Pols O heissen soll. Die der Bedingung $O\overline{Q} = OP_1 + OP$ genügenden Punkte $\overline{Q}$ auf diesen Geraden bilden eine neue Kurve $\overline{q}$, die »zissoidale Begleitkurve« der Kurve p_1, bezüglich der Kurve p und des Pols O, oder auch kurz Begleitkurve der Kurve q, genannt werden möge. Der Definition nach folgt, dass die Kurve $\overline{q}$ auch die zissoidale Begleitkurve der Kurve p bezüglich der Kurve p_1 und desselben Pols ist. Die Kurve $\overline{q}$ soll deswegen fernerhin nur zissoidale Begleitkurve der Kurven p, p_1, bezüglich des Pols O, heissen. Sind die Kurven p, p_1 der r, r_1-ten Ordnung, so wird, wie bekannt, die zissoidale Kurve q der $[2\,rr_1 — (ar_1 + br + c)]$-ten Ordnung, falls der Punkt O ein a-facher Punkt der Kurve p und ein b-facher Punkt der Kurve p_1 ist, und die Kurven p, p_1 c gemeinsame unendlich ferne Punkte enthalten. Die zissoidale Begleitkurve $\overline{q}$ der Kurven p, p_1 kann auch als zissoidale Kurve der Kurve p_1 bezüglich der zur Kurve p bezüglich des Pols O zentralsymmetrischen Kurve $\overline{p}$ aufgefasst werden. Daraus folgt also, dass die zissoidale Kurve und ihre Begleitkurve von derselben Ordnung sind. Der Pol O erscheint als $r \cdot r_1$-facher Punkt dieser Kurven. Erweitert man eine solche zissoidale Transformation auf den Raum, indem man die Kurven p, p_1 durch zwei Flächen φ, φ_1 ersetzt, so bilden die auf den Geraden des Punktes O der Bedingung $OQ = OP_1 — OP$ genügenden Punkte Q, die zissoidale Fläche der Fläche φ_1 bezüglich der Fläche φ und des Pols O. Die auf denselben Geraden liegenden, der Bedingung $O\overline{Q} = OP_1 + OP$ genügenden Punkte $\overline{Q}$ bilden eine neue Fläche, die, analog wie bei den Kurven p, p_1 die Kurve $\overline{q}$, die zissoidale Begleitfläche der Flächen φ, φ_1 bezüglich des Pols O genannt werden soll.

* Originalüberschrift dieser Arbeit: *Cisoidalne plohe ravnine i kugle, njihove pratilice i neke njihove generalizacije.*

Sind die Flächen φ, φ_1 r, r_1-ter Ordnung, so wird die zissoidale Fläche und ihre Begleitfläche ebenfals $[2\ rr_1 - (ar_1 + br + c)]$-ter Ordnung, falls der Punkt O a-facher Punkt der Fläche φ, und b-facher Punkt der Fläche φ_1 ist, und beide Flächen φ, φ_1 eine gemeinsame unendlichferne Kurve c-ter Ordnung haben. Die zissoidale Fläche und ihre Begleitfläche enthalten auch die unendlich fernen Kurven der Flächen φ, φ_1, da diese bezüglich der zissoidalen Transformation invariant sind. Der Pol O erscheint als $r \cdot r_1$-facher Punkt der zissoidalen Fläche und ihrer Begleitfläche.

Die Basis eines aufrechten Zylinders 3. Ordnung sei eine zirkuläre Kurve s' 3. Ordnung vom Geschlecht O. Die isotropen Verbindungsgeraden des unendlich fernen Scheitels dieses Zylinders mit den absoluten Punkten auf der Kurve s' bilden ein unendich fernes isotropes Erzeugendenpaar des Zylinders. Eine mit der Asymptote r der Kurve s' parallele Ebene ϱ schneide den Zylinder in einer Kurve s 3. Ordnung, deren Doppelpunkt sich auf der Doppelerzeugenden k des Zylinders befindet. Alle die Kurve s schneidenden und auf die Gerade k gefällten Senkrechten bilden ein Konoid 3. Grades, welches das unendlich ferne isotrope Erzeugendenpaar des Zylinders enthält, also ein PLÜCKERsches Konoid ist. Wie bekannt, gibt es zu jeder Ebene des Raumes eine zu ihr parallele Erzeugende i des PLÜCKERschen Konoids, falls die Ebene keine Richtebene des Konoids ist. Verschiebt man die Ebene ϱ parallel in die mit ihr parallele Erzeugende i des PLÜCKERschen Konoids in die Lage ϱ_1, so schneidet die Ebene ϱ_1 das Konoid in dieser Erzeugenden i und einer Ellipse c. Die orthogonale Projektion c' dieser Ellipse auf die Ebene der Kurve s' bildet einen Kreis, dessen Mittelpunkt sich im vierfachem Brennpunkte der zirkulären Kurve s' befindet. Wegen des unendlich fernen isotropen Erzeugendenpaares haben nämlich die Projektionen aller parallelen Ebenenschnitte des PLÜCKERschen Konoids auf eine Richtebene einen gemeinsamen vierfachen Brennpunkt. Die Schnittgerade der Richtebene der Erzeugenden i und der Ebene ϱ erscheint als Asymptote der Kurve s, die sich in die Asymptote r der Kurve s' projiziert. Aus der parallelen Lage der Ebenen ϱ, ϱ_1 der Kurven s, c folgt, dass man in der Ebene der Kurve s' die Projektion s' der Kurve s als zissoidale Begleitkurve des Kreises c' und der Asymptote r erhält, falls man den Doppelpunkt der Kurve s' als Pol annimmt. Es gilt also folgender Satz:

Jede zirkuläre Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht O *kann als zissoidale Begleitkurve betrachtet werden, u. zw. in bezug auf den Kreis, der durch ihren Doppelpunkt läuft und den vierfachen Brennpunkt als Mittelpunkt enthält, sowie bezüglich der Asymptote dieser Kurve nebst deren Doppelpunkt als Pol.*

Daraus folgt weiter, dass jede zirkuläre Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht O, bezüglich ihrer Asymptote und ihres Doppelpunktes als Pol die zissoidale Kurve jenes Kreises ist, der den Doppelpunkt enthält und dessen Mittelpunkt der zum vierfachem Brennpunkte bezüglich des Doppelpunktes symmetrische Punkt dieser zirkulären Kurve ist. Der Durchmesser des Kreises c' ist dem Abstande der mit der Asymptote r der Kurve s' parallelen Tangenten gleich.

Eine zirkuläre Kurve s_1' 4. Ordnung vom Geschlecht O, mit einem endlichem und einem unendlich fernen Doppelpunkte, in dem die Kurve sich selbst berührt, möge als Basis eines aufrechten Zylinders 4. Ordnung angenommen werden. Auch dieser Zylinder hat zwei unendlich ferne isotrope Erzeugende. Die Doppelerzeugende und einen ebenen Schnitt s_1 dieses Zylinders, deren Ebene mit der Doppelasymptote der Kurve s_1' parallel ist, nehmen wir als Leitlinien des Konoids 4. Ordnung an, deren Erzeugende auf die Doppelerzeugende des Zylinders gefällte Senkrechten sind. Das Konoid enthält eine mit der Doppelasymptote der Kurve s_1' parallele Doppelerzeugende, und auch hier ein isotropes unendlich fernes Erzeugendenpaar. Die senkrechten Projektionen aller parallelen Ebenenschnitte auch dieses Konoids in die Ebene der Kurve s_1' erscheinen als zirkuläre Kurven 4. Ordnung mit gemeinsamen vierfachen Brennpunkte. Verschiebt man auch hier die Ebene der Kurve s_1 parallel in die Doppelerzeugende des Konoids, so schneidet die neue Ebene das Konoid ausser in der Doppelerzeugenden auch noch in einem Kegelschnitt c_1, der sich im beschriebenen Sinne in einen Kreis c_1' projiziert. Da die Kurve s_1' die beschriebene Projektion der Kurve s_1 ist, erscheint der Mittelpunkt des Kreises c_1' als vierfacher Brennpunkt der zirkulären Kurve s_1'. Wegen der parallelen Lage der Ebenen der Kurven s_1, c_1 erhalten wir folgenden Satz:

Jede zirkuläre Kurve 4. Ordnung mit einem endlichen und einem unendlich fernen Doppelpunkte, in dem die Kurve sich selbst berührt, ist eine zissoidale Begleitkurve, und zwar in bezug auf den Kreis, dessen Mittelpunkt im vierfachem Brennpunkte der Kurve liegt und dessen Durchmesser dem Abstande der mit der doppelten Asymptote parallelen Tangenten gleich ist, sowie bezüglich der doppelten Asymptote mit dem endlichen Doppelpunkt als Pol.

Der endliche und der unendlich ferne Doppelpunkt können auch isoliert sein, wobei sich dann die Kurve unendlich fern imaginär berührt.

Da jede zissoidale Begleitkurve eines Kreises und der Geraden und jedes Punktes als Pol räumlich auf dieselbe Weise wie oben betrachtet werden kann, so erhalten wir auch folgenden Satz:

Die zissoidalen Begleitkurven eines Kreises und jeder Geraden mit irgend welchem Punkte als Pol, haben alle den Mittelpunkt des Kreises als gemeinsamen vierfachen Brennpunkt. Die vierfachen Brennpunkte aller zissoidalen Kurven 3. Ordnung solch eines Kreises, mit einer beliebigen Geraden nebst eines beliebigen Punktes als Pol, befinden sich auf dem konzentrischem Kreise doppelten Durchmessers.

Auf dem vorhin erwähnten aufrechten Zylinder 3. Ordnung mit der zirkulären Basiskurve s' möge eine gewöhnliche Erzeugende als Leitlinie, nebst der Ebenenkurve s 3. Ordnung auf dem Zylinder als zweite Leitlinie eines Konoides mit denselben Richtebenen angenommen werden.

Das so entstandene Konoid 4. Grades hat ebenfalls wie die vorigen ein unendlich fernes isotropes Erzeugendenpaar. Die bekannten orthogonalen Projektionen paralleler Ebenenschnitte dieses Konoids auf die Ebene der Basis s' sind deswegen auch hier zirkuläre Kurven 4. Ordnung mit gemeinsamen vierfachen Brennpunkte. Ein mit der Ebene der Kurve s paralleler Ebenenschnitt s_1 projiziert sich also in demselben Sinn in eine zirkuläre Kurve s_1' 4. Ordnung, deren vierfacher Brennpunkt mit demjenigen der Kurve s' zusammenfällt. Aus der parallelen Lage der Ebenen der Kurven s, s_1 folgt auch hier, dass die Kurve s_1' als zissoidale Begleitkurve der Kurve s' und ihrer Asymptote, nebst einem ihrer Punkte als Pol, angenommen werden kann. Weiter folgt hieraus, dass alle zissoidalen Begleitkurven der Kurve s' und ihrer Asymptote, nebst jedem ihrer Punkte als Pol, einen gemeinsamen vierfachen Brennpunkt haben. Die vierfachen Brennpunkte der diesen Begleitkurven zugeordneten zissoidalen Kurven befinden sich auf einer zur Kurve s' bezüglich des vierfachen Brennpunktes homothetischen Kurve, mit dem Ähnlichkeitsverhältnis 1 : 2.

Den bekannten aufrechten Zylinder 3. Ordnung schneide jetzt eine Ebene ϱ_2 in der Kurve s_2. Nebst der Kurve s_2 soll noch eine gewöhnliche Erzeugende des Zylinders, oder irgendeine mit den Erzeugenden parallele Gerade, als Leitlinie eines Konoids mit denselben Richtebenen angenommen werden. Das Konoid wird 5., bzw. 6. Ordnung, enthält auch hier ein unendlich fernes isotropes Erzeugendenpaar und die bekannten Projektionen paralleler Ebenenschnitte erscheinen deswegen wieder als vierfach konfokale zirkuläre Kurven 5., resp. 6. Ordnung. Selbstverständlich gilt dasselbe auch für die mit der Ebene ϱ_2 parallelen Ebenenschnitte, die in derselben Projektion als Begleitkurven der Kurve s' erscheinen da die Kurve s' eine ebensolche Projektion der Kurve s_2 ist. Wegen der beliebigen Lage der Ebene ϱ_2 der Kurve s_2 folgt, dass alle zissoidalen Begleitkurven der Kurve s' und irgend einer Geraden nebst irgend einem als Pol angenommenen Punkt, ihren gemeinsamen vierfachen Brennpunkt im vierfachen Brennpunkte der Kurve s' haben.

Werden unsere Betrachtungen analog erweitert, indem wir die Kurve s' mit einer ihrer Begleitkurven 4., 5. oder 6. Ordnung vertauschen, so erhalten wir auf ganz dieselbe Weise alle zissoidalen Begleitkurven 7., 8., 9., 10., 11. und 12. Ordnung dieser Kurve, deren vierfache Brennpunkte sich im vierfachen Brennpunkte der Ausgangskurve befinden. Ganz analog können diese Betrachtungen auf eine beliebige Ordnung dieser Kurven erweitert werden. Daraus folgt der Satz:

Die zissoidale Begleitkurve eines Kreises und einer beliebigen Geraden nebst einem beliebigen Punkt als Pol, und die zissoidalen Begleitkurven der erhaltenen Begleitkurven und einer weiteren beliebigen Geraden nebst einem weiterem Pol, wie auch alle zissoidale Begleitkurven aller so entstandenen Begleitkurven aller Ordnungen und irgendwelcher Geraden nebst irgendwelchen Polen, haben den Mittelpunkt des Ausgangskreises als gemeinsamen vierfachen Brennpunkt.

Durch Ersatz des Kreises durch eine Kugel Φ und der Gerade durch eine Ebene ϱ sei unsere zissoidale Transformation auf den Raum erweitert. Je nachdem, ob der Pol P sich auf der Kugel Φ befindet oder nicht, wird die zissoidale Begleitfläche $\overline{\psi}$ und die ihr zugeordnete zissoidale Fläche ψ 3. oder 4. Ordnung, da alle ihre den Pol P enthaltenden ebenen Schnitte als zissoidale Begleitkurven und zissoidale Kurven der Schnitte der Kugel Φ und der Ebene ϱ angenommen werden können. Da alle diese den Pol P enthaltenden Schnittkurven der Flächen $\overline{\psi}$, ψ zirkulär sind, enthalten diese Flächen den absoluten Kegelschnitt. Alle den Pol P enthaltenden ebenen Schnitte der zissoidalen Begleitfläche $\overline{\psi}$ sind zissoidale Begleitkurven der Schnitte der Kugel Φ mit denselben Ebenen. Die vierfachen Brennpunkte dieser Schnittkurven befinden sich also in den Mittelpunkten der Schnittkreise der Kugel Φ mit diesen Ebenen. Wie bekannt, befinden sich die vierfachen Brennpunkte der parallelen Ebenenschnitte einer den absoluten Kegelschnitt enthaltenden Fläche auf einer auf den Ebenen dieser Schnittkurven senkrechten Geraden. Wird also die zissoidale Begleitfläche $\overline{\psi}$ von einem Büschel paralleler Ebenen geschnitten, so befinden sich die vierfachen Brennpunkte dieser parallelen Ebenenschnitte auf einer zu diesen Ebenen senkrechten Geraden, die den Mittelpunkt F der Kugel Φ enthält. Hieraus folgt weiter, dass die Fläche $\overline{\psi}$ und die Kugel Φ von demselben isotropen Kegel längs des absoluten Kegelschnittes berührt werden. Der vierfache Brennpunkt jedes Ebenenschnittes der Fläche $\overline{\psi}$ kann also als senkrechte Projektion des Mittelpunktes F der Kugel Φ auf die Ebene der Schnittkurve betrachtet werden. Auf Grund der Eigentümlichkeiten der zissoidalen Kurven und ihrer Begleitkurven, sowie der erwähnten Besonderheit der parallelen Ebenenschnitte jener Flächen, die den absoluten Kegelschnitt enthalten, folgt, dass auch die zissoidale Fläche ψ längs des absoluten Kegelschnittes von einem isotropen Kegel berührt wird. Der Scheitel $\overline{F}$ dieses Kegels ergibt mit dem Scheitel F verbunden eine Strecke, die der gemeinsame Pol P hälftet. Es folgt hieraus weiter, dass die Scheitel $\overline{F}$ aller zissoidalen Flächen ψ 3. Ordnung der Kugel Φ und irgendeiner Ebene sich auf einer konzentrischen Kugel doppelten Durchmessers befinden. Der Pol P entsteht als Doppelpunkt der Flächen $\overline{\psi}$ und ψ, der isoliert ist, falls die Kugel Φ von der Ebene ϱ geschnitten wird.

Anstatt der Kugel Φ möge nun die Fläche $\overline{\psi}$ und irgendeine Ebene ϱ_1 nebst irgendeinem Pol P_1 angenommen werden. Je nachdem, ob die Fläche $\overline{\psi}$ 3. oder 4. Ordnung ist und ob sich der Pol P_1 auf oder ausserhalb der Fläche $\overline{\psi}$ befindet, können die zissoidalen Begleitflächen ψ_1 der Fläche $\overline{\psi}$ und irgendeiner Ebene ϱ_1 von der 5., 6., 7. oder 8.-ten Ordnung sein. Da alle den Pol P_1 enthaltenden ebenen Schnitte der so entstandenen zissoidalen Begleitflächen $\overline{\psi}_1$ zirkuläre Kurven sind, enthalten auch alle Flächen $\overline{\psi}_1$ den absoluten Kegelschnitt. Die vierfachen Brennpunkte der parallelen Ebenenschnitte der Flächen $\overline{\psi}_1$ befinden sich also auch hier auf einer auf diese Ebenen senkrechten Geraden. Irgendeine Ebene σ schneide die Fläche $\overline{\psi}_1$ in der Kurve s. Der vierfache Brennpunkt dieser Kurve befindet sich, wie bekannt, auf der auf die Ebene σ senkrechten Geraden, die den vierfachen Brennpunkt des den Pol P_1 enthaltenden und mit der Ebene σ parallelen Ebenenschnittes s_1 mit der Ebene $\sigma_1 \parallel \sigma$ enthält. Auf Grund unserer Betrachtungen kann die Kurve s_1 als zissoidale Begleitkurve der Schnittkurve s_2 der Fläche $\overline{\psi}$ mit der Ebene σ_1 betrachtet werden. Wird die Fläche $\overline{\psi}$ mit der den Pol P enthaltenden Ebene $\sigma_2 \parallel \sigma_1 \parallel \sigma$ in der Kurve s_2 geschnitten, so befinden sich, wie vorher ausgeführt wurde, die vierfachen Brennpunkte der Kurven s_1, s_2 auf einer auf die Ebenen σ_2, σ_1 und σ senkrechten Geraden, die durch den Mittelpunkt der Kugel Φ geht. Die vierfachen Brennpunkte aller parallelen Ebenenschnitte der Flächen Φ, $\overline{\psi}$ und $\overline{\psi}_1$ befinden sich also auf derselben Geraden. Daraus folgt, dass die Flächen Φ, $\overline{\psi}$ und $\overline{\psi}_1$ von demselben isotropen Kegel längs des absoluten Kegelschnittes berührt werden. Wählen wir jetzt anstatt der Fläche $\overline{\psi}$ eine der Flächen $\overline{\psi}_1$ und erzeugen mittels irgendeiner Ebene ϱ_2 und irgendeines Pols P_2 eine neue zissoidale Begleitfläche $\overline{\psi}_2$ 9., 10., 11., ..., 15. oder 16.-ter Ordnung, so werden wieder alle so entstandenen Flächen $\overline{\psi}_2$ den absoluten Kegelschnitt enthalten. Auf dieselbe Weise wie vorher kann auch hier bewiesen werden, dass auch diese Flächen von demselben isotropen Kegel längs des absoluten Kegelschnittes berührt werden. Nimmt man weiter anstatt der Fläche $\overline{\psi}_1$ eine der Flächen $\overline{\psi}_2$, so erhält man durch analoge Betrachtungen neue zissoidale Begleitflächen 17., 18., ..., 31. oder 32.-ter Ordnung mit der gleichen Eigenschaft, und durch Fortsetzung des Verfahrens gelangt man zu solchen Flächen beliebig grosser Ordnung. Wir erhalten also folgenden Satz:

Die zissoidalen Begleitflächen einer Kugel und irgendeiner Ebene, bezüglich irgendwelchen Pols, und die zissoidalen Begleitflächen dieser Begleitflächen bezüglich einer beliebigen Ebene und eines beliebigen Pols und so weiter bis zu Begleitflächen beliebig hoher Ordnung, enthalten den absoluten Kegelschnitt, längs dessen sie von demselben isotropen Kegel berührt werden, dessen Scheitel sich im Mittelpunkte der Ausgangskugel befindet.

Wählen wir den Pol O bei unseren voraus ausgeführten Betrachtungen im Mittelpunkte des Kreises c', so erhalten wir eine zissoidale Begleitkurve des Kreises c' und der Geraden r, die als »NIKOMEDische Konchoide« bekannt ist. Da der Mittelpunkt dieses Kreises, wie bekannt, der vierfache Brennpunkt und der Doppelpunkt dieser Kurve ist, so folgt daraus der Satz:

Der vierfache Brennpunkt der NIKOMED*ischen Konchoide befindet sich immer im Doppelpunkte dieser Kurve.*

Setzen wir analog im Raume den Pol P in den Mittelpunkt der Kugel Φ, so erhalten wir mittels unserer bekannten zissoidalen Transformation eine besondere zissoidale Begleitfläche der Kugel Φ und der Ebene ϱ, die als spezielle konchoidale Fläche der Ebene ϱ bezeichnet werden kann. Alle den Pol P enthaltenden ebenen Schnitte dieser Fläche sind NIKOMEDische Konchoiden der Schnittgeraden der Ebene ϱ mit den Ebenen dieser Schnitte. Da die NIKOMEDischen Konchoiden bekanntlich zirkuläre Kurven sind, so durchläuft auch die spezielle konchoidale Fläche den absoluten Kegelschnitt. Auf Grund dieser, und der vorher in dieser Abhandlung entwickelten Betrachtungen erhält man auch folgenden Satz:

Die spezielle konchoidale Fläche jeder Ebene wird längs des absoluten Kegelschnittes von einem isotropen Kegel berührt, dessen reeller Scheitel sich im Doppelpunkte dieser Fläche befindet.

Katheder für darstellende Geometrie an der Technischen Fakultät der Universität in Zagreb

Angenommen auf der am 29. IX. 1954 abgehaltenen Sitzung der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften.