JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI
I UMJETNOSTI

VILIM NIČE

O PREGRŠTI PLOHA 2. REDA ODREĐENOJ SA ŠEST TOČAKA U PROSTORU

ZAGREB

1955

VILIM NIČE

O PREGRŠTI PLOHA 2. REDA ODREĐENOJ SA ŠEST TOČAKA U PROSTORU

Uvod. Sve plohe 2. reda, koje sadržavaju šest po volji odabranih točaka u prostoru, čine specijalnu pregršt od ∞^3 ploha 2. reda (njemački F^2 – Gebüsch). Vrhovi svih stožaca 2. reda unutar te pregršti leže na jednoj općoj plohi 4. reda *(1)*. Nas će u ovoj radnji interesirati geometrijsko mjesto vrhova na takvoj plohi onih stožaca naše pregršti, na kojima će izvodnice, koje sadržavaju po jednu od tih šest temeljnih točaka, činiti tri para jedne involucije izvodnica na tim stošcima. Drugim riječima to znači, da će ravnine takvih triju parova prolaziti jednim pravcem vrha svakog takvog stošca, koji ćemo zvati os te involucije izvodnica. Rješavajući postavljenu zadaću, razmatrat ćemo najprije neke specijalne prostorne krivulje.

Poznata je razdioba prostornih krivulja 4. reda na takve krivulje 1. i 2. vrste. Ove se dvije vrste razlikuju u tome, što prostorne krivulje 4. reda 1. vrste imaju samo bisekante, dok takve krivulje 2. vrste imaju bisekante i trisekante. Sve trisekante neke prostorne krivulje 4. reda 2. vrste čine jedan sistem izvodnica neke pravčaste plohe 2. reda. Tražeći rješenje gore spomenutoj zadaći izvest ćemo jednu specijalnu vrstu prostornih krivulja 5. reda, koje imaju analogna svojstva kao krivulje 2. vrste među prostornim krivuljama 4. reda. Za ovakve prostorne krivulje 5. reda postoji uvijek ∞ *(1)* takvih pravaca, koji će te krivulje sjeći u četiri točke, a sve ovakve kvadrisekante činit će opet jedan sistem izvodnica neke pravčaste plohe 2. reda. Ova će se krivulja dobiti kao proizvod projektivno pridruženih izvodnica jednog sistema pravčaste plohe 2. reda i ravnina neke kubne omotaljke, t. j. oskulacionih ravnina neke kubne čunjosječnice. U toku izvođenja te prostorne krivulje 5. reda dobit ćemo i pravčastu plohu 4. reda XII. vrste kao proizvod projektivno pridruženih ravnina kubne omotaljke i sveska ravnina, ako se nalaze u jednom specijalnom položaju. Ako se projektivno pridruženi svezak ravnina i kubna omotaljka ne nalaze u kakvom specijalnom položaju, onda je njihov proizvod pravčasta ploha 4. reda IX. vrste *(2)*. Izvodeći opisane prostorne krivulje 5. reda dokazat ćemo, da su upravo ovakve krivulje sprijeda opisano traženo geometrijsko mjesto.

1. U jednom sistemu izvodnica neke pravčaste plohe 2. reda odaberimo po volji tri izvodnice a, b, c. Ovu plohu nazovimo (abc), a sistem izvodnica, koji sadržava a, b, c, nazovimo prvim sistemom izvodnica te plohe. Drugi sistem njenih izvodnica neka bude (i_n). Izvodnice sistema (i_n) neka sijeku pravac a u nizu (A_n), pravac b u nizu (B_n) i pravac c u nizu (C_n). Znademo iz teorije pravčastih ploha 2. reda, da je $(A_n) \overline{\wedge} (B_n) \overline{\wedge} (C_n)$. Odaberimo sada po volji tri ravnine π_1, π_2, π_3, pa pravce a, b, c presijecimo ravninom π_1 u točkama A^1, B^1, C^1, ravninom π_2 u točkama A^2, B^2, C^2 i ravninom π_3 u točkama A^3,B^3, C^3. Ravnini π_1 pridružimo sada neku izvodnicu i_1 sistema (i_n), ravnini π_2 isto tako neku izvodnicu i_2 i ravnini π_3 neku izvodnicu i_3. Izvodnica i_1 neka siječe pravce a, b, c u točkama A_1, B_1, C_1, izvodnica i_2 u točkama A_2, B_2, C_2 i izvodnica i_3 u točkama A_3, B_3, C_3. Pretpostavimo li sada, da nam parovi točaka A_1A^1, A_2A^2, A_3A^3 na pravcu a, parovi točaka B_1B^1, B_2B^2, B_3B^3 na pravcu b i parovi točaka C_1C^1, C_2C^2, C_3C^3 na pravcu c određuju po dva kolokalna projektivna niza, t. j. $(A_n) \overline{\wedge} (A^n)$, $(B_n) \overline{\wedge} (B^n)$ i $(C_n) \overline{\wedge} (C^n)$, onda će svakoj izvodnici $\frac{i_n}{V}$ sistema (i_n), odnosno njenim točkama A_n, B_n, C_n na pravcima a, b, c, biti jednoznačno pridružene točke A^n, B^n, C^n na tim pravcima. Svakom ovakvom trojkom točaka $A^n\,B^n\,C^n$ prolazi po jedna ravnina π_n, koja će biti jednoznačno pridružena onoj izvodnici i_n sistema izvodnica (i_n) pravčaste plohe (abc). Spomenuli smo već, da je $(A_n) \overline{\wedge} (B_n) \overline{\wedge} (C_n)$, a postavili smo, da bude $(A_n) \overline{\wedge} (A^n)$, $(B_n) \overline{\wedge} (B^n)$ i $(C_n) \overline{\wedge} (C^n)$. Odatle proizlazi, da je i $(A^n) \overline{\wedge} (B^n) \overline{\wedge} (C^n)$, a prema tome sve ravnine $(A^n\,B^n\,C^n) = \pi_n$, čine kubnu omotaljku (π_n) oskulacionih ravnina neke kubne čunjosječnice *(3)*. Pravci a, b, c su biplanare te kubne omotaljke, t. j. tim pravcima prolaze po dvije ravnine te omotaljke, a tim pravcima i ravninama π_1, π_2 i π_3 je ta kubna omotaljka (π_n) potpuno određena. Na temelju malo prije spomenutih projektivnih odnosa vidimo, da je sistem izvodnica (i_n) plohe (abc) projektivno pridružen ravninama omotaljke (π_n), t. j. $(i_n) \overline{\wedge} (\pi_n)$, jer će četirma izvodnicama sistema (i_n), koje pravce a, b, c sijeku u harmonijskoj četvorci točaka, biti u kubnoj omotaljci pridružene takve četiri ravnine, koje će te pravce sjeći također u harmonijskoj četvorci točaka.

Probodišta izvodnica sistema (i_n) s njima projektivno pridruženim ravninama π_n omotaljke (π_n) činit će neku neprekinutu prostornu krivulju k, kojoj ćemo sada obraćati našu pažnju. Svaka ravnina α_n pravca a sadržava u sebi jednu izvodnicu sistema (i_n) i siječe toj izvodnici u kubnoj omotaljci (π_n) projektivno pridruženu ravninu u jednom pravcu. Svi ovakvi pravci čine neku pravčastu plohu, koje će presjek s našom pravčastom plohom 2. reda (abc) dati spomenutu neprekidnu prostornu krivulju k. Budući da u dvostrukim točkama kolokalnih nizova na pravcima a, b, c parovi točaka $A_n A^n$, $B_n B^n$ i $C_n C^n$ padaju skupa, to je evidentno, da će ta prostorna krivulja sadržavati tih šest točaka.

Promotrimo sada geometrijsko mjesto presječnica ravnina sveska (α_n) pravca a i njima projektivno pridruženih ravnina omotaljke (π_n). Svezak (α_n) i omotaljka (π_n) projektivno su pridruženi zato, što je svezak (α_n) projektivno pridružen nizu (A_n), a ovaj opet nizovima (A^n), (B^n) i (C^n). Potražit ćemo sada pravčastu plohu, koja je proizvod ovih dviju tvorevina, jer i na toj plohi leži naša tražena prostorna krivulja k. Nazovimo tu plohu K. Spomenuli smo kod kubne omotaljke (π_n), da svakim od pravaca a, b, c prolaze po dvije ravnine te omotaljke. Ovakvim ravninama pravca a pridružene ravnine u svesku (α_n) ravnina pravca a sijeku one prve dvije u pravcu a, dakle se u tom pravcu nalaze dvije izvodnice tražene plohe K. Izvodeći našu plohu K, vidjeli smo, da sve izvodnice te plohe sijeku pravac a, a sada smo vidjeli, da dvije od tih izvodnica padaju u sam taj pravac. Njihova sjecišta s pravcem a nalaze se u onim točkama niza A^n, koje su pridružene diralištima pravčaste plohe (abc) u nizu A_n s ravninama sveska (α_n) pridruženih ravninama omotaljke (π_n), koje prolaze tim pravcem. Pravac a je prema tome trostruki pravac tražene pravčaste plohe K, a osim toga i dva puta torzalan. Spomenuta dva sjecišta na pravcu a su kuspidalne točke plohe K, dok su joj torzalne ravnine one ravnine omotaljke (π_n), koje prolaze pravcem a. Budući da se u svakoj ravnini pravca a nalazi još samo jedna izvodnica plohe K, to ona mora biti 4. reda. Plohe ovakvog tipa pripadaju, kako znademo, u pravčaste plohe 4. reda XII. vrste po Sturmu *(4)*. Za plohe ove vrste može se prema tome napisati ovo:

Pravčaste plohe 4. reda XII. vrste mogu se dobiti i kao proizvod projektivno pridruženih ravnina jedne kubne omotaljke i ravnina jednog sveska, ako je os tog sveska biplanara te omotaljke i ako se nijedna od dviju ravnina omotaljke, koje prolaze tom biplanarom, ne podudara sa sebi pridruženom u svesku ravnina te biplanare. Ova biplanara je trostruki pravac, a ravnine omotaljke, koje njime prolaze su torzalne ravnine takve plohe.

Presjek plohe K i naše pravčaste plohe (abc) 2. reda je tražena prostorna krivulja k, koja je prema tome 8. reda. Trostruki pravac a je međutim sastavni dio te prostorne krivulje, jer se nalazi na jednoj i drugoj plohi. Ova se je presječna krivulja 8. reda prema tome raspala u trostruki pravac i neku prostornu krivulju 5. reda, a ta je naša tražena prostorna krivulja k. U svakoj ravnini pravca a nalazi se jedna točka te krivulje izvan tog pravca, jer se u toj ravnini nalazi samo jedna izvodnica plohe K i jedna izvodnica plohe (abc). Izvodnice ovih dviju ploha u ravninama omotaljke (π_n), koje prolaze pravcem a, sijeku se na tom pravcu, dakle krivulja k siječe ovaj pravac i u ove dvije točke. Ove su točke dirališta plohe (abc) s ravninama sveska (α_n) pridruženih ravninama kubne omotaljke (π_n), koje prolaze pravcem a, jer u tim točkama ravnine omotaljke (A_n), koje prolaze pravcem a, sijeku njima pridružene izvodnice sistema (i_n) na plohi (abc). Vidimo dakle, da je pravac a kvadrisekanta prostorne krivulje k. Sve izvodnice pravčaste plohe (abc) 2. reda njenog prvog sistema, u kojemu se nalaze izvodnice a, b, c, probadaju plohu K u četiri točke, od kojih se nijedna ne nalazi na pravcu a. Sve su te izvodnice prema tome kvadrisekante naše prostorne krivulje k 5. reda. Izvodnice sistema (i_n) plohe (abc) su unisekante te krivulje, jer sve sijeku kvadrisekantu a kao trostruki pravac plohe K.

Za pravce b, c znademo da su kvadrisekante zato, što se nalaze u istom sistemu izvodnica plohe (abc), u kom se nalazi i pravac a. Pokazati se to može međutim i tako, da se za pravce b, c provedu analogna razmatranja kao za pravac a. Na svakom od ovih pravaca imamo poznata dva kolokalna projektivna niza s dvije dvostruke točke, a svakim od njih prolaze po dvije ravnine omotaljke (π_n) i njima pridružene ravnine u analognom svesku (β_n), odnosno (γ_n). Dakle prostorna krivulja k siječe svaki od njih u četiri točke. Svaki od ova dva pravca daje međutim novu plohu K, koja presječena s poznatom plohom (abc) 2. reda daje našu poznatu prostornu krivulju k, za koju ne znamo, da li je identična s onom prvom dobivenom pomoću pravca a. Prvu krivulju k dobili smo kao prodor plohe (abc) s plohom K, kojoj je pravac a trostruki pravac, ali dobili smo je i kao proizvod izvodnica sistema (i_n) plohe (abc) i ravnina kubne omotaljke (π_n), koji su u projektivnom odnosu. Uzmemo li sada pravac b ili c, namjesto pravca a i pripadnu pravčastu plohu K 4. reda, prodirat će ova plohu (abc) u istoj krivulji k zato, što je ova nova krivulja k proizvod istog sistema (i_n) izvodnica plohe (abc) i iste kubne omotaljke (π_n). Vidimo dakle, da bismo dobili potpuno istu krivulju, kada bismo uzeli bilo koji od pravaca a, b, c kao trostruki pravac pridružene pravčaste plohe K 4. reda XII. vrste, pa činili dalje ono isto, što smo činili kod pravca a. Posve je razumljivo, da dvostruke točke opisanih kolokalnih projektivnih nizova na pravcima a, b, c mogu biti realne kao i konjugirano imaginarne. Rezultate naših razmatranja možemo sada sažeti u ovakvom stavku:

Imamo li trima biplanarama neke kubne omotaljke postavljenu pravčastu plohu 2. reda tako, da su kolokalni nizovi točaka, u kojima ravnine te kubne omotaljke i izvodnice onog sistema izvodnica pravčaste plohe 2. reda, u kojem se ne nalaze one tri biplanare, projektivno pridruženi, onda će izvodnice tog drugog sistema sjeći sebi pridružene ravnine omotaljke u točkama, koje čine neku prostornu krivulju 5. reda. Sve su izvodnice prvog sistema ove pravčaste plohe 2. reda, unutar kojih se nalaze i one tri biplanare, kvadrisekante te prostorne krivulje.

Evidentno je, da mogu postojati i izvanredni slučajevi, kao na pr. kada se jedna ili obje ravnine kubne omotaljke, koje prolaze pravcem a, ili pravcima b ili c, poklapaju s njima pridruženim ravninama u opisanim svescima (α_n), odnosno (β_n) ili (γ_n) pravaca a, odnosno b ili c. U takvim slučajevima nastaju naravski izvjesne degeneracije prostorne krivulje k, ali se tim specijalnim slučajevima ovdje ne ćemo baviti.

2. Projektivan odnos izvodnica sistema (i_n) i ravnina kubne omotaljke (π_n) uspostavili smo tako, da smo trima izvodnicama tog sistema pridružili bilo koje tri ravnine te omotaljke. Odaberemo li sada na svakom od pravaca a, b, c po dvije realne točke $A, \bar{A}; B, \bar{B}; C, \bar{C}$, pa ove shvatimo kao dvostruke točke neke hiperboličke involucije na tim pravcima, tada imamo opet uspostavljenu jednu kubnu omotaljku, kojoj su ravnine projektivno pridružene izvodnicama sistema (i_n) pravčaste plohe (abc) 2. reda. Ako, recimo, izvodnica i_1 siječe pravce a, b, c u točkama A_1, B_1, C_1, pa ovim točkama na tim pravcima odredimo pomoću harmonijskih dvoomjera $(A\,\bar{A}\,A_1\,A^1) = -1$, $(B\,\bar{B}\,B_1\,B^1) = -1$ i $(C\,\bar{C}\,C_1\,C^1) = -1$ točke A^1, B^1, C^1, onda je probodište V izvodnice i_1 s ravninom $(A^1\,B^1\,C^1) \equiv \pi_1$ jedna točka naše prostorne krivulje k 5. reda. Ako sada točku V spojimo s točkama $A, \bar{A}, B, \bar{B}, C, \bar{C}$, onda će te spojnice biti izvodnice nekog stošca 2. reda, kojemu je ravnina $(A^1\,B^1\,C^1) \equiv \pi_1$ polarna s obzirom na zraku i_1, jer ravnine svih triju parova $(VA, V\bar{A})$, (VB, VB) i (VC, VC) izvodnica tog stošca prolaze pravcem i_1, a uzato vrijede i malo prije spomenuti harmonijski dvoomjeri. Budući da ravnine tih triju parova izvodnica stošca prolaze izvodnicom i_1 plohe 2. stepena, to dalje izlazi, da su to tri para izvodnica jedne involucije izvodnica na tom stošcu, kojoj je izvodnica i_1 os. Što vrijedi za izvodnicu i_1, vrijedi naravski za svaku izvodnicu sistema (i_n), dakle svi ovakvi vrhovi V čine našu poznatu prostornu krivulju 5. reda.

Zadamo li sada po volji u prostoru šest točaka $A, \bar{A}, B, \bar{B}, C, \bar{C}$, pa ih sve međusobno spojimo, dobivamo $\binom{6}{2} = 15$ pravaca, tako da se na svakom od njih nalaze po dvije od zadanih točaka. Sve ove pravce možemo složiti u 15 grupa po tri pravca, koji se međusobno ne sijeku. Svaka od ovih 15 grupa određuje po jednu poznatu plohu (abc) i na njoj sistem izvodnica (i_n), kojim je opet određena jedna kubna omotaljka, odnosno jedna prostorna krivulja k 5. reda. Svih takvih krivulja ima prema tome 15 na plohi vrhova svih stožaca unutar naše pregršti ploha 2. reda. Postoji dakle ovaj stavak:

U specijalnoj pregršti od ∞^3 ploha 2. reda, koje sadržavaju na svojoj površini šest po volji odabranih točaka u prostoru, postoji ∞^1 takvih stožaca 2. reda, na kojima izvodnice, koje prolaze tim temeljnim točkama te pregršti, čine tri para izvodnica jedne involucije izvodnica na tim stošcima. Vrhovi svih ovakvih stožaca čine 15 prostornih krivulja 5. reda na plohi 4. reda vrhova svih stožaca unutar naše pregršti. Svaka ova prostorna krivulja ima ∞^1 kvadrisekanata, koje čine po jedan sistem izvodnica jedne pravčaste plohe 2. reda. U tom sistemu izvodnica ovakvih ploha 2. reda nalaze se uvijek i ona tri pravca, na kojima se u parovima nalazi svih šest temeljnih točaka naše specijalne pregršti. Osi involucija na svim takvim stošcima jedne ovakve prostorne krivulje 5. reda čine drugi sistem izvodnica pravčaste plohe 2. reda, kojoj prvi sistem čine kvadrisekante te krivulje.

Pojedini parovi između šest temeljnih točaka pregršti mogu biti i konjugirano imaginarni, definirani kao dvostruke točke neke eliptičke involucije. Ako je jedan od tih parova konjugirano imaginaran, onda postoje tri takve prostorne krivulje 5. reda, a ako su dva ili sva tri takva para konjugirano imaginarni, onda postoji samo jedna takva prostorna krivulja 5. reda, jer u takvim slučajevima možemo spojnicama parova zadanih temeljnih točaka postaviti samo toliko pravčastih ploha (abc) 2. reda.

Budući da osi opisanih involucija čine drugi sistem izvodnica ovakvih pravčastih ploha 2. reda, to naravski u takvim slučajevima postoje samo tri, odnosno samo jedan takav sistem involucionih osi.

LITERATURA

1. *Reye Th.*, Die Geometrie der Lage. T. III. str. 159.
2. *Müller-Krames*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, 1931., Bd. III. str. 257.
3. *Reye Th.*, 1. c. T. II. str. 168.
4. *Müller-Krames*, I. c. str. 267.

Katedra za nacrtnu geometriju Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 24. VI. 1954.

Vilim Niče

ÜBER DAS GEBÜSCH DER DURCH 6 PUNKTE IM RAUM BESTIMMTEN FLÄCHEN 2. ORDNUNG*

Im speziellen Gebüsch der ∞^3 Flächen 2. Ordnung, das durch 6 Punkte des Raumes als Grundpunkte bestimmt ist, gibt es ∞^2 Kegel 2. Ordnung, deren Scheitel sich auf der bekannten Kernfläche 4. Ordnung dieses Gebüsches befinden. Unter diesen Kegeln gibt es ∞^1 solcher, deren Erzeugende, die durch die 6 Grundpunkte des Gebüsches gehen, drei Paare zugeordneter Erzeugenden einer Erzeugendeninvolution auf dem Kegel bilden. In unseren Betrachtungen werden der geometrische Ort der Scheitel solcher ∞^1 Kegel und die Involutionsachsen der Erzeugendeninvolutionen auf diesen Kegeln bestimmt.

Drei Erzeugende a, b, c der Erzeugendenschar (abc) einer Regelfläche 2. Ordnung mögen von drei beliebig angenommenen Ebenen π_1, π_2, π_3 in Punkttripeln $A^1 B^1 C^1$, $A^2 B^2 C^2$, $A^3 B^3 C^3$ geschnitten werden. In der zweiten Erzeugendenschar (i_n) dieser Regelfläche 2. Ordnung ordnen wir drei beliebig angenommene Erzeugende i_1, i_2, i_3 den Ebenen π_1, π_2, π_3 zu. Den Schnittpunkten $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ und $C_1 C_2 C_3$ der Erzeugenden a, b, c mit den Erzeugenden i_1, i_2, i_3 ordnen wir die gleichnamigen Schnittpunkttripel $A^1 A^2 A^3$, $B^1 B^2 B^3$, $C^1 C^2 C^3$ dieser Erzeugenden mit den Ebenen π_1, π_2, π_3 zu, um dadurch die projektive Zuordnung der Punktreihen $(A_n) \overline{\wedge} (A^n)$, $(B_n) \overline{\wedge} (B^n)$ und $(C_n) \overline{\wedge} (C^n)$ auf den Erzeugenden a, b, c herzustellen. Da bekanntlich $(A_n) \overline{\wedge} (B_n) \overline{\wedge} (C_n)$ ist, so wird auch $(A^n) \overline{\wedge} (B^n) \overline{\wedge} (C^n)$. Die Tripel zugeordneter Punkte der projektiven Punktreihen $(A^n) \overline{\wedge} (B^n) \overline{\wedge} (C^n)$ bestimmen also die Ebenen eines kubischen Ebenengewindes (π_n), und auf diese Weise wird auch die projektive Zuordnung der Schar (i_n) und des kubischen Ebenengewindes (π_n) her-

* Originalüberschrift dieser Arbeit: *O pregršti ploha 2. reda odredenoj sa šest točaka u prostoru.*

gestellt. Die Schnittpunkte zugeordneter Erzeugenden und Ebenen der projektiv zugeordneten Schar (i_n) und des Ebenengewindes (π_n) bilden eine Raumkurve k, die die Doppelpunkte der kollokalen projektiven Punktreihen $(A_n) \overline{\wedge} (A^n)$, $(B_n) \overline{\wedge} (B^n)$ und $(C_n) \overline{\wedge} (C^n)$ enthält. Jede der Erzeugenden a, b, c enthält zwei Ebenen des kubischen Ebenengewindes (π_n). Die diesen Ebenen zugeordneten Erzeugenden der Schar (i_n) schneiden also die Erzeugenden a, b, c in zwei weiteren Punkten der Raumkurve k. Die Erzeugenden a, b, c sind also Quadrisekanten der Raumkurve k. Der Ebenenbüschel (a_n) der Geraden a ist der Punktreihe (A_n) dieser Geraden projektiv zugeordnet, da die Punkte dieser Reihe Berührungspunkte der Ebenen des Büschels (a_n) auf der Regelfläche 2. Ordnung der Scharen (abc) und (i_n) sind. Der Ebenenbüschel (a_n) ist also auch dem kubischen Ebenengewinde (π_n) projektiv zugeordnet, und das Erzeugnis dieser zwei projektiv zugeordneten Gebilde ist eine Regelfläche 4. Ordnung XII. Art. Das Erzeugnis eines kubischen Ebenengewindes und eines demselben projektiv zugeordneten Ebenenbüschels ist eine Regelfläche 4. Ordnung IX. Art. Da aber in unserem Falle die Achse des Ebenenbüschels eine Biplanare des kubischen Ebenengewindes ist, wird die Fläche von XII. Art. Die Ebenen des Büschels (a_n) enthalten eine Erzeugende dieser Regelfläche 4. Ordnung XII. Art und eine Erzeugende unserer Regelfläche 2. Ordnung aus der Schar (i_n). Der geometrische Ort der Schnittpunkte dieser Erzeugendenpaare in den Ebenen des Büschels (a_n) ist das Erzeugnis der projektiv zugeordneten Erzeugendenschar (i_n) und des kubischen Ebenengewindes (π_n), also unsere Raumkurve k. Als Durchdringungskurve der Regelflächen 2. und 4. Ordnung, die in die dreifache Gerade der Regelfläche 4. Ordnung und in eine Raumkurve 5. Ordnung zerfällt, ist die Kurve k eine Raumkurve 5. Ordnung. Jede Erzeugende der Schar (abc) der Regelfläche 2. Ordnung schneidet die Regelfläche 4. Ordnung in 4 Punkten, die sich auf der Kurve k befinden. Alle Erzeugenden der Schar (abc) sind also Quadrisekanten der Raumkurve k.

Es mögen auf den Geraden a, b, c drei gleichnamige Punktepaare $A\bar{A}$, $B\bar{B}$ und $C\bar{C}$, also Doppelpunkte hyperbolischer Involutionen, angenommen werden. Vermittels dieser Involutionen ist unsere bekannte projektive Zuordnung der Reihen $(A_n) \overline{\wedge} (A^n)$, $(B_n) \overline{\wedge} (B^n)$ und $(C_n) \overline{\wedge} (C^n)$ auf den Geraden a, b, c hergestellt, und damit sind auch die Schar (i_n) und das kubische Ebenengewinde (π_n) einander projektiv zugeordnet. Eine Erzeugende i_1 der Schar (i_n) schneide die Geraden a, b, c in den Punkten A_1, B_1, C_1. Die diesen Punkten in den genannten Involutionen zugeordneten Punkte A^1, B^1, C^1 bestimmen die Ebene $(A^1 B^1 C^1)$, deren Schnittpunkt V mit der Erzeugenden i_n sich auf der Raumkurve k befindet. Die Geraden VA, $V\bar{A}$, VB, $V\bar{B}$, VC und $V\bar{C}$ sind Erzeugende eines Kegels 2. Ordnung, in bezug auf den die Gerade i_1 und die Ebene $(A^1 B^1 C^1)$ polar zugeordnet sind. Da die Ebenen $(VA\bar{A})$, $(VB\bar{B})$ und $(VC\bar{C})$ die Gerade i_1 enthalten, erscheint diese als Involutionsachse der von den Erzeugendenpaaren $VA-V\bar{A}$, $VB-V\bar{B}$ und $VC-V\bar{C}$ bestimmten Involution auf dem genannten Kegel.

Die drei Punktepaare $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $C\bar{C}$ können beliebig im Raum angenommen werden, um damit ein spezielles Gebüsch von ∞^3 Flächen 2. Ordnung zu bestimmen. Diese Punkte können mittels 15 Geraden verbunden werden, die in 15 Gruppen von je drei zueinander windschiefen Geraden geteilt werden können. Jede dieser Gruppen bestimmt auf die beschriebene Weise eine Regelfläche 2. Ordnung mit ihrer Schar (i_n), und ein dazu projektiv zugeordnetes kubisches Ebenengewinde (π_n), also auch eine Raumkurve k 5. Ordnung. Man erhält also folgenden Satz:

Im Gebüsch der Flächen 2. Ordnung, die einem räumlichen Sechseck umbeschrieben sind, befinden sich auf seiner Kernfläche 4. Ordnung 15 Raumkurven 5. Ordnung, deren Punkte die Scheitel jener Kegel des Gebüsches sind, deren durch die Grundpunkte des Gebüsches gehenden Erzeugende eine Erzeugendeninvolution auf diesen Kegeln bilden. Jede dieser Raumkurven hat ∞^1 Quadrisekanten, die eine Erzeugendenschar einer Regelfläche 2. Ordnung bilden. Die zweite Schar der Erzeugenden dieser Regelfläche 2. Ordnung bilden die Achsen der Erzeugendeninvolutionen dieser Kegel, die auch Unisekanten der Raumkurve k *sind.*

Sind die Grundpunkte des Gebüsches, paarweise konjugiert imaginär, so bestehen auf der Kernfläche des Gebüsches nur drei, oder nur eine der beschriebenen Raumkurven 5. Ordnung.

Katheder für darstellende Geometrie an der Technischen Fakultät der Universität in Zagreb

Angenommen auf der am 24. VI. 1954. abgehaltenen Sitzung der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften.