VILIM NIČE

O fokalnim osobinama bicirkularnih krivulja i nekih ciklida 4. reda

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

ZAGREB 1953

VILIM NIČE:

O FOKALNIM OSOBINAMA BICIRKULARNIH KRIVULJA I NEKIH CIKLIDA 4. REDA

UVOD

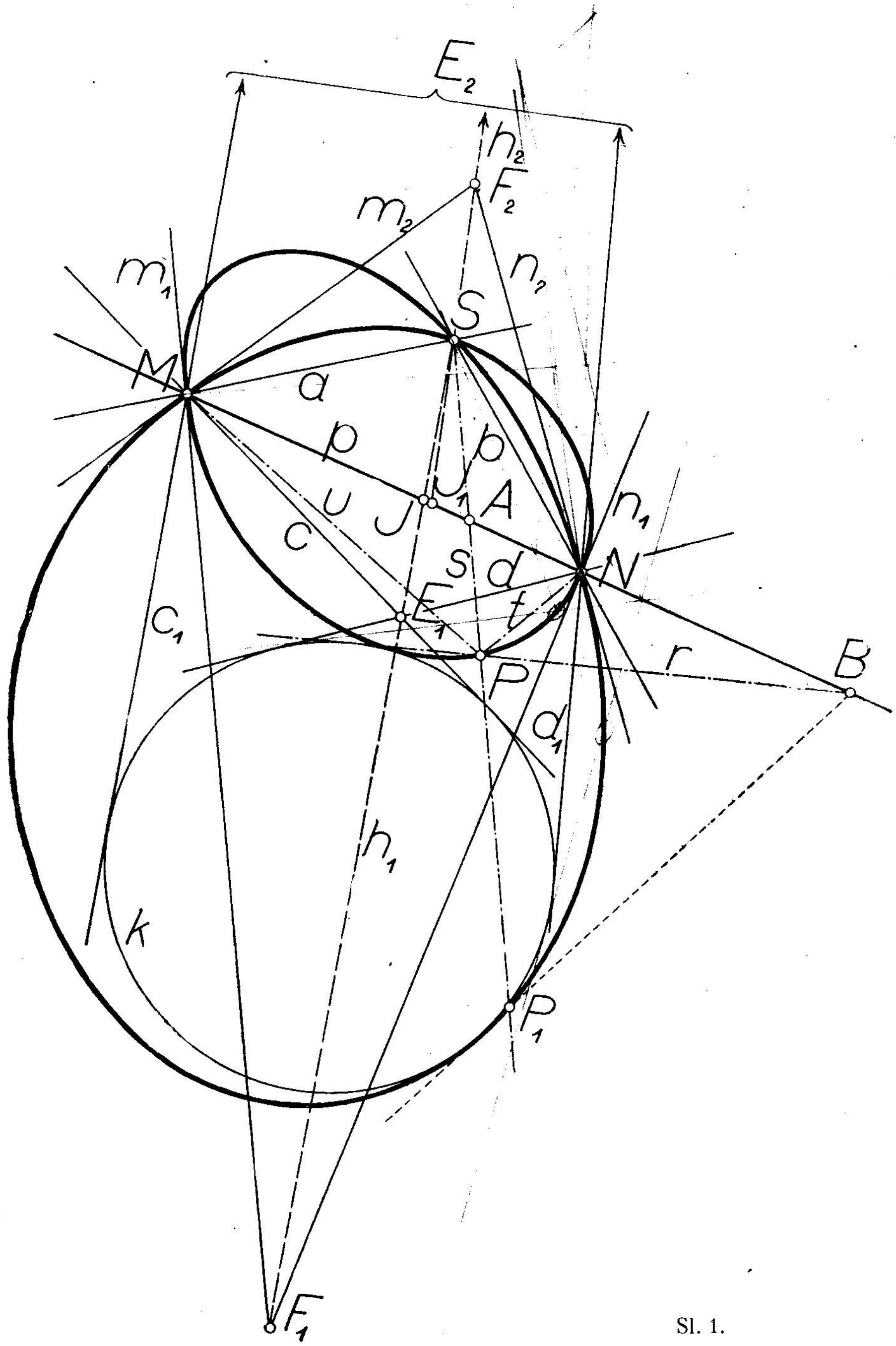
Nožišne krivulje bilo kakve centralne krivulje 2. reda jesu bicirkularne krivulje 4. reda.[1] Našlo se međutim, da se svaka bicirkularna krivulja 4. reda može smatrati kao envelopa kružnica, koje prolaze njenom dvostrukom točkom, a središta su im na nekoj krivulji 2. reda.[2] U radnji »Doprinos zajedničkim svojstvima ravnih krivulja 3. i 4. reda roda nultoga« pokazao sam, kako se nožišna krivulja svake krivulje k 2. reda, s obzirom na svaki pol S, može smatrati kao envelopa kružnica, koje prolaze tim polom S, a središta su im na krivulji l 2. reda, koju čine polovišta spojnica pola S s točkama krivulje k.

Svaka bicirkularna krivulja 4. reda ima dva realna i dva imaginarna četvorostruka fokusa, kao i dva realna i dva konjugirano imaginarna obična fokusa. Poznato je, da se bicirkularna krivulja 4. reda može dobiti običnom inverzijom neke krivulje 2. reda na kružnici, a u tom slučaju realni fokusi ove krivulje 2. reda prelaze inverzijom u realne obične fokuse nastale bicirkularne krivulje 4. reda.[3] Ovom činjenicom riješen je i problem konstruktivnog određivanja para običnih realnih fokusa neke bicirkularne krivulje 4. reda. U ovoj radnji potražit ćemo najprije par realnih četvorostrukih fokusa neke bicirkularne krivulje 4. reda, a onda i imaginaran takav par. Ako je neka bicirkularna krivulja 4. reda nastala kao envelopa kružnica, koje prolaze njenom dvostrukom točkom S, a središta su im na nekoj krivulji l 2. reda, pokazat ćemo u ovoj radnji, da su sva četiri fokusa ove krivulje l 2. reda ujedno i četvorostruki fokusi nastale bicirkularne krivulje 4. reda. U nastavku ove radnje razmatrat ćemo neke ciklide, odnosno četvorostruko fokalne osobine njihovih ravnin-

[1] *H. Wieleitner*, Spezielle ebene Kurven, Sam. Schub. LVI, str. 4 i 35.

[2] *W. Michaei*, Die Konstruktion des singulären Punktes der bizirkularen Quartik und der durch ihn gehenden Tangentialkreise. Arch. Elektrot. 30., p. 199–206 (1936).

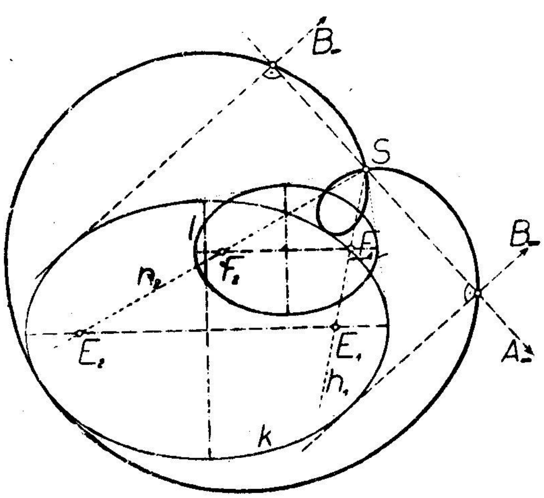
[3] Vidi radnju, Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije. RAD, knj. 278 (86), 1945.



Sl. 1.

skih prijesjeka, služeći se rezultatima dobivenim kod bicirkularnih krivulja 4. reda.

I. Bicirkularnu krivulju 4. reda kao nožišnu krivulju neke krivulje 2. reda dobivamo konstruktivno tako, da iz pola S postavimo okomice na sve tangente te krivulje k 2. reda. Nožišta tih okomica na tim tangentama su točke te bicirkularne krivulje. Drugim bismo riječima mogli to izraziti ovako: Odaberemo li u apsolutnoj involuciji[4] neizmjerno dalekog pravca naše ravnine crtnje dvije konjugirane točke A, B, pa iz točke B povučemo tangente na krivulju k 2. reda, a točku A spojimo s polom S, onda sjecišta ove spojnice sa spomenutim tangentama daju točke bicirkularne



Sl. 2.

krivulje 4. reda (Sl. 2). Ova krivulja prolazi dva puta dvostrukim točkama spomenute apsolutne involucije, t. j. apsolutnim točkama ravnine, pa se zato i zove bicirkularna.

Odaberimo sada po volji neku krivulju k 2. reda i neki pol S izvan te krivulje. Namjesto neizmjerno dalekog pravca ravnine crtnje i njegove apsolutne involucije uzmimo ovdje po volji neki pravac p u konačnosti. Na njemu neka se nalazi hiperbolička involucija određena dvostrukim točkama M, N. (Sl. 1). Neka je sada, analogno kao i malo prije, u ovoj involuciji par njenih konjugiranih točaka A, B, t. j. takav par A, B, za koji vrijedi $(MNAB) = -1$. Spojimo li točku A s polom S, a iz točke B povučemo obje tangente na krivulju k, onda će sjecišta P, P_1 ovih pravaca ležati na nekoj krivulji 4. reda roda nultoga, kojoj su točke M, N i S dvostruke točke. Ove su točke dvostruke zato, što svakom od njih možemo

[4] *E. Müller–E. Kruppa*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. I. str. 29. (Leipzig–Wien 1923).

povući dvije tangente na krivulju k, a dobivena je krivulja četvrtog reda, budući da svaki pravac s_n točke S siječe tu krivulju još samo u dvije točke. Bilo koji pravac p u ravnini naše dobivene krivulje 4. reda možemo smatrati kao nožišnu krivulju parabole, kojoj je pol S u njezinu fokusu. Budući da krivulja k, koja je 2. reda, i ova parabola imaju četiri zajedničke tangente, ima nužno pravac p, kao i svaki drugi pravac u toj ravnini, s tom krivuljom 4. reda četiri točke zajedničke, dakle je ta krivulja uistinu četvrtog reda. Označimo s u, t, s i r spojnice točke P s točkama M, N, A i B. Zbog $(MNAB) = -1$ bit će i $(utsr) = -1$. Putuje li sada točka P po našoj krivulji 4. reda u točku N, onda spomenuti harmonitet $(utsr) = -1$ ostaje invarijantan, zbog konstantnog harmoniteta $(MNAB) = -1$. U točki N prelazi spojnica r u tangentu d, pravac s prelazi u spojnicu $b = SN$, spojnica u prelazi u pravac p, a spojnica t prelazi u jednu tangentu n_1 naše krivulje 4. reda u dvostrukoj točki N. Iz spomenutog invarijantnog harmoniteta izlazi, da će biti i $(pn_1\, bd) = -1$, a time je tangenta n_1 u dvostrukoj točki N određena. Druga tangenta n_2 u ovoj dvostrukoj točki dobiva se pomoću druge tangente d_1 povučene iz točke N na krivulju k, na temelju harmoniteta $(pn_2\, bd_1) = -1$. Posve analogno dobit ćemo u dvostrukoj točki M tangente m_1, m_2 na temelju harmoniteta $(pm_1\, ac) = -1$ i $(pm_2\, ac_1) = -1$, ako su c, c_1 tangente krivulje k povučene iz točke M, a spojnicu MS označimo s a. Neka se tangente c, d krivulje k sijeku u točki E_1, a tangente m_1, n_1 naše krivulje 4. reda neka se sijeku u točki F_1. Isto tako neka se tangente c_1, d_1 krivulje k sijeku u točki E_2, a tangente m_2, n_2 krivulje 4. reda neka se sijeku u točki F_2. Pridružimo sada zrakama p, m_1, a i c vrha M zrake p, n_1, b i d vrha N tako, da pravac p bude pridružen sam sebi, zraci n_1 neka je pridružena zraka m_1, zraci a neka bude pridružena zraka b, a zraci c neka bude pridružena zraka d. Zbog malo prije spomenutih harmonijskih dvoomjera možemo te zrake smatrati za pridružene parove zraka dvaju projektivnih pramenova, a budući da je pravac p sam sebi pridružen, oni su osim toga i perspektivni. Proizvod ovih dvaju pramenova je pravac h_1, koji spaja sjecišta S, E_1 i F_1 pridruženih parova zraka ab, cd i $m_1\, n_1$. Označimo li sjecište pravaca h_1 i p s J, onda na temelju malo prije spomenutih harmoniteta izlazi i ovaj: $(SE_1F_1J) = -1$.

Odaberemo li namjesto parova tangenata cd, $m_1\, n_1$ parove $c_1\, d_1$ i $m_2\, n_2$, dobili bismo posve analogno točke E_2, F_2, za koje bi opet vrijedio harmonitet $(SE_2\, F_2\, J_1) = -1$ na nekom pravcu h_2. Kad bismo namjesto parova tangenata cd, $m_1\, n_1$ i $c_1\, d_1$, $m_2\, n_2$ odabrali parove cd_1, $m_1\, n_2$ i $c_1\, d$, $m_2\, n_1$, dobili bismo rezultate posve analogne izvedenim u obliku dovibenih točaka F_1, F_2.

II. Nakon naših izvoda u toč. I. vratimo se sada našoj bicirkularnoj krivulji 4. reda, pa izvedene rezultate prenesimo na ovu krivulju. Naša krivulja 4. reda roda nultoga na sl. 1 postat će bicirkularna onda, ako pravac p ode u neizmjernost, a njegova hiperbolička involucija prijeđe u apsolutnu involuciju ravnine crtnje na tom neizmjerno dalekom pravcu. Realne dvostruke točke M, N hiperboličke involucije prelaze tada u apsolutne točke ravnine crtnje. Budući da su apsolutne točke, odnosno apsolutna involucija, određeni svakim cirkularno involutornim pramenom zraka, bit će spojnica točaka SA okomita na tangente krivulje k povučene iz konjugirane točke B. Budući da ovo vrijedi za svaki konjugirani par točaka A_n, B_n apsolutne involucije, vidimo, da je naša bicirkularna krivulja 4. reda nožišna krivulja krivulje k 2. reda za pol S.

Tangente m_1, m_2 i n_1, n_2 prelaze u imaginarne tangente bicirkularne krivulje u njenim apsolutnim točkama, dakle su sjecišta F_1, F_2 tih tangenata četvorostruki fokusi naše bicirkularne krivulje 4. reda. Tangente c, d i c_1, d_1 prelaze u imaginarne tangente krivulje k 2. reda povučene na tu krivulju iz apsolutnih točaka, dakle sjecišta tih tangenata E_1, E_2 prelaze u fokuse krivulje k. Harmonijski dvoomjer $(SE_1 F_1 J) = -1$ ostaje nepromijenjen s tom razlikom, da je točka J s pravcem p otišla u neizmjernost. Odavle međutim direktno proizlazi, da se četvorostruki fokus F_1 nalazi u polovištu dužine SE_1. Isto se tako četvorostruki fokus F_2 nalazi u polovištu dužine SE_2. Sl. 2.

Imamo li na umu ono, što smo spomenuli u uvodu ove radnje, kao i ono, što smo dosad izveli, tad vidimo, da smo za bicirkularne krivulje 4. reda dobili ovu zanimljivu činjenicu: *Ako neku bicirkularnu krivulju 4. reda shvatimo kao envelopu kružnica, koje prolaze nekom točkom S (koja je dvostruka točka te krivulje), a središta su im na nekoj krivulji l 2. reda, onda se realni fokusi te krivulje l 2. reda podudaraju s četvorostrukim realnim fokusima nastale bicirkularne krivulje 4. reda.*

Imamo li bicirkularnu krivulju 4. reda izvedenu na jedan ili drugi način, znat ćemo prema tome na temelju naših razmatranja konstruktivno odrediti njene četvorostruke fokuse. Ako je ta krivulja izvedena na bilo koji drugi način, recimo pomoću obične inverzije na kružnici, tad ćemo u pet točaka te krivulje postaviti okomice na spojnice tih točaka s dvostrukom točkom te krivulje. S ovih pet okomica određena je krivulja k 2. reda i razreda, ako te okomice smatramo za njene tangente. Odredivši fokuse ove krivulje 2. reda, lako je odrediti na opisani način i tražene četvorostruke fokuse.

III. Upišemo li na sl. 1 tangentama m_1, m_2, n_1, n_2 naše krivulje u dvostrukim točkama M, N pramen krivulja 2. reda, tad sve krivulje ovog pramena imaju zajednički tangencijalni četvorostran. Vrhovi tog četvorostrana su točke M, N, F_1, F_2, i još dva dalja sprijeda spomenuta sjecišta $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$. Prenesemo li ovo na našu bicirkularnu krivulju 4. reda, nastalu kao envelopu kružnica, koje idu dvostrukom točkom S, a središta su im na krivulji l 2. reda, onda ovaj spomenuti pramen krivulja 2. reda prelazi u pramen konfokalnih krivulja 2. reda zajedničkih fokusa F_1, F_2, $\bar{F}_1$ i $\bar{F}_2$, kod kojeg se pramena sva ta četiri zajednička fokusa podudaraju sa četvorostrukim fokusima bicirkularne krivulje 4. reda, od kojih su naravski dva realna,a dva konjugirano imaginarna. Vidimo dakle, da nesamo realni fokusi krivulje l 2. reda daju realne četvorostruke fokuse bicirkularne krivulje 4. reda nego i imaginarni fokusi krivulje l daju imaginarne četvorostruke fokuse naše bicirkularne krivulje. Sva naša dosadanja razmatranja i zaključke možemo prema tome obuhvatiti ovakvim stavkom:

Izvedemo li neku bicirkularnu krivulju 4. reda kao envelopu kružnica, koje prolaze nekom točkom S, a središta su im na nekoj krivulji l 2. reda, tad se realni i konjugirano imaginarni fokusi krivulje l podudaraju s isto takvim četvorostrukim fokusima izvedene bicirkularne krivulje 4. reda.

Ako je bicirkularna krivulja 4. reda izvedena kao nožišna krivulja neke krivulje *k* 2. reda uz pol *S*, onda nam sprijeda izvedeni rezultati daju odmah konstruktivni postupak i za određenje konjugirano imaginarnog para četvorostrukih fokusa te bicirkularne krivulje, a ne samo za realan par. Ako je bicirkularna krivulja 4. reda izvedena bilo kako inače, onda se dobivanjem realnog para četvorostrukih fokusa na opisani način dobiva istovremeno i imaginaran par takvih fokusa te krivulje.

Odaberemo li kružnicu kao krivulju *l*, tad se u njezinu središtu nalaze sva četiri njena fokusa. Pomoću te kružnice dobivena bicirkularna krivulja 4. reda imat će prema tome u tom središtu svoj 16-struki fokus.

IV. Rezultatima ovih naših dosadanjih razmatranja kod bicirkularnih krivulja 4. reda poslužit ćemo se najprije kod razmatranja rotacionih ciklida i njihovih ravninskih prijesjeka. Zarotiramo li neku simetričnu bicirkularnu krivulju 4. reda oko njene osi, nastat će rotaciona ploha 4. reda, koja dva puta prolazi apsolutnom čunjosječnicom. Plohe 4. reda, koje dva puta prolaze apsolutnom čunjosječnicom, zovu se općeno ciklide.[5] Ako je takva ploha rotaciona, onda svi njeni osni prijesjeci imaju isti par četvorostrukih fokusa na toj osi. Kad je taj par četvorostrukih fokusa realan, onda su ti fokusi uistinu realni vrhovi imaginarnih tangencijalnih stožaca 2. reda naše ciklide duž apsolutne čunjosječnice. U nastavku ove radnje potražit ćemo takav realan par karakterističnih točaka na osi rotacionih ciklida, kao i njihovo značenje za sve ravninske presjeke te plohe, ako te točke uopće postoje kao realne.

V. Analogno, kao što bicirkularnu krivulju 4. reda možemo dobiti kao nožišnu krivulju neke krivulje 2. reda, možemo i ciklidu dobiti kao nožišnu plohu neke plohe 2. reda, uz neki pol unutar ili izvan te plohe, koji će biti izolirana ili puna dvostruka točka te ciklide.[6] Slučaj, kad ta ploha degenerira u plohu 3. reda i jednu ravninu, nas ovdje ne će zanimati. Na ovom ćemo se mjestu sjetiti još i definicije bicirkularne krivulje 4. reda, prema kojoj je ta krivulja envelopa kružnica, koje prolaze njenom dvostrukom točkom, a središta su im na nekoj krivulji 2. reda, kao i poznate definicije ciklida (Moutard), prema kojoj je ona envelopa kugala, koje okomito sijeku neku kuglu, a središta su im na nekoj plohi 2. reda.

Odaberimo sada neku rotacionu plohu Φ 2. reda, na osi koje se nalazi realan par fokusa osnih presjeka te plohe, a na toj osi odaberimo i pol *P*. Nožišna ploha ove plohe Φ za pol *P* bit će koaksijalna ciklida, kojoj je pol *P* dvostruka točka. Svaki osni prijesjek ove ciklide možemo smatrati kao nožišnu krivulju prijesjeka plohe Φ s istom ravninom za isti pol *P*, ali istovremeno ga možemo smatrati i kao envelopu kružnicu u toj presječnoj ravnini, koje prolaze točkom *P*, a središta su im na nekoj krivulji

[5] *G. Darboux,* Principes de géométrie analytique, Paris 1917., str. 407.

[6] *Müller R., Graf U.,* Zykliden als Fusspunktflächen, Mh. Math. Phys. 44, 71–84 (1936)

l 2. reda. Točke ove krivulje l čine polovišta spojnica točke P s točkama presječne krivulje plohe Φ s istom ravninom, kako nam je to poznato iz toč. II. Na temelju razmatranja u toč. I. i II. prema tome izlazi, da će realni (F_1, F_2) i konjugirano imaginarni fokusi ovakve krivulje l, koja je 2. reda, biti identični s četvorostrukim fokusima bicirkularnog osnog prijesjeka ciklide u istoj ravnini. Budući da su i ploha Φ i naša ciklida rotacione plohe, imaju svi osni presjeci isti realan par fokusa kod plohe Φ, a prema tome i svi bicirkularni osni presjeci ciklide imaju taj isti par realnih četvorostrukih fokusa F_1, F_2. Krivulje l svih osnih prijesjeka čine plohi Φ koaksijalnu sličnu plohu Ψ 2. reda, a njezine točke opet možemo smatrati za polovišta spojnica točke P s točkama plohe Φ. U polovištima spojnice točke P s oba fokusa osnih presjeka plohe Φ nalaze se isto takvi fokusi, F_1, F_2, plohe Ψ, dakle i četvorostruki fokusi osnih prijesjeka naše rotacijske ciklide.

Odaberimo opet jedan osni prijesjek naše ciklide i plohe Ψ. Znademo, da je ovaj simetričan bicirkularni prijesjek ciklide envelopa kružnica, koje prolaze točkom P, a središta su im na presječnoj krivulji 2. reda plohe Ψ s istom ravninom. Svakom ovom kružnicom postavimo sada kuglu tako, da kružnica i kugla imaju zajedničko središte. Zavrtimo li taj prijesjek sa svim tim kuglama, dobit ćemo našu rotacionu ciklidu kao envelopu kugala, koje prolaze točkom P, a središta su im na plohi Ψ. Ovo je zapravo sprijeda spomenuta *Moutard*ova definicija ciklida 4. reda, samo je u ovom slučaju točka P kugla stisnuta u jednu točku. Saberemo li rezultate naših dosadanjih razmatranja, možemo ih izreći ovim stavkom:

Na osi nekog rotacionog izduženog elipsoida, ili rotacionog dvoplošnog hiperboloida, odaberimo neku točku P i njom postavimo sve kugle, kojima su središta na toj rotacionoj plohi 2. reda. Sve takve kugle omataju neku rotacionu ciklidu 4. reda, kojoj se zajednički realni četvorostruki fokusi svih osnih prijesjeka nalaze u fokusima osnih prijesjeka te rotacione plohe 2. reda.

Budući da se i realan i konjugirano imaginaran par četvorostrukih fokusa bicirkularnih osnih prijesjeka naše ciklide podudara s realnim i konjugirano imaginarnim fokusima prijesjeka spomenutog rotacionog elipsoida ili hiperboloida, leže svi imaginarni četvorostruki fokusi osnih presjeka na imaginarnoj kružnici u simetralnoj ravnini tog elipsoida ili hiperboloida, okomitoj na njihovoj osi. Na toj osi nalazi se naravski i središte te kružnice. U ovoj imaginarnoj kružnici siječe ova simetralna ravnina kuglu opisanu oko jednog tjemena našeg spomenutog rotacionog elipsoida, kojoj je polumjer jednak polumjeru najšire paralele (ekvatora) tog elipsoida. Ovo izlazi iz poznate definicije imaginarnih fokusa elipse, koji se dobiju kao sjecište pravca male osi s kružnicom opisanom oko tjemena velike osi, kojoj je promjer jednak veličini male osi. Uzme li se u obzir imaginarnost male osi kod hiperbole, dade se lako odrediti takva imaginarna kružnica i kod rotacionog dvoplošnog hiperboloida. Kad bismo namjesto produženog uzeli spljošteni rotacioni elipsoid, ili namjesto dvoplošnog jednoplošni rotacioni hiperboloid, bila bi ova kružnica realna, a opisani par istaknutih točaka F_1, F_2 na osi ovakve rotacione ciklide bio bi konjugirano imaginaran.

VI. Pretpostavimo, da naša rotaciona ciklida ima na svojoj osi opet realan par opisanih točaka F_1, F_2. Kako znamo, te su točke vrhovi imaginarnih stožaca 2. reda, koji ovu ciklidu tangiraju duž apsolutne čunjosječnice. Izvodnice ovih stožaca su prema tome izotropni pravci. Postavimo sada, recimo točkom F_1, po volji neku ravninu ϱ. Našu ciklidu siječe ta ravnina u bicirkularnoj krivulji 4. reda, kojoj je točka F_1 sigurno jedan četvorostruki fokus. Nameće se međutim pitanje, a gdje je drugi četvorostruki fokus te krivulje? Odnosno, ovdje možemo postaviti pitanje, a gdje su uopće realni četvorostruki fokusi bicirkularnog prijesjeka naše ciklide bilo kojom ravninom prostora? Točka F_1 našeg prijesjeka je njegov četvorostruki fokus zato, što ravnina prijesjeka siječe izotropni stožac vrha F_1 u paru izotropnih izvodnica, koje su tangente ove presječne krivulje u njenim apsolutnim točkama. Pomaknemo li ravninu prijesjeka paralelno, imat će te dvije ravnine u neizmjernosti zajednički neizmjerno daleki pravac, dakle presječne krivulje obiju ravnina prolaze istim apsolutnim točkama. Četverostruki fokus presječne krivulje u ovoj drugoj ravnini nalazit će se u realnoj presječnici imaginarnih tangencijalnih ravnina izotropnog stošca duž njegovih izotropnih izvodnica u prvoj ravnini. Taj će se fokus nalaziti prema tome na konjugiranoj zraci ravnini prvog prijesjeka (koja ide točkom F_1), s obzirom na izotropni stožac vrha F_1, dakle na pravcu postavljenom u točki F_1 okomito na položaj obiju ravnina. Pomaknemo li ravninu ovakvog prijesjeka paralelno u točku F_2, sve će se ponoviti, kao da radimo s točkom F_1, dakle vrijedi isto i za vrh F_2 drugog tangencijalnog izotropnog stošca. Naša razmatranja dovode nas prema tome i do ovog stavka:

Ako je rotaciona ciklida envelopa kugala, koje prolaze njenom dvostrukom točkom, a središta su im na koaksijalnom izduženom rotacionom elipsoidu, ili na koaksijalnom dvoplošnom rotacionom hiperboloidu, onda su realni četvorostruki fokusi svakog ravninskog prijesjeka te ciklide identični s okomitim projekcijama zajedničkih realnih fokusa osnih prijesjeka tih rotacionih ploha 2. reda na ravnine tih prijesjeka.

Iz sprijeda spomenutog stavka znademo, da se zajednički fokusi osnih prijesjeka ovih rotacionih ploha 2. reda podudaraju sa četvorostrukim fokusima osnih prijesjeka naše rotacione ciklide. Na temelju ovoga, kao i ostalih naših razmatranja, može se vrlo jednostavno dobiti geometrijsko mjesto četvorostrukih fokusa prijesjeka naše rotacione ciklide s ravninama nekog pravca, ili neke točke. Na pr. *četvorostruki fokusi prijesjeka s ravninama dvostruke točke (prijesjeci roda nultoga) leže na dvije kugle, kojima su promjeri dužine ograničene dvostrukom točkom ciklide i zajedničkim četvorostrukim fokusima njenih osnih prijesjeka.*

Ako je ciklida izvedena kao nožišna ploha nekog rotacionog elipsoida, ili dvoplošnog rotacionog hiperboloida, onda se na temelju dosadašnjih razmatranja dadu vrlo lako konstruktivno odrediti opisane istaknute točke F_1, F_2 ove ciklide.

VII. Uzmemo li namjesto spomenutog rotacionog elipsoida, odnosno hiperboloida, kuglu Ψ, i negdje izvan kugle, u njoj, ili na samoj kugli točku P, onda će envelopa svih kugala ove točke P, kojima je središte na kugli Ψ, biti specijalna ciklida 4. reda, kod koje istaknute točke F_1, F_2, na njenoj osi padaju skupa u središte kugle Ψ. Ovakva ciklida tangira sama sebe i kuglu duž apsolutne čunjosječnice. Svaki ravninski bicirkularni prijesjek ovakve plohe ima jedan 16-struki fokus, koji se nalazi u okomitoj projekciji središta kugle Ψ na tu ravninu prijesjeka. U taj fokus povukla su se oba realna i oba imaginarna četvorostruka fokusa tog bicirkularnog prijesjeka, jer su se i sva četiri fokusa osnih prijesjeka kugle Ψ povukla u njeno središte.

VIII. Saznali smo u točkama VI i VII, da rotacione ciklide imaju duž apsolutne čunjosječnice dva imaginarna tangencijalna stošca 2. reda, kojih se realni vrhovi nalaze na njihovim osima. Ova dva stošca padaju skupa, ako je ciklida nožišna ploha kugle. Pomoću naših razmatranja u toč. I i II otkrit ćemo sada još i dalje ciklide, koje duž apsolutne čunjosječnice diraju dva imaginarna stošca s realnim vrhovima, a koje nisu rotacione.

Vidjeli smo, da svaku bicirkularnu krivulju 4. reda, koja je nožišna krivulja, možemo smatrati i kao envelopu kružnica. Analogno vrijedi i za rotacione ciklide, budući da je ploha Ψ geometrijsko mjesto polovišta spojnica pola P sa svim točkama plohe Φ (toč. V.).

Odaberimo opet neki izduženi rotacioni elipsoid ili rotacioni dvoplošni hiperboloid Φ, kojemu su točke E_1, E_2 zajednički fokusi meridijanskih prijesjeka. Pol P neka bude po volji unutar plohe na njoj ili izvan te plohe, ali ne na njenoj osi. Postavimo sada na plohu Φ neki dirni valjak. Sve okomice postavljene točkom P na tangencijalne ravnine toga valjka, koje su i tangencijalne ravnine plohe Φ, nalaze se u jednoj ravnini, koja je okomita na tom valjku. Nožišta tih okomica na tim ravninama podudarat će se prema tome s nožištima okomica spuštenih iz točke P na tangente presječne krivulje tog valjka s tom okomitom ravninom. Budući da je taj presjek krivulja 2. reda, naša će nožišna krivulja u toj okomitoj ravnini biti bicirkularna krivulja 4. reda. Svakoj ravnini točke P pridružen je na taj način jedan na nju okomit tangencijalan valjak plohe Φ, dakle se u svakoj takvoj ravnini nalazi jedna bicirkularna krivulja 4. reda. Sve te krivulje čine nožišnu plohu rotacione kvadrike Φ za pol P, koji će opet biti njena dvostruka točka.

Vratimo se našem prvom tangencijalnom valjku i ravnini postavljenoj točkom P okomito na taj valjak. Fokusi E_1, E_2 osnih prijesjeka naše rotacione kvadrike su realni vrhovi njenih imaginarnih tangencijalnih stožaca duž njenih prijesjeka s polarnim ravninama tih vrhova s obzirom na tu kvadriku. Ovi imaginarni tangencijalni stošci su međutim sastavljeni od samih izotropnih izvodnica, dakle prolaze i apsolutnom čunjosječnicom. Povucimo sada točkama E_1, E_2 pravce e_1, e_2 usporedno s izvodnicama našeg po volji odabranog tangencijalnog valjka. Parovi izotropnih ravnina, t. j. takvih, koje tangiraju spomenute izotropne stošce, koje prolaze tim pravcima, tangiraju i našu plohu Φ. Sijecimo sada naš tangencijalni valjak ravninama, koje prolaze neizmjerno dalekom polarom neizmjerno daleke zajedničke točke pravaca e_1, e_2 kao pola, s obzirom na apsolutnu čunjosječnicu. Drugim riječima to znači okomitim ravninama na tom valjku. Imaginarne tangente presječnih čunjosječnica, povučene iz apsolutnih točaka u tim presječnim ravninama, sjeći će se u probodištima pravaca e_1, e_2 budući da su te tangente presječnice onih izotropnih tangencijalnih ravnina plohe Φ. Vidimo dakle, da će probodišta pravaca e_1, e_2 s takvim okomitim presječnim ravninama biti fokusi E'_1, E'_2 presječnih čunjosječnica tih valjaka.

Shvatimo li smjer izvodnica naših tangencijalnih valjaka rotacione plohe kao smjer projiciranja, onda je evidentno, da svaku njenu nožišnu plohu, za bilo koji pol P, možemo smatrati kao geometrijsko mjesto nožišnih krivulja ortogonalnih projekcija te rotacione kvadrike na sve ravnine pola P, za tu točku uvijek kao pol. U našem slučaju, budući da je ploha Φ rotaciona s zajedničkim realnim fokusima E_1, E_2 svih svojih meridijanskih prijesjeka, vrijedi još i činjenica, koju smo nedavno izveli, t. j. da se fokusi E'_1, E'_2 tih ortogonalnih projekcija plohe Φ, na sve ravnine pola P, podudaraju s ortogonalnim projekcijama zajedničkih fokusa E_1, E_2 osnih prijesjeka te rotacione plohe.

Vidjeli smo u toč. I i II, da se četvorostruki fokusi bicirkularne krivulje 4. reda, ako je ona nastala kao nožišna krivulja neke krivulje 2. reda, nalaze u polovištu spojnice pola s fokusima te krivulje 2. reda. Učinimo li to isto sada u svakoj ravnini pola P, onda će svi tako nastali četvorostruki fokusi F_1', F_2' presječnih krivulja naše ciklide s ravninama pola P, biti zapravo okomite projekcije na te ravnine onih točaka F_1, F_2, koje se nalaze u polovištima dužina PE_1, PE_2. U paralelnoj se projekciji polovište neke dužine projicira uvijek u polovište projekcije te dužine. Odavle direktno proizlazi činjenica, da se geometrijsko mjesto četvorostrukih fokusa svih ravninskih prijesjeka ovakve ciklide, ravninama točke P, sastoji od dvije kugle.

Činjenica, da se četvorostruki fokusi ravninskih presjeka naše ciklide, s ravninama točke P, nalaze uvijek u okomitoj projekciji nekih posve određenih stalnih točaka F_1, F_2, govori nam nadalje i to, da su te točke F_1, F_2 realni vrhovi izotropnih tangencijalnih stožaca naše ciklide duž apsolutne čunjosječnice. Ovo proizlazi direktno iz definicije fokusa uopće, kao i iz činjenice, da svi izotropni parovi ravnina, postavljeni točkama F_1, F_2, omataju imaginarne izotropne stošce. Možemo prema tome izreći ovakav stavak:

Nožišne plohe izduženih rotacionih elipsoida i rotacionih dvoplošnih hiperboloida, za bilo koji pol P, takve su ciklide, kojih imaginarne tangencijalne ravnine duž njihove dvostruke apsolutne čunjosječnice omataju dva izotropna stošca, kojih se realni vrhovi F_1, F_2 *nalaze u polovištima spojnica pola P sa zajedničkim fokusima osnih prijesjeka tih rotacionih ploha 2. reda.*

Posve je razumljivo, da će dvostruka točka P i ovakvih ciklida biti normalna, šiljak ili izolirana prema tome, da li se ona nalazi izvan temeljne rotacione plohe 2. reda, na njoj ili u njoj.

Vidjeli smo u točki VI, da sve paralelne ravnine u konačnosti sijeku neizjmjerno daleku apsolutnu čunosječnicu u iste dvije točke, kojima možemo na svaki naš izotropni tangencijalni stožac postaviti dvije imaginarne tangencijalne ravnine. Ove naravski prolaze realnim vrhovima tih stožaca, a realna im je presječnica okomita na spomenute paralelne ravnine u konačnosti. Četvorostruki fokusi presječnih krivulja naše ciklide s takvim paralelnim ravninama nalazit će se prema tome na toj okomitoj realnoj prijesječnici, a to s drugim riječima znači ovo:

Četvorostruki fokusi svih ravninskih prijesjeka naših opisanih ciklida leže i ovdje u okomitim projekcijama točaka F_1, F_2 na ravnine tih prijesjeka.

Poznata je činjenica, da se nožišna krivulja neke centralne krivulje 2. reda raspada u realnu i imaginarnu kružnicu, ako se pol nalazi u fokusu te krivulje. Posve analogno je nožišna ploha izduženog rotacionog elipsoida ili dvoplošnog rotacionog hiperboloida, realna i imaginarna kugla, ako se pol nalazi u fokusu svih osnih prijesjeka tih rotacionih kvadrika. Postavimo li prema tome točkom P ravninu okomitu, recimo na spojnicu PE_1, sjeći će ta ravnina nužno našu ciklidu u kružnici, budući da će se pol P podudarati s jednim fokusom (E_1') ortogonalne projekcije rotacione plohe Φ na tu ravninu. Isto to naravski vrijedi i za spojnicu PE_2. Vidimo dakle, da na našoj specijalnoj ciklidi postoje dvije kružnice, kojih ravnine prolaze dvostrukom točkom P, i u kojima se nalaze samo te kružnice kao realni dijelovi te ciklide. Prijesječnica ovih dviju ravnina prolazi dvostrukom točkom P, a siječe i obje te kružnice. Budući da je naša ciklida četvrtog reda, kojoj je točka P dvostruka točka a nijedna od tih kružnica ne prolazi tom dvostrukom točkom, sijeku se te dvije kružnice u dvije točke te presječnice, koje su probodišta te presječnice s ciklidom. Znademo, da svaka kugla prolazi apsolutnom čunjosječnicom, dakle dvostrukom čunjosječnicom naše ciklide. Prema tome će kugla, koja je određena s te dvije kružnice, prodirati tu ciklidu realno samo u te dvije kružnice. Središte svake ove kružnice nalazi se u okomitoj projekciji točke F_1, odnosno F_2, na njenu ravninu. Ovo proizlazi iz činjenice, da se točka F_1 nalazi u polovištu dužine PE_1, a točka F_2 u polovištu dužine PE_2, pa okomite projekcije točaka F_1 i F_2 na ravnine tih kružnica padaju u polovišta dužine PE_1', odnosno PE_2' u tim ravninama, za koje znademo, da su središta tih kružnica, jer su središta i okomitih projekcija plohe Φ na ravnine tih kružnica. Središte kugle ovih dviju kružnica identično je sa središtem plohe Φ, budući da se ovo okomito projicira na ravnine tih kružnica u njihova središta. Svakom ovom kružnicom možemo međutim zasebno postaviti ∞^1 kugala, a svaka će od njih prodirati našu ciklidu u još jednoj kružnici, jer cio prostor mora biti 8. reda. Središta tih kugala nalazit će se na spojnici središta plohe Φ sa središtem jedne, odnosno druge kružnice u ravninama točke P. U ravnini svake ovakve nove kružnice mora se nadalje nalaziti još jedna kružnica, kojoj će središte pasti u okomitu projekciju točke F_1, odnosno F_2, na njenu ravninu prema tome, da li smo kuglu postavili kružnicom u okomitoj ravnini na spojnicu PF_1, ili PF_2. Svaku ovakvu novu kružnicu možemo smatrati kao jedini realni dio prodorne krivulje naše ciklide s kuglom, kojoj je središte u točki F_1, odnosno F_2. Ovaj se prodor sastoji samo od jedne kružnice zato, što ovakva kugla, kojoj je središte F_1, odnosno F_2, prodire i tangira našu ciklidu duž apsolutne čunjosječnice. Vidimo prema tome, da i za naše specijalne ciklide postoji neizmjerno mnogo ravnina, koje je sijeku u parovima kružnica, kako je to poznato i kod ostalih ciklida.

Poznata je činjenica, da sve simetralne točke jednog fokusa (suprotišta) bilo koje krivulje 2. reda (osim parabole), s obzirom na tangente te krivulje kao osi simetrije, leže na jednoj kružnici. Središte je te kružnice u drugom fokusu, a polumjer joj je jednak velikoj osi te krivulje 2. reda. Analogno ovome sve simetrične točke jednog zajedničkog fokusa svih osnih prijesjeka nekog izduženog rotacionog elipsoida, ili dvoplošnog rotacionog hiperboloida, s obzirom na tangencijalne ravnine te plohe kao simetralne ravnine, leže na jednoj kugli. Središte ove kugle je u drugom zajedničkom fokusu osnih prijesjeka te rotacione plohe 2. reda, a polumjer te kugle jednak je poluosi te plohe 2. reda. Odaberemo li sada naš pol P na jednoj od ovih kugala, past će točke F_1, odnosno F_2, na površinu naše ciklide, jer se one nalaze, kako smo vidjeli, u polovištu spojnice PE_1, ili PE_2. Spomenute kugle, opisane oko središta E_1, E_2 prodiru se u kružnici, koja se nalazi u simetralnoj ravnini te rotacione plohe okomitoj na njenu os, a polumjer joj je $r = \sqrt{4a^2 - e^2}$, ako je $2a$ dužina osi, a e udaljenost fokusa osnih prijesjeka do središta te rotacione plohe Φ 2. reda. Odaberemo li sada pol P na ovoj kružnici, tad će i točka F_1 i točka F_2 pasti na površinu naše ciklide, jer će nožišta spojnica PE_1, PE_2, u njima pridruženim tangencijalnim ravninama plohe Φ, biti točno u polovištima tih dužina, dakle u točkama F_1, F_2. Sve naše dosadanje ciklide imale su jednu simetralnu ravninu, a ove posljednje imaju dvije.

Iz ovih se naših razmatranja vidi, da će nožišna ploha kugle imati svoj 16-struki fokus na svojoj površini onda, ako se pol P nalazi negdje na koncentričnoj kugli dvostrukog polumjera. Taj će se fokus nalaziti na nutarnjem tjemenu te specijalne rotacione ciklide.

IX. Odaberemo li dvije kugle kao neku degeneriranu plohu 4. reda (ciklidu), tad vidimo na temelju naših dosadanjih razmatranja, da naše specijalne ciklide imaju s ovakvom degeneriranom plohom 4. reda analogne osobine. Istaknute točke F_1, F_2 ove degenerirane plohe nalaze se u središtima tih kugala. Evo nekoliko takvih osobina:

Četvorostruki fokusi svih ravninskih prijesjeka s ravninama jedne točke nalaze se na dvije kugle.

Ili ova: *Četvorostruki fokusi ravninskih prijesjeka s ravninama jednog pravca nalaze se na dvije kružnice, koje prolaze točkama F_1, F_2, a okomito sijeku taj pravac u dijametralnim točkama tih točaka.*

Budući da je realan dio prodorne krivulje svake kugle s našom specijalnom ciklidom prostorna krivulja 4. reda (ciklika), sjeći će ∞^1 *ravnina neke točke našu ciklidu tako, da će četvorostruki fokusi njenih ravninskih prijesjeka biti na njoj samoj, a svi ti fokusi leže na toj ciklidi duž dviju ciklika (prostornih krivulja 4. reda na kugli).*

Sve ovo proizlazi iz činjenice, da se četvorostruki fokus svakog ravninskog presjeka naših specijalnih ciklida nalaze u okomitim projekcijama točaka F_1, F_2 na te ravnine. Svakom točkom prostora možemo međutim postaviti okomite ravnine na spojnice te točke s točkama F_1, F_2, dakle vrijedi za naše ciklide i ovaj stavak:

Svakom točkom prostora prolaze dvije ravnine tako, da one našu specijalnu ciklidu sijeku u bicirkularnoj krivulji 4. reda na taj način, da joj je jedan četvorostruki fokus u toj točki.

Odaberemo li neku točku na spojnici točaka F_1, F_2, pa tom točkom postavimo okomitu ravninu na tu spojnicu i njom presiječemo tu ciklidu našeg tipa, tad će ortogonalne projekcije obiju točaka F_1, F_2 na tu ravninu pasti u istu točku. Presječna bicirkularna krivulja 4. reda s tom ravninom imat će prema tome u toj točki svoj 16-struki fokus. Znademo, da ovakva krivulja sama sebe dira u apsolutnim točkama, kao što to recimo čine dvije koncentrične kružnice. Za naše specijalne ciklide vrijedi prema tome i ovo:

Za svaku našu specijalnu ciklidu, kao nožišnu plohu nekog rotacionog izduženog elipsoida, ili rotacionog dvoplošnog hiperboloida, postoji jedan pramen usporednih ravnina, koje ove ciklide sijeku u takvim bicirkularnim krivuljama 4. reda, koje same sebe diraju u apsolutnim točkama. 16-struki realni fokusi ovakvih krivulja nalaze se na spojnici realnih vrhova izotropnih tangencijalnih stožaca tih ciklida duž apsolutne čunjosječnice, a ravnine tog pramena su na toj spojnici okomite.

Budući da su ravninski prijesjeci naših ciklida roda nultoga samo oni, kojih ravnine prolaze polom P kao dvostrukom točkom, možemo zabilježiti i ovu osobinu naših specijalnih ciklida, imajući pred očima činjenicu, da je spojnica karakterističnih točaka F_1, F_2 usporedna s osi plohe Φ:

Na svakoj nožišnoj plohi nekog rotacionog izduženog elipsoida, ili rotacionog dvoplošnog hiperboloida, postoji samo jedna bicirkularna krivulja 4. reda roda nultoga sa 16-strukim fokusom. Ravnina ove krivulje prolazi dvostrukom točkom te ciklide, a okomita je na osi te rotacione plohe 2. reda.

Kod onih naših ciklida na kojih se površini nalazi točka F_1 ili F_2, sijeku naravski i sve ravnine tih točaka ovakvu ciklidu u bicirkularnoj krivulji 4. reda s četvorostrukim fokusom na njima samima.

Ako su obje točke F_1, F_2 na takvim ciklidama, onda je evidentno, da unutar ova dva snopa ravnina postoji jedan pramen ravnina, kojemu će spojnica F_1, F_2 biti os, a koje takvu ciklidu sijeku u bicirkularnim krivuljama s oba četvorosruka fokusa na njima samima.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 5. VI. 1953.

EXTRAIT DE »RAD« DE L'ACADÉMIE YOUGOSLAVE,
TOME 296, pp. 185-197

V. Niče

SUR LES PROPRIÉTÉS FOCALES DES COURBES BICIRCULAIRES ET DE CERTAINES CYCLIDES DU 4e ORDRE*

La courbe bicirculaire du 4e ordre du genre 0 peut être définie comme courbe pédale d'une courbe du 2e ordre, si celle-ci n'est pas une parabole. Le pôle S de cette courbe sera son point double. En termes de la géométrie synthétique cela peut s'exprimer comme il suit. Dans le plan choisissons à volonté une courbe k du 2e ordre qui n'est pas une parabole, et un point S. Sur la droite à l'infini, choisissons deux points conjugués dans l'involution absolue de cette droite. Les points d'intersection des droites tangentes à la courbe k et passant par un de ces deux points conjugués, et de la droite de jonction de l'autre point et du point S, se trouvent sur une courbe bicirculaire du 4e ordre du genre 0 dont le point S et les points absolus du plan sont les points doubles. La droite à l'infini étant remplacée par une droite quelconque p et les points absolus par une paire de points réels M, N sur cette droite comme paire de points doubles d'une involution hyperbolique, les points d'intersection obtenus par le même procédé décriront une courbe du 4e ordre du genre 0, dont les points M, N, S seront les points doubles. Soient a la droite MS, a_1 la droite NS, c et c_1 les tangentes à la courbe k menées par M, et d, d_1 les tangentes passant par N. Les tangentes à la courbe du 4e ordre au point M étant m_1, m_2 et les tangentes au point N étant n_1, n_2, on aura les rapports anharmoniques $(capm_1) = -1$, $(c_1apm_2) = -1$, $(dbpn_1) = -1$ et $(d_1bpn_2) = -1$. Cela découle immédiatement de la division harmonique formée par les points doubles d'une involution hyperbolique et une paire de points conjugués de cette involution.

On sait, de plus, que toute courbe pédale d'une courbe k du 2e ordre peut être considérée comme enveloppe des cercles passant par le point double de cette courbe pédale et ayant leurs centres sur la courbe homo-

* Le titre original de ce travail: *O fokalnim osobinama bicirkularnih krivulja i nekih ciklida 4. reda.*

thétique l du 2e ordre, formée par les points de bissection des segments de droites joignant S et les points de la courbe k.

Compte tenu de tout cela en obtient le théorème suivant:

Les foyers quadruples réels et imaginaires d'une courbe bicirculaire du 4e ordre du genre 0 coïncident avec les foyers réels et imaginaires de la courbe du 2e ordre contenant les centres de tous les cercles qui enveloppent cette courbe bicirculaire et passant par son point double réel.

Si la courbe bicirculaire du 4e ordre est générée comme courbe pédale d'une courbe du 2e ordre, il est évident que ses foyers quadruples se trouvent aux points de bissection entre le point double S de cette courbe bicirculaire et les foyers de la courbe k.

Si la courbe k, donc aussi la courbe l, est un cercle, il est clair que la courbe bicirculaire du 4e ordre et du genre 0 aura un foyer 16-uple au centre du cercle l.

Nous allons nous servir de ces propriétés des courbes bicirculaires du 4e ordre pour la recherche des propriétés de certaines surfaces générales du 4e ordre qu'on obtient comme surfaces pédales d'une surface du 2e ordre (cyclides). Ces surfaces sont connues comme surfaces du 4e ordre passant deux fois par la conique absolue.

Sur l'axe d'un ellipsoïde de révolution allongé ou sur l'axe d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes, que nous appelons Φ, nous choisissons un point P comme pôle de la surface pédale par rapport à cette surface Φ. La surface pédale obtenue sera une cyclide de révolution, coaxiale à la surface Φ et ayant un point double au point P. Toutes les sections axiales de la surface Φ ont des foyers réels communs E_1, E_2 sur l'axe de cette surface. On déduit des résultats obtenus que les sommets réels F_1, F_2 des cônes imaginaires tangents à une telle cyclide de révolution suivant la conique absolue se trouvent aux points de bissection des segments PE_1, PE_2, sur l'axe de la cyclide. Nous voyons donc qu'il existent deux cônes isotropes tangents à la cyclide de révolution suivant la conique absolue. Les sommets réels F_1, F_2 de ces cônes se trouvent sur l'axe de la cyclide aux points de bissection entre son point double et les foyers des sections axiales de la surface fondamentale Φ du 2e ordre de la cyclide.

Si l'on considère chaque section méridienne c de la cyclide comme enveloppe des cercles passant par le point P, les centres de ces cercles dans le plan de chaque méridien seront sur une courbe du 2e ordre dont les foyers sont les points F_1, F_2 et dont les points sont les points de bissection entre le point P et les points d'intersection de la surface Φ avec le plan méridien respectif. Si le plan de ces sections méridiennes tourne autour de l'axe de la cyclide de révolution, toutes les courbes l formeront une surface de révolution Ψ du 2e ordre dont les sections axiales auront les points F_1, F_2 comme foyers, et qui sera coaxiale et homothétique à la surface Φ.

Chaque plan méridien d'une surface de révolution étant son plan de symétrie, on peut remplacer par des sphères de même rayon tous les cercles enveloppant la section méridienne c de notre cyclide, leurs centres étant sur la section méridienne l de la surface Ψ. En faisant tourner le plan méridien autour de l'axe on obtiendra ainsi la même cyclide comme enveloppe de ces sphères passant par le point P et ayant leurs centres sur la surface coaxiale Ψ du 2^e ordre dont les foyers communs des sections axiales coïncident avec les points F_1, F_2 de la cyclide.

On sait qu'une droite perpendiculaire à un plan est conjuguée à ce plan par rapport au cône isotrope. Par conséquent, les tangentes aux sections bicirculaires de notre cyclide par des plans parallèles, menées par les points absolus communs de ces sections, se coupent sur des droites passant par les points F_1, F_2 et perpendiculaires aux plans des sections.

Il s'ensuit encore qu'on obtient les foyers quadruples des sections planes d'une cyclide de révolution, générée comme enveloppe des sphères passant par un point P situé sur l'axe d'un ellipsoïde de révolution allongé ou d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes Ψ et ayant leurs centres sur cette surface Ψ, en projetant perpendiculairement les foyers F_1, F_2 des sections axiales de la surface Ψ sur les plans des sections de la cyclide.

On reconnaît l'analogie avec la sphère en ce qui concerne le lieu géométrique des foyers quadruples (centres) de ses sections planes, dont les plans passent par un point ou par une droite. Deux sphères peuvent être considérées comme cas dégénéré d'une telle cyclide de révolution.

Si la surface Ψ est une sphère, les points F_1, F_2 coïncident avec son centre, et la cyclide de révolution obtenue touchera elle-même suivant la conique absolue. La projection normale de ce centre sur le plan de chaque section d'une telle cyclide sera toujours un foyer 16-uple de cette section bicirculaire.

Choisissons maintenant le pôle P n'importe où, sur la surface Φ, en dehors ou en dedans d'elle. La surface pédale sera de nouveau une cyclide, mais elle ne sera plus de révolution. Coupons perpendiculairement un cylindre quelconque tangent à la surface Φ par un plan passant par le point P. La courbe pédale de la section conique obtenue se trouvera sur la cyclide déterminée par un tel pôle P. Les foyers de cette section conique seront les projections normales E_1', E_2' des foyers communs E_1, E_2 des sections méridiennes de la surface Φ sur le plan de cette section conique. Les foyers quadruples de la courbe pédale se trouveront donc aux points de bissection des segments PE_1', PE_2'. Cela étant vrai pour n'importe quel cylindre tangent à la surface Φ, donc pour toute section de la cyclide par des plans passant par le point P, on en déduit que les foyers quadruples de chaque section par un plan du point P sont les projections normales des points de bissection F_1, F_2 des segments PE_1, PE_2 sur le plan de la section. Compte tenu des résultats obtenus en connexion avec la conique absolue et des faits concernant les points F_1, F_2 on conclut facilement que les points F_1, F_2 sont de nouveau les sommets réels des cônes isotropes tangents à la cyclide suivant sa conique absolue double. Par conséquent, on retrouve, pour cette espèce de cyclides, toutes le propriétés des cyclides considérées précédemment et aussi l'analogie avec la sphère, respectivement avec deux sphères considérées comme cas dégénéré d'une cyclide du 4^e ordre.

Si nous envisageons les cylindres tangents à la surface Φ dont les génératrices sont parallèles aux droites PE_1 ou PE_2, les courbes pédales considérées des sections normales de ces cylindres seront des cercles, car le point P coïncide avec le foyer de chacune de ces sections. Les plans du point P perpendiculaires aux droites PE_1 ou PE_2 coupent donc la cyclide suivant des cercles. Chaque sphère passant par un de ces deux cercles coupe la cyclide suivant un deuxième cercle, car elle passe par la conique absolue double de la cyclide. Toutes les sphères ayant comme centre les points F_1 ou F_2 coupent la cyclide suivant un cercle seulement, car elles touchent la cyclide suivant sa conique absolue double.

Le pôle P étant choisi convenablement, un ou deux des points F_1, F_2 peuvent se trouver sur la cyclide. Au cas de la surface pédale de la sphère les points F_1, F_2 coïncident et ce point sera sur la cyclide si le point P se trouve sur la sphère concentrique à la sphère Φ qui a le rayon double.

A partir des résultats obtenus on déduit encore facilement les théorèmes suivants:

a) Par chaque point de l'espace on peut mener deux plans coupant la cyclide suivant une courbe bicirculaire du 4[e] ordre dont un foyer quadruple coïncide avec ce point.

b) Chaque cyclide de l'espèce décrite admet un faisceau de plans parallèles coupant la cyclide suivant des courbes bicirculaires du 4[e] ordre qui touchent eux-mêmes aux points absolus, c. à. d. dont les foyers quadruples coïncident.

Toutes ces sections bicirculaires sont du genre 1, à l'exception de celui qui passe par le point double P. Donc:

c) Chaque cyclide de l'espèce considérée ne possède qu'une section bicirculaire du 4[e] ordre du genre 0 ayant un foyer 16-uple.

Comme les foyers quadruples des sections bicirculaires de nos cyclides par les plans d'un point se trouvent sur deux sphères, il s'ensuit encore:

d) Par chaque point de l'espace passent deux systèmes de ∞^1 plans coupant la cyclide suivant des courbes bicirculaires dont un des foyers quadruples se trouve sur la courbe même. Les foyers quadruples engendrent deux courbes gauches sphériques du 4[e] ordre (courbes cycliques) situèes sur la cyclide.