JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI
I UMJETNOSTI

VILIM NIČE

Izolirane kružne točke na pravčastim plohama 3. i 4. reda

ZAGREB

1953

VILKO NIČE

IZOLIRANE KRUŽNE TOČKE NA PRAVČASTIM PLOHAMA 3. I 4. REDA

Uvod

Homotetičnim čunjosječnicama nazivamo takve čunjosječnice, koje prolaze istim dvjema neizmjerno dalekim točkama. Budući da svaka čunjosječnica pravčaste plohe 3. i 4. reda siječe svaku njenu izvodnicu, bit će centralne projekcije svih čunjosječnica takvih ploha, iz neke točke njihove višestruke linije, na ravnine usporedne s parom izvodnica, koje se u toj točki sijeku, homotetične[1]. Budući da su sve kružnice neke ravnine homotetične, nameće nam se ovakvo pitanje: Postoje li na višestrukim linijama svih, ili samo nekih pravčastih ploha 3. i 4. reda točke, koje će biti takav centar projiciranja, da projekcije svih čunjosječnica tih ploha na ravnine usporedne s parom izvodnica te točke budu kružnice? Ili drugim riječima: Postoje li točke, i koliko ih ima, na višestrukim linijama svih, ili samo nekih pravčastih ploha 3. i 4. reda, kojima prolazi par njihovih izotropnih izvodnica? Kod kosih konoida 3. i 4. reda ova dva pitanja nisu identična, ako se radi o njihovoj neizmjerno dalekoj dvostrukoj točki. Ali na to ćemo se još kasnije osvrnuti.

Takvim problemom bavit ćemo se u ovom radu. One točke ploha 2. reda, kojima prolazi par njihovih izotropnih izvodnica, zovu se kružne točke. Analogno zvat ćemo tražene točke kružnim točkama pravčastih ploha 3. i 4. reda. Na ovakvim plohama ima međutim općeno 18, odnosno 24 kružne točke ($6n$ ako je n red plohe. R. Sturm). Kako su u našem slučaju kružne točke sjecišta izotropnog para izvodnica takvih ploha na izoliranom dijelu njihovih višestrukih linija, nazvat ćemo ove naše kružne točke izoliranim kružnim točkama pravčastih ploha 3. i 4. reda.

Kružne točke ploha 2. reda ne podudaraju se u svim svojim svojstvima s ovim našim izoliranim kružnim točkama. Na pr. u zakrivljenosti, jer je kružna točka pravčastih ploha 3. i 4. reda na izoliranom dijelu dvostrukog pravca, odnosno krive linije, tih ploha.

[1] Vidi radnju: O čunjosječnicama na pravčastim plohama 3. i 4. reda. Nastav. vjes. Knj. L., sv. 1.

Izolirane kružne točke pravčastih ploha 3. i 4. reda usko su vezane uz cikličke presjeke ovih ploha. Stoga ćemo promotriti usput i cikličke presjeke takvih ploha, ali samo presjeke 2. reda, t. j. kružnice, a osvrnut ćemo se i na vezu svih čunjosječnica takvih ploha s njihovim izoliranim kružnim točkama. Jasno je, da na pravčastim plohama 3. i 4. reda postoje i ravninski ciklički presjeci 3. odnosno 4. reda, koji su također u vezi s izoliranim kružnim točkama. Ali takvi ne će ulaziti u ovoj radnji u naša razmatranja.

Sve pravčaste plohe 3. reda i većina pravčastih ploha 4. reda nalaze se u nekoj kongruenciji 1. reda. U drugom dijelu radnje istražit ćemo, koliko pravčastih ploha spomenutih redova ima u pojedinim takvim kongruencijama 1. reda uopće, a onda, koliko ima takvih s izoliranim kružnim točkama. One pravčaste plohe 4. reda, koje se nalaze ne samo u jednoj od tih kongruencija, nego u njih neizmjerno mnogo, promatrat ćemo u jednom linearnom singularnom kompleksu.

I.

1) Pravčaste plohe 3. reda

Pomičemo li ravninu kružnog presjeka troosnog elipsoida paralelno prema kružnoj točki, bit će taj kružni presjek sve manji, dok se konačno u kružnoj točki ne raspadne u dva izotropna pravca. Slično se može raspasti kružni presjek i kod pravčastih ploha 3. reda, i to u par izotropnih i jedan realan pravac, koji je onda nužno jednostruka ravnalica plohe. Općeno mogu na takvim plohama biti najviše tri realna kružna presjeka[2]. Apsolutna kružnica siječe naime neizmjerno daleku krivulju plohe u šest točaka, koje su u parovima konjugirano imaginarne. Realne spojnice triju parova tih konjugirano imaginarnih točaka sijeku tu krivulju svaka u još jednoj realnoj točki. Ovom točkom određena je u konačnosti jedna izvodnica, a pripadnom spojnicom ona ravnina tom izvodnicom, koja plohu siječe u kružnici. Neka jedna spomenuta spojnica prolazi neizmjerno dalekom točkom jednostruke ravnalice plohe. Ravnine jednostruke ravnalice sijeku plohu u parovima realnih ili imaginarnih izvodnica, dakle je onom izvodnicom i onom spojnicom određen u konačnosti par imaginarnih izvodnica, i to upravo izotropnih pravaca, u koje je degenerirala jedna realna kružnica plohe. Ove izotropne izvodnice sijeku se na dvostrukom pravcu kao i svi drugi parovi izvodnica, a njihovo realno sjecište nazvali smo izoliranom kružnom točkom.

Istražit ćemo sada, koliko se kružnih presjeka može raspasti u par izotropnih pravaca, t. j. koliko izoliranih kružnih točaka može biti na pravčastoj plohi 3. reda. Takvih točaka ne može biti više od dvije, jer

[2] *Müller-Krames*, Vorles. über darstell. Geometrie (Leipzig—Wien 1931.), Bd. III, str. 188.

samo dvije od one tri spojnice u neizmjerno dalekoj ravnini mogu prolaziti neizmjernom dalekom točkom K_∞ jednostruke ravnalice plohe. Dokazat ćemo to ovako: Po volji odabrana čunjosječnica c neka siječe krivulju k 3. reda roda nultoga u točkama A, B, C, D, E i F. Spojnica točaka A, B neka siječe krivulju k u trećoj točki K. Pokazat ćemo sada, da točkom K može prolaziti još samo jedna od preostalih spojnica CD i EF. Točke A, B, C, D, E i F složili smo u tri para AB, CD i EF. Uzmimo, da sve tri spojnice prolaze točkom K. Ako postavimo harmonijske dvoomjere $(ABKM) = -1$, $(CDKL) = -1$ i $(EFKO) = -1$, tad izlazi, da se točke M, L i O nalaze na polari čunjosječnice c za pol K, a nalaze se i na koničnoj polari krivulje k za isti pol. Ali to nije moguće, jer pravac siječe čunjosječnicu samo u dvije točke, dakle samo dvije spojnice mogu prolaziti točkom K. Uzmemo li mjesto čunjosječnice c apsolutnu kružnicu, naša je tvrdnja time dokazana.

Kazali smo, da jedna, ili najviše dvije neizmjerno daleke spojnice sjecišta na apsolutnoj kružnici mogu prolaziti neizmjerno dalekom točkom jednostruke ravnalice, ali naravski ne moraju. Dakle izolirane kružne točke ne postoje na svakoj pravčastoj plohi 3. reda s izoliranim dijelom dvostrukog pravca, nego samo na nekima od njih, i to na takvima, koje zadovoljavaju nekim posve određenim uvjetima, a na te ćemo se uvjete doskora osvrnuti.

Ovdje možemo još vrlo jednostavno zaključiti, da kod konoida 3. reda postoji samo jedna izolirana kružna točka. Neizmjerno daleka krivulja tih konoida raspada se u jednostruku ravnalicu i dvije izvodnice. Od presječnih točaka ove raspadnute krivulje s apsolutnom kružnicom samo dvije mogu biti na jednostrukoj ravnalici, dakle mogu dati samo jedan par izotropnih izvodnica, t. j. samo jednu izoliranu kružnu točku.

Na ovom mjestu treba spomenuti u vezi s onim što je rečeno u uvodu, da kod konoida 3., a i 4. reda može postojati imaginaran neizmjerno daleki par izvodnica, koje prolaze sjecištima apsolutne kružnice s neizmjerno dalekom jednostrukom ravnalicom tog konoida, a da one nisu izotropne. Takav se slučaj javlja kod kosih konoida 3. i 4. reda, koji u neizmjernosti imaju izoliranu kružnu točku s neizotropnim parom izvodnica. Ovakve se neizmjerno daleke točke kod naših razmatranja nimalo ne razlikuju od onih s izotropnim izvodnicama, jer će projekcije čunjosječnica takvih konoida u smjeru dvostrukog pravca na direkcione ravnine biti također kružnice[3]. Zato ćemo i njih uključiti pod naziv izolirane kružne točke.

Pogledat ćemo još, po čemu možemo zaključiti, postoji li na plohi izolirana kružna točka, i kako bismo je mogli konstruktivnim putem odrediti, odnosno, kojim uvjetima mora zadovoljavati pravčasta ploha 3. reda, da na njoj postoji jedna ili dvije izolirane kružne točke?

[3] Vidi radnju cit. pod 1).

Odaberimo na pravčastoj plohi 3. reda, s realnim kuspidalnim točkama K_1, K_2 i torzalnim pravcima t_1, t_2, po volji točku S na dvostrukom pravcu kao centar projiciranja. Tom točkom neka prolazi par imaginarnih izvodnica. Odredimo li pomoću harmonijskog dvoomjera $(K_1K_2SJ) = -1$ točku J na dvostrukom pravcu, tada njome prolaze realne izvodnice i_1, i_2. Projiciramo li sve to iz točke S na neku ravninu α, paralelnu s ravninom izvodnica točke S, dobit ćemo u njoj, zbog poznate hiperboličke involucije na jednostrukoj ravnalici, četiri harmonijska pravca $(t_1' t_2' i_1' i_2') = -1$, a na tim pravcima nalazit će se krajnje točke parova konjugiranih dijametara čunjosječnica, u koje se iz S projiciraju čunjosječnice plohe[4]. Kada bi za pravce t_1', t_2', i_1' i i_2' vrijedili uvjeti $t_1' \perp t_2'$ i $i_1' \perp i_2'$, bile bi sve te homotetične čunjosječnice u ravnini α kružnice, jer bi parovi konjugiranih dijametara bili među sobom okomiti i jednaki. Dvostrukim pravcem plohe i pravcima i_1, i_2, t_1 i t_2 dane su ravnine a, b, c i d, za koje vrijedi harmonijski dvoomjer $(cdab) = -1$, zbog involucije uporišta izvodnica na jednostrukoj ravnalici. Ravnine a, b, c i d sijeku ravninu α u pravcima i_1', i_2', t_1' i t_2'. Budući da su ravnine α_n svih centara projiciranja na dvostrukom pravcu paralelne s jednostrukom ravnalicom plohe, mogli bismo cio naš problem formulirati ovako: da se odredi izolirana kružna točka plohe, trebalo bi ravninu njenih izvodnica položiti tako, da ona na opisani način pridružene joj ravnine a, b, c i d siječe u četiri harmonijska pravca $(d_i\ c_i\ a_i\ b_i) = -1$ tako, da bude $d_i \perp c_i$ i $a_i \perp b_i$. Označimo izolirane kružne točke s O, za razliku od običnih centara projiciranja S. Mi ne možemo postaviti jednostrukom ravnalicom ravninu tako, da bude $c_i \perp d_i$ i $a_i \perp b_i$, jer ne poznajemo točku O, a prema tome ni ravnine a i b. No lako možemo postaviti ravninu α jednostrukom ravnalicom tako, da bude $p_i \perp c_i$, jer pravci t_1, t_2 ostaju čvrsti za svaku točku S. Torzalni pravci t_1, t_2 sijeku jednostruku ravnalicu l plohe u dvostrukim točkama njegove involucije. Uzmimo sada centralnu točku involucije pravca l kao središte kugle, koja prolazi dvostrukim točkama te involucije. Probodišta O_1 i O_2 dvostruke ravnalice s tom kuglom mogu biti izolirane kružne točke plohe, jer će pravci d_i i c_i u ravninama tih točaka i pravca l biti među sobom okomiti. Jasno je, da točke O_1 i O_2 mogu biti izolirane kružne, ali ne moraju, jer ne znamo, hoće li i a^i biti okomito na b_i. Uvijek, kada je točka O izolirana kružna, bit će $c_i \perp d_i$, pa na temelju toga možemo izreći ovaj stavak:

I z o l i r a n e k r u ž n e t o č k e m o g u p o s t o j a t i s a m o n a o n i m p r a v č a s t i m p l o h a m a 3. r e d a, k o d k o j i h j e u d a l j e n o s t d v o s t r u k e r a v n a l i c e o d c e n t r a l n e t o č k e i n v o l u c i j e u p o r i š t a i z v o d n i c a n a j e d n o s t r u k o j r a v n a l i c i m a n j a o d u d a l j e n o s t i t e c e n-

[4] Vidi radnju cit. pod 1), str. 35.

tralne točke do realnih dvostrukih točaka te involucije. Inače su te izolirane kružne točke imaginarne.

Kao što vidimo, taj nam stavak daje nuždan, ali nipošto i dovoljan uvjet za izolirane kružne točke. Hoće li, recimo točka O_1 biti kružna, možemo saznati ovako: potražit ćemo točki O_1 pripadnu točku J_1 pomoću harmonijskog dvoomjera $(K_1K_2O_1J_1) = -1$, pa ćemo njoj pripadne ravnine a i b sjeći ravninom (lO_1). Ako ta ravnina siječe ravnine a i b u okomitim pravcima, bit će točka O_1 izolirana kružna, inače ne. Da točka O_1 mora biti na izoliranom dijelu dvostruke ravnalice, znademo već otprije.

Da li na nekoj pravčastoj plohi 3. reda postoji jedna ili dvije izolirane kružne točke, mogli bismo odrediti i na ovaj, za konstruktivne svrhe nešto kompliciraniji, način: kazali smo, da će na pravčastoj plohi 3. reda biti jedna, odnosno dvije izolirane kružne točke onda, ako neizmjerno dalekom točkom jednostruke ravnalice prolaze jedna, odnosno dvije spojnice konjugirano imaginarnih parova sjecišta apsolutne kružnice s neizmjerno dalekom krivuljom te plohe. Međutim, neizmjerno dalekom točkom jednostruke ravnalice prolazi i jedna obična realna izvodnica te plohe, koja je u konačnosti s njom paralelna. Ova izvodnica u konačnosti i ona jedna, odnosno dvije spojnice u neizmjernosti određuju u konačnosti ravnine, koje našu plohu sijeku u kružnicama i u toj izvodnici. Vidimo dakle, ako su na pravčastoj plohi 3. reda jedna, odnosno dvije izolirane kružne točke, onda će u svesku ravnina te paralelne izvodnice s jednostrukom ravnalicom biti jedna, odnosno dvije ravnine, koje tu plohu sijeku u kružnicama. Odatle proizlazi ovakav stavak:

N u ž d a n i d o v o l j a n u v j e t z a p o s t o j a n j e n i j e d n e , j e d n e i l i d v i j u i z o l i r a n i h k r u ž n i h t o č a k a n a p r a v č a s t o j p l o h i 3. r e d a j e t a j , d a s e u s v e s k u r a v n i n a o n e i z v o d n i c e t e p l o h e , k o j a j e p a r a l e l n a s n j e n o m j e d n o s t r u k o m r a v n a l i c o m , n a l a z i n i j e d n a , j e d n a i l i d v i j e r a v n i n e , k o j e t u p l o h u s i j e k u u k r u ž n i c a m a.

Ovim stavkom dan nam je novi put, kojim bismo mogli doći do takvih izoliranih kružnih točaka konstruktivnim putem, na bilo kakvoj zadanoj pravčastoj plohi 3. reda, ako one na njoj postoje.

Kod konoida 3. reda sve su ravnine a paralelne s direkcionom ravninom plohe, jer se jednostruka ravnalica nalazi u neizmjernosti. Projiciramo li iz neke točke S dvostruke ravnalice tog konoida sve njegove izvodnice na jednu direkcionu ravninu, bit će projekcije tih izvodnica paralelne s izvodnicama na plohi. Odavle direktno izlazi, da torzalni pravci moraju biti okomiti jedan na drugom, ako na tom konoidu postoji izolirana kružna točka. Ako su torzalni pravci realni i okomiti, postoji na tom konoidu uvijek još jedan par okomitih izvodnica, jer jedan takav par među sobom okomitih korespondentnih zraka postoji kod svakog involutornog pramena, a izvdnice našeg konoida projiciraju se iz točke S na direkcionu ravninu u involutoran pramen zraka. Neka taj okomiti par izvodnica siječe dvostruku ravnalicu u točki J. Pomoću harmonijskog dvoomjera $(K_1K_2J\,O) = = -1$ dobivena točka O je tada izolirana kružna točka. Možemo dakle izreći i ovaj stavak:

Nuždan i dovoljan uvjet za izoliranu kružnu točku na konoidu 3. reda je taj, da su mu torzalni pravci realni i jedan na drugom okomiti.

U taj stavak uključena je naravski i neizmjerno daleka izolirana točka s neizotropnim izvodnicama.

Kod *Plückerova* konoida nalazi se izolirana kružna točka u neizmjernosti, jer par njegovih okomitih realnih izvodnica prolazi polovištem udaljenosti između kuspidalnih točaka.

Znademo, da je vrsta projekcije čunjosječnica iz neke točke S dvostruke ravnalice na pripadnu ravninu α (paralelnu s izvodnicama točke S), određena prirodom involutornog pramena, kojim su definirane izvodnice centra projiciranja S, jer dvostruke zrake tog pramena i te projicirane čunjosječnice imaju iste neizmjerno daleke točke. Na temelju toga i ostalih naših razmatranja možemo za *Plückerov* konoid izreći još i ovaj stavak:

Zadamo li neku čunjosječnicu u bilo kojoj direkcionoj ravnini *Plückerova* konoida tako, da su joj osi paralelne s njegovim torzalnim pravcima i da ona siječe njegovu dvostruku ravnalicu, tada postoji uvijek na toj ravnalici jedna točka, iz koje će se jedna njegova čunjosječnica projicirati u zadanu.

Za konoide 3. reda možemo, s obzirom na izolirane kružne točke, izreći još i ovaj stavak:

Ako neki konoid 3. reda ima izoliranu kružnu točku O_1, onda njemu harmonijski pridruženi konoid[5] ima također izoliranu kružnu točku O_2, koja s točkom O_1 i zajedničkim kuspidalnim točkama K_1, K_2 tih dvaju konoida daje harmonijski dvoomjer $(K_1K_2O_1O_2) = -1$.

Dokazat ćemo to ovako: Neka je točka O_1 izolirana kružna točka nekog konoida 3. reda ψ s kuspidalnim točkama K_1, K_2 i okomitim torzalnim pravcima t_1, t_2. Pomoću harmonijskog dvoomjera $(K_1K_2O_1O_2) = -1$ odredimo točku O_2. Budući da je točka O_1 izolirana kružna, bit će izvodnice konoida u točki O_2 također među sobom okomite. U harmonijski pridruženom konoidu ψ^o ostaju kuspidalne točke i torzalni pravci isti. Izvidnicama točke O_2 bit će u tom konoidu pridružene izvodnice točke O_1, koje su paralelne s onim prvima, dakle opet jedna na drugu okomita. Odavle izlazi, da

[5] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 187.

je točka O_2 izolirana kružna točka harmonijski pridruženog konoida. Izvodnice točke O_2 prvog konoida ψ paralelne su s izvodnicama točke O_1 harmonijski pridruženog konoida ψ^o, jer pridruženi parovi izvodnica dvaju harmonijski pridruženih pravčastih ploha 3. reda sijeku zajedničku jednostruku ravnalicu u istom involutornom nizu. Primijenimo li ovo na *Plückerov* konoid, možemo za njega izreći još i ovaj stavak:

Projiciramo li čunjosječnice konoida harmonijski pridruženog *Plückerovu*, iz njegova središta na direkcionu ravninu po volji odabranu, bit će projekcije tih čunjosječnica opet kružnice.

Govoreći o pravčastim plohama 3. reda, spomenut ćemo nešto i o građenju onih takvih ploha, na kojima će biti jedna ili dvije izolirane kružne točke. Pravčaste plohe obično se zadaju pomoću ravnalica. Takve plohe 3. reda zadaju se jednostrukom ravnalicom l, dvostrukom ravnalicom d i nekom čunjosječnicom c, koja siječe dvostruku ravnalicu. Naš problem sastojao bi se dakle u tome, kako bismo odabrali i postavili ove elemente kao ravnalice, da na zadanoj plohi budu uistinu jedna ili dvije izolirane kružne točke.

Uzmimo bilo kakav stožac 2 reda, kojemu je vrh točka O i na njemu neku čunjosječnicu c. Ova čunjosječnica c i jedna, bilo koja izvodnica d toga stošca neka su izvodne ravnalice neke pravčaste plohe 3. reda. Pravac d će biti dvostruka ravnalica te plohe. Za ovaj stožac postoje dva sveska paralelnih ravnina, koje ga sijeku u kružnicama. Odaberemo li jednostruku ravnalicu l tako, da leži u onoj ravnini jednog od dvaju svezaka, koja prolazi vrhom O, onda će na tako zadanoj pravčstoj plohi 3. reda vrh O biti izolirana kružna točka. Ovo proizlazi iz činjenice, što ravnina α pravca l i vrha O siječe stožac (Oc) u paru izotropnih izvodnica.

Mjesto bilo kakve čunjosječnice na našem stošcu 2. reda odaberimo na njemu kružnicu c. Položimo sada vrhom O ravninu paralelnu s ravninama drugog sistema kružnih presjeka ovog stošca (ravnina kružnice c pripada u prvi takav sistem), i u toj ravnini odaberimo jednostruku ravnalicu l tako, da ona bude paralelna s ravninama obaju sistema kružnih presjeka. Za bilo koju izvodnicu našeg stošca kao dvostruku ravnalicu d imat će ovako sastavljena ploha još jednu izoliranu kružnu točku osim točke O, a te druge izolirane kružne točke svih tako sastavljenih ploha nalazit će se na presjeku stošca (Oc) s ravninom jednostruke ravnalice l, koja pripada u prvi sistem ravnina kružnih presjeka stošca (Oc), t. j. usporedna s ravninom kružnice c. U toj ravnini nalaze se naravski i parovi izotropnih izvodnica svih tih ∞^1 pravčastih ploha. 3. reda.

Kada bismo jednostruku ravnalicu l odabrali u spomenutoj ravnini vrha O tako, da ne bude paralelna i s ravninama drugog sistema kružnih presjeka, onda bi samo točka O ostala izolirana kružna točka.

Kod konoida 3. reda valja uzeti uspravan ili kosi kružni stožac ili valjak i jedan njegov presjek c. Uzme li se ravnina baze kao direkciona ravnina, onda je vrh tog stošca (za valjak neizmjerno daleki vrh) izolirana kružna točka svakog konoida, kojemu je spomenuta čunjosječnica c ravnalica, a bilo koja izvodnica navedenog stošca ili valjka dvostruka ravnalica. Kod kosog kružnog valjka dobivamo naravski neizmjerno daleku izoliranu kružnu točku s neizotropnim imaginarnim izvodnicama.

Kod konstruktivnog određivanja izoliranih kružnih točaka na pravčastim plohama 3. reda postupali bismo prema tome ovako: Pomoću sprijeda opisane kugle, položene dvostrukim točkama involucije na jednostrukoj ravnalici kao njenim dijametralnim točkama, odredili bismo na dvostrukoj ravnalici d one točke, koje mogu, ali ne moraju biti izolirane kružne točke. Postavimo li sada izvodnicom, koja je paralelna s jednostrukom ravnalicom l, ravnine paralelne s ravninama jednostruke ravnalice l i dobivenih točaka na dvostrukoj ravnalici d, pa ako te ravnine sijeku ovu plohu u kružnicama, onda su i dobivene točke na dvostrukoj ravnalici d izolirane kružne točke te plohe. Ako samo jedna takva ravnina siječe plohu u kružnici, onda je i samo njoj odgovarajuća točka na dvostrukoj ravnalici izolirana kružna točka.

2) Pravčaste plohe 4. reda

Neizmjerno daleka krivulja r^∞ pravčastih ploha 4. reda siječe apsolutnu kružnicu u osam točaka složenih u četiri konjugirano imaginarna para. Spojimo li po dvije ovakve konjugirano imaginarne točke realnim neizmjerno dalekim pravcima, bit će svakim takvim pravcem određen svezak paralelnih ravnina u konačnosti. Ciklički presjeci tih ravnina s plohom prolaze kroz četiri sjecišta tih spojnica s neizmjerno dalekom krivuljom r^∞ plohe. Da u takvom svesku paralelnih ravnina bude ravnina nekog para izvodnica ili čunjosječnice plohe, mora neizmjerno daleka spojnica tangirati neizmjerno daleku krivulju s^∞ torze ravnina parova izvodnica, odnosno čunjosječnica plohe. Čim takva neizmjerno daleka spojnica tangira krivulju s^∞, određena je njome ravnina jednog para izvodnica, u kojoj se obično nalazi i jedna čunjosječnica. Ciklički presjek ovakve ravnine raspao se dakle u jednu čunjosječnicu i par pravaca, a kako on prolazi apsolutnim točkama svoje ravnine, nalazit će se u toj ravnini ili kružnica s parom realnih ili imaginarnih izvodnica, ili čunjosječnica s parom izotropnih izvodnica.

Torza ravnina parova izvodnica, odnosno čunjosječnica gdje ih ima, trećeg je razreda, a može se raspasti u stožac i svezak ili u same sveske ravnina. Analogno se prema tome može raspasti i krivulja s^∞ u čunjosječnicu i pramen, ili u same pramenove pravaca. Navedena čunjosječnica može se nadalje stegnuti u točku, odnosno u dvostruki pramen pravaca. Može se desiti, da jedna od one četiri naprijed spomenute neizmjerno daleke spojnice dvostruko tangira krivulju s^{∞} (plohe III. i IX. vrste), ili ta spojnica prolazi vrhom pramena stegnute čunjosječnice raspadnute krivulje s^{∞} (plohe V. i XI. vrste). U ovim slučajevima dane su ovakvom neizmjerno dalekom spojnicom dvije paralelne ravnine čunjosječnica, ali ako se u jednoj nalazi kružnica, u drugoj se uvijek nalazi izolirana kružna točka[6]. Odatle zaključujemo:

Broj izoliranih kružnih točaka na pravčastim plohama 4. reda nikada ne može premašiti četiri, dok za ukupni broj izoliranih kružnih točaka i kružnih presjeka postoji mogućnost, da taj broj prekorači.

Ima pravčastih ploha 4. reda, za koje se može utvrditi, da im je broj izoliranih kružnih točaka manji od četiri. U tu svrhu osvrnut ćemo se sada na pojedine vrste ovih ploha.

a) Pravčaste plohe 4. reda I. vrste

Imamo li u prostoru dva mimosmjerna pravca d_1 i d_2, na kojima se nalaze dvo-dvoznačno pridruženi nizovi točaka, tada u najopćenitijem slučaju daju spojnice pridruženih točaka ovih nizova izvodnice pravčaste plohe 4. reda I. vrste, kojima su ti pravci dvostruke ravnalice. Uzmemo li pravce d_1, d_2 kao ravnalice, koje sijeku neku ravninsku krivulju 3. reda roda prvoga, tada našu plohu čine svi pravci, koji sijeku ovu krivulju i ravnalice d_1 i d_2[7]. Ploha se nalazi u linearnoj hiperboličkoj kongruenciji ravnalica d_1 i d_2.

Neizmjerno daleka krivulja r^{∞} ove plohe je 4. reda s dvije dvostruke točke. Osam presječnih točaka ove krivulje s apsolutnom kružnicom, složenih u četiri konjugirano imaginarna para, daju četiri para izotropnih izvodnica sa četiri izolirane kružne točke, ako spojnice tih parova prolaze dvostrukim točkama krivulje r^{∞}. Od četiri para spojenih presječnih točaka na krivulji r^{∞} ne mogu više od tri spojnice prolaziti njenom dvostrukom točkom. Dokazati se to može ovako: povlačimo li dvostrukom točkom A krivulje r^{∞} po volji zrake, tad svaka ova zraka siječe krivulju u dalje dvije točke B i C. Odredimo li mi u svakom paru točaka B, C harmonijski pridruženu točku D s obzirom na točku A, tad će sve takve točke D ležati na krivulji 3. reda (prva polara točke A), kojoj je A dvostruka točka. Polara točke A, s obzirom na apsolutnu kružnicu, siječe ovu krivulju u trima ili u jednoj realnoj točki. Leže li ova sjecišta na izoliranom dijelu ove krivulje 3. reda, tada njihove spojnice s točkom A mogu

[6] Vidi radnju cit. pod 1), str. 38. i 44.
[7] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 247.

biti spojnice onih parova presječnih točaka krivulje r^∞ s apsolutnom kružnicom. Dakle mogu u konačnosti dati izolirane kružne točke, a odatle proizlazi:

Na pojedinoj dvostrukoj ravnalici pravčaste plohe 4. reda I. vrste ne mogu se nalaziti više od tri izolirane kružne točke.

Mogućnost i broj izoliranih kružnih točaka mogli bi se konstruktivno odrediti pomoću direkcionog stošca krivulje r^∞.

b) Pravčaste plohe 4. reda II. vrste

Padnu li ravnalice d_1 i d_2 kod ploha I. vrste skupa, recimo u pravac d, tad se ovakva ploha nalazi u linearnoj paraboličkoj kongruenciji ravnalice d, a tim je nastala pravčasta ploha 4. reda II. vrste. Svaka ravnina prostora siječe ovakvu plohu u krivulji 4. reda, koja sama sebe dodiruje u sjecištu ravnalice d s tom ravninom[8]. Budući da i neizmjerno daleka krivulja r^∞ sama sebe dodiruje u neizmjerno dalekoj točki D^∞ ravnalice d, to će se poznata krivulja 3. reda kod ploha I. vrste (prva polara točke A s obzirom na krivulju r^∞) raspasti ovdje u pravac (tangenta u D^∞) i čunjosječnicu, a odatle odmah izlazi:

Na pravčastim plohama 4. reda II. vrste ne mogu biti više od dvije izolirane kružne točke.

Konstruktivno istražiti izolirane kružne točke mogli bismo i ovdje pomoću direkcionog stošca krivulje r^∞.

c) Pravčaste plohe 4. reda III. vrste

Torza ravnina parova izvodnica odnosno čunjosječnica kod pravčastih ploha 4. reda III. vrste je 4. reda 3. razreda[9]. Njena neizmjerno daleka krivulja s^∞ ima jednu ili tri dvostruke tangente, dakle na njoj postoje paralelne ravnine dviju čunjosječnica. Znademo, da čunjosječnica jedne ovakve ravnine i izvodnice druge ravnine imaju zajedničke neizmjerno daleke točke, dakle vrijedi za te plohe ovakav stavak:

Ako na pravčastoj plohi 4. reda III. vrste postoje dvije paralelne ravnine parova izvodnica s kružnicom u jednoj od njih, tada se u drugoj nalazi uvijek izolirana kružna točka s parom izotropnih izvodnica.

Projiciramo li sve čunjosječnice plohe III. vrste iz izolirane kružne točke O na ravninu α usporednu s izotropnim izvodnicama točke O, dobit ćemo u njoj ovakav sistem od ∞^1 kružnica: sve te kružnice dirat će presječnu čunjosječnicu ravnine α sa stošcem, koji

[8] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 250.
[9] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 253.

omataju tangencijalne ravnine plohe, što prolaze izoliranom kružnom točkom[10]. Sva središta tih kružnica nalaze se na polari jednog fokusa ove čunjosječnice, jer je taj fokus probodište tangente dvostruke kubne čunjosječnice (ravnalice) u izoliranoj kružnoj točki, a tangente iz ovog probodišta na tu čunjosječnicu su izotropni pravci[11].

d) Pravčaste plohe 4. reda IV. vrste

Kod ovih se ploha poznata torza parova izvodnica sastoji od sveska ravnina, kojemu je os jednostruka ravnalica, a u svakoj se ravnini tog sveska nalaze uz jednostruku ravnalicu još tri izvodnice, od kojih dvije mogu biti imaginarne. Istim konstruktivnim postupkom kao kod ploha I. i II. vrste moglo bi se i ovdje odrediti, da li se nalazi i koliko izoliranih kružnih točaka na ovakvoj plohi. Analogna razmatranja krivulja r^{∞} i s^{∞} kao kod ploha I. i II. vrste ne ograničuju nam ovdje mogućnost broja izoliranih kružnih točaka ispod četiri.

e) Pravčaste plohe 4. reda V. vrste

Torza ravnina parova izvodnica i čunjosječnica raspada se kod ovih ploha u stožac ili valjak i svezak ravnina. Neizmjerno daleka krivulja s^{∞} te torze bit će dakle čunjosječnica i točka Z^{∞}. Ako spojnica para presječnih točaka neizmjerno daleke krivulje r^{∞} plohe s apsolutnom kružnicom prolazi tom točkom, onda je njom sigurno određen par izotropnih izvodnica s izoliranom kružnom točkom, jer se u njihovoj ravnini ne nalazi čunjosječnica. Ako ta spojnica dira čunjosječnicu krivulje s^{∞}, tad njom može biti određen kružni presjek ili izolirana kružna točka. Točka Z^{∞} krivulje s^{∞} nalazi se u dvostrukoj točki neizmjerno daleke krivulje plohe. Njena prva polara s obzirom na tu krivulju je 3. reda, pa bismo ovdje mogli posve analogno kao kod ploha I. vrste pokazati, da točkom Z^{∞} ne mogu prolaziti više od tri naše spojnice. Vidimo dakle:

Na čunjosječnici dvostruke ravnalice pravčaste plohe 4. reda V. vrste ne mogu se nalaziti više od tri izolirane kružne točke.

Ako je poznata torza ravnina parova izvodnica ove plohe valjak, onda se njezina neizmjerno daleka krivulja s^{∞} raspada u dvije točke V^{∞} i Z^{∞}. Spojnice parova presječnih točaka apsolutne kružnice s neizmjerno dalekom krivuljom r^{∞} plohe, koje prolaze točkom V^{∞}, daju na toj plohi i par izotropnih izvodnica s izoliranom kružnom točkom i presjek u kružnici, jer su tom spojnicom određene dvije paralelne ravnine torze[12]. Možemo prema tome izreći i ovaj stavak:

[10] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 254.
[11] Vidi radnju cit. pod 1), str. 41.
[12] Vidi radnju cit. pod 1), str. 44.

Ako na pravčastoj plohi 4. reda V. vrste, kojoj ravnine čunjosječnica omataju valjak, postoje kružnice, onda na njoj postoji najmanje isto toliko izoliranih kružnih točaka, koliko i kružnica.

f) Pravčaste plohe 4. reda VI. vrste

Posve isto kao kod ploha V. vrste može se i ovdje pokazati, da na čunjosječnici dvostruke ravnalice ne može biti više od tri izolirane kružne točke. Kružnica na tim plohama nema, jer na njima nema čunjosječnica.

g) Pravčaste plohe 4. reda VII. vrste

Torza ravnina parova izvodnica i čunjosječnica raspada se kod ovih ploha u sveske ravnina dvostrukih ravnalica i dvostruke izvodnice. Neizmjerno daleka krivulja s^∞ torze sastoji se dakle od tri točke, t. j. od neizmjerno dalekih točaka $D_1{}^\infty$, $D_2{}^\infty$ i J^∞ tih triju pravaca. Spojnice poznatih parova točaka apsolutne kružnice, koje prolaze neizmjerno dalekom točkom dvostrukih pravaca, daju ravnine parova izotropnih izvodnica s izoliranim kružnim točkama. One spojnice, koje idu neizmjerno dalekom točkom J^∞ dvostruke izvodnice daju ravnine kružnih presjeka. Točke $D_1{}^\infty$, $D_2{}^\infty$ i J^∞ su dvostruke točke neizmjerno daleke krivulje r^∞ plohe. Polare tih točaka s obzirom na krivulju r^∞, bit će krivulja 3. reda. Analogno kao kod ploha I. vrste možemo i ovdje dokazati, da takvom točkom ne može prolaziti više od tri naše spojnice, a prema tome vrijedi i ovaj stavak:

Na pravčastoj plohi 4. reda VII. vrste ne mogu se nalaziti više od tri kružna presjeka.

Iz prednjega izlazi također, da na svakoj dvostrukoj ravnalici ne može biti više od tri izolirane kružne točke, ali mi ćemo taj broj sniziti još i dalje. Dvostruka izvodnica plohe siječe obje dvostruke ravnalice. Neka je dvostruka izvodnica paralelna s jednom dvostrukom ravnalicom. Dvije dvostruke točke neizmjerno daleke krivulje r^∞ padaju u tom slučaju skupa tako, da krivulja r^∞ sama sebe tangira u toj točki M^∞. Polara krivulje r^∞ za pol M^∞ je čunjosječnica, pa možemo opet analogno kao kod ploha II. vrste dokazati, da točkom M^∞ mogu prolaziti najviše dvije spojnice zajedničkih točaka krivulje r^∞ s apsolutnom kružnicom. Svakom od ovih dviju spojnica kroz točku M^∞ dana je jedna ravnina dvostruke izvodnice i jedna ravnina dvostruke ravnalice, a obje su u konačnosti paralelne. U prvoj se nalazi, kao što znademo, kružnica, a u drugoj izolirana kružna točka. Vidimo dakle, da se na ovakvoj plohi mogu nalaziti najviše dva kružna presjeka. Na temelju tih razmatranja možemo zaključiti još i ovo:

Ako na pravčastoj plohi 4. reda VII. vrste, kojoj je dvostruka izvodnica paralelna s jednim dvostrukim pravcem, postoji kružni presjek, onda na njoj postoji sigurno i izolirana kružna točka, a ravnina njenih izotropnih izvodnica paralelna je s ravninom kružnice.

Ako dakle poznajemo kružni presjek takve plohe, lako je konstruktivno odrediti izoliranu kružnu točku.

Kod konoida 4. reda VII. vrste raspada se neizmjerno daleka krivulja r^∞ u dvostruku ravnalicu d_1^∞ i dvije izvodnice i_1^∞, i_2^∞, koje se sijeku u točki D_2^∞. Dvostruka izvodnica ima svoju neizmjerno daleku daleku točku J^∞ na pravcu d_1^∞. Pravac d_1^∞ siječe apsolutnu kružnicu u dvije točke, a tim točkama mogu prolaziti u najspecijalnijem slučaju samo dva para izotropnih izvodnica. Izvodnice i_1^∞, i_2^∞ sijeku apsolutnu kružnicu u dalje četiri točke. Spojnice tih točaka (ali ne izvodnice i_1^∞, i_2^∞) sijeku i pravac d_1^∞. Ako te dvije spojnice prolaze točkom J^∞ na pravcu d_1^∞, onda su njima određena dva kružna presjeka. Vidimo dakle:

Na konoidima 4. reda VII. vrste ne mogu se nalaziti više od dvije izolirane kružne točke i više od dva kružna presjeka.

Može se desiti, da izvodnice i_1^∞, i_2^∞ sijeku apsolutnu kružnicu u istim točkama, u kojima i pravac d_1^∞. U tom su slučaju izvodnice i_1^∞, i_2^∞ izotropne, ako je konoid uspravan, a izolirana kružna točka je u neizmjernosti. Takav slučaj javlja se kod konoida normala uspravnog kružnog valjka duž njegova kosog presjeka. Kod kosog konoida imamo slučaj kružne točke s neizotropnim izvodnicama.

Pogledat ćemo sada, kako bismo mogli zaključiti, ima li na nekoj pravčastoj plohi 4. reda VII. vrste izoliranih kružnih točaka i koliko. Svaki par izvodnica možemo definirati kao dvostruke zrake nekog involutornog pramena. Konjugirane zrake involutornog pramena, kojemu su dvostruke zrake izotropne izvodnice, su jedna na drugu okomite. Dvostruka izvodnica i neka siječe dvostruke ravnalice d_1, d_2 plohe u točkama P_1, P_2, a ploha neka ima torzalne pravce t_1, t_2 s kuspidalnim točkama K_1, K_2 na pravcu d_1. Ravnine čunjosječnica plohe sijeku torzalne pravce u dva projektivna niza, a spojnice pridruženih točaka daju izvodnice nekog hiperboloida ψ. U isti sistem izvodnica toga hiperboloida idu i pravci d_1, d_2. Uzmemo li pravcem d_2 neku ravninu ϱ, siječe ona taj hiperboloid ψ u jednoj izvodnici f drugog sistema, a u tom sistemu nalaze se i torzalni pravci t_1, t_2. Ravnina ϱ siječe pravac d_1 recimo u točki R, kojom prolazi i izvodnica f. Spojimo li točku P_2 pravca d_2 s točkom R, onda nam ta spojnica n s izvodnicom f daje par konjugiranih zraka involutarnog pramena para izvodnica ravnine ϱ. Da točka R bude izolirana kružna nužno je, da ta dva pravca budu jedan na drugom okomiti ($n \perp f$). Zavrtimo li ravninu ϱ oko pravca d_2, tad u tom svesku ravnina mogu postojati samo dvije ravnine, u kojima će biti $n \perp f$. Na temelju toga proizlazi:

Na pojedinoj dvostrukoj ravnalici pravčaste plohe 4. reda VII. vrste ne mogu biti više od dvije izolirane kružne točke.

Na pravcu d_1 postoji uvijek jedna točka R, za koju će biti $n \perp f$. Ako ona točka R, gdje je $n \perp f$, ima par realnih izvodnica i_1, i_2, tad znademo, da ona ne dolazi u obzir za izoliranu kružnu točku. Ovakva se točka dade jednostavno odrediti pomoću harmonijskog dvoomjera $(n\,f\,i_1\,i_2) = -1$, jer će spojnice zajedničkih točaka svake čunjosječnice s torzalnim pravcima t_1, t_2 sjeći simetralu kuta izvodnica i_1, i_2. Ako je ta točka na izoliranom dijelu dvostruke ravnalice, onda ona može biti izolirana kružna, a uvjerit ćemo se o tome tako, da potražimo još jedan par konjugiranih zraka involutornog pramena izvodnica te točke.

Nalazi li se točka P_2 u neizmjernosti, t. j. ako je dvostruka izvodnica i paralelna s pravcem d_2, tad se cio problem veoma pojednostavnjuje. Može se desiti, da se hiperboloid ψ stegne u ravninu (ravnina pravaca d_1, t_1 i t_2), a među takvima ima ih, kojima vrijedi za svaku točku dvostruke ravnalice d_1 $n_i \perp f_i$. Kod takvih se ploha istraživanja o izoliranim kružnim točkama dakako pojednostavnjuju još i dalje.

Na konoidima prelazi hiperboloid ψ u hiperbolički paraboloid. Sve ravnine ϱ_n paralelne su s direkcionom ravninom, a prema tome su i sve izvodnice f, kao i dvostruka izvodnica, paralelne s tom ravninom. Projiciramo li dakle sve izvodnice f_n u smjeru dvostruke ravnalice na neku direkcionu ravninu, dobit ćemo pramen pravaca projektivan s nizom točaka na toj dvostrukoj ravnalici. Ovim nam se odmah nameće konstruktivan postupak za određenje izolirane kružne točke.

Ako hiperbolički paraboloid ψ prijeđe u ravninu, t. j. torzalni pravci t_1, t_2 budu paralelni, bit će ili u svim točkama dvostruke ravnalice izvodnice f_n okomite na dvostruku izvodnicu ili niujednoj. U posljednjem slučaju ne može dakle postojati ni izolirana kružna točka. Kod ovakvih konoida spomenut ćemo još i ovo: projiciramo li iz neke točke S na dvostrukoj ravnalici sve čunjosječnice plohe na direkcionu ravninu, dobit ćemo u njoj perspektivan pramen homotetičnih čunjosječnica.

Neka dvostruka izvodnica siječe dvostruku ravnalicu d_1 opet u točki P_1. Uzmemo li sada točku S na pravcu d_1 tako, da bude $(K_1 K_2 P_1 S) = -1$, projicirat će se sve čunjosječnice plohe iz te točke u pramen koncentričnih homotetičnih čunjosječnica na svaku direkcionu ravninu. Ravnine svih čunjosječnica prolaze dvostrukom izvodnicom, koje se točka P_2 nalazi u neizmjernosti na pravcu d_2. Budući da se hiperbolički paraboloid ψ raspao u ravninu, izlazi, da se presječne točke tih čunjosječnica s dvostrukom izvodnicom nalaze simetrično s obzirom na njegovu zajedničku točku P_1 s pravcem d_1. Na temelju ovoga i harmonijskog dvoomjera $(K_1K_2P_1S) = -1$ izlazi, da projekcije čunjosječnica iz točke S na direkcionu ravninu moraju dati pramen koncentričnih čunjosječnica.

Ako se dvostruka ravnalica d_2 nalazi u konačnosti, a torzalni pravci t_1, t_2 čine s pravcem d_1 opet jednu ravninu, ne će se ništa promijeniti, samo ravninu projekcija α moramo uzeti paralelno s ravninom dvostruke ravnalice d_2 i centra projiciranja. Možemo dakle izreći i ovaj stavak:

Na pravčastim plohama 4. reda VII. vrste, kod kojih se torzalni pravci kuspidalnih točaka dvostruke ravnalice d_2 sijeku na dvostrukoj ravnalici d_1, postoji uvijek na pravcu d_1 točka C, iz koje će se čunjosječnice plohe projicirati na svaku ravninu te točke i pravca d_2 u pramen koncentričnih homotetičnih čunjosječnica. Ta točka C stoji s kuspidalnim točkama K_1, K_2 pravca d_1 i zajedničkom točkom P_1 tog pravca s dvostrukom izvodnicom u harmonijskom dvoomjeru $(K_1K_2P_1C) = -1$.

Ako je točka $C = O$ izolirana kružna točka, onda naravski dobivamo pramen koncentričnih kružnica. Takav slučaj javlja se kod konoida 4. reda, koji čine normale uspravnog kružnog valjka duž jednog kosog presjeka. Izolirana kružna točka nalazi se kod ovog konoida u neizmjernosti, a po tom ima sličnost s *Plückerovim* konoidom kod pravčastih ploha. 3. reda. Ovdje valja spomenuti još i to, da se kod ovakvog konoida u svaku čunjosječnicu koncentričnog pramena projiciraju po dvije čunjosječnice toga konoida.

h) Pravčaste plohe 4. reda VIII. vrste

Svakom točkom dvostruke ravnalice ovakvih ploha prolazi par izvodnica, kojih ravnina prolazi također tom dvostrukom ravnalicom, t. j. ploha sama sebe tangira duž tog pravca. Svaka ravnina siječe dakle tu plohu u krivulji 4. reda, koja sama sebe tangira u svojoj dvostrukoj točki. Takva je krivulja prema tome i ona u neizmjerno dalekoj ravnini, a tangira sama sebe u neizmjerno dalekoj točki dvostruke ravnalice. Ravnine parova izvodnica čine svezak ravnina dvostruke ravnalice, koji neizmjerno daleku ravninu siječe u pramenu pravaca. Ravnine parova izotropnih izvodnica dat će one zrake tog pramena, koje prolaze konjugirano imaginarnim parom zajedničkih točaka apsolutne kružnice s neizmjerno dalekom krivuljom r^{∞}. Znademo otprije (plohe II. vrste, gdje su također obadvije dvostruke ravnalice pale zajedno), da u ovakvom slučaju mogu postojati samo dvije takve spojnice. Dakle:

Na pravčastoj plohi 4. reda VIII. vrste ne mogu biti više od dvije izolirane kružne točke.

Svaki par izvodnica možemo i ovdje definirati kao dvostruke zrake involutarnog pramena. Budući da ravnine izvodnica prolaze dvostrukom ravnalicom, možemo tu dvostruku ravnalicu uzeti kao pripadnu zraku involutarnom pramenu svakog para izvodnica. Konjugirane zrake toj zraci u svakom pramenu parova izvodnica čine opet sistem izvodnica našeg poznatog hiperboloida ψ, jer su dvostruke ravnalice d_1, d_2 i točke P_1 i P_2 iz prošlog odsjeka pale kod ovih ploha skupa. Samo one točke na dvostrukoj ravnalici, u kojima će izvodnice sistema f_n biti okomite na taj pravac, mogu biti izolirane kružne točke. To proizlazi iz definicije para izotropnih pravaca, kao dvostrukih zraka ortogonalne involucije.

Drugi sistem izvodnica hiperboloida ψ čine spojnice presječnih točaka ravnina čunjosječnica s torzalnim pravcima. Pretpostavljamo, da ploha ima realne torzalne pravce, jer u protivnom slučaju ne može imati izoliranih kružnih točaka. Označimo ovaj drugi sistem s e_n. U sistem e_n odaberimo izvodnicu okomitu na dvostruku ravnalicu. Nju možemo odrediti kao transverzalu dvostruke izvodnice i torzalnih pravaca, koja je okomita na dvostrukoj ravnalici. Položimo li dvostrukom ravnalicom ravninu ξ paralelnu s tom transverzalom, bit će na tom pravcu pridružena ovoj ravnini točka S, kojom prolazi izvodnica sistema f okomito na toj dvostrukoj ravnalici. Ova točka S može dakle biti izolirana kružna. Svezak ravnina dvostruke ravnalice projektivan je s nizom njegovih točaka, jer je taj pravac ravnalica paraboličke kongruencije.

Hoće li točka S biti izolirana kružna, odnosno hoće li ravnina ξ biti ravnina para izotropnih izvodnica, odredit ćemo na taj način, da nađemo još jedan par konjugiranih zraka involutornog pramena para izvodnica u ravnini ξ, ako su ove imaginarne. Učinili bismo to ovako: odredili bismo presječnicu ravnine neke čunjosječnice plohe s ravninom ξ. Spojimo li bilo koja dva konjugirana pola te čunjosječnice na toj presječnici s točkom S, bit će ta točka izolirana kružna točka samo onda, ako su te spojnice među sobom okomite.

i) Pravčaste plohe 4. reda IX. i XI. vrste

Plohe ovih dviju vrsta imaju trostruku ravnalicu, dakle ih svaka ravnina, pa i neizmjerno daleka, siječe u krivulji 4. reda s trostrukom točkom. Torze ravnina parova izvodnica i čunjosječnica iste su ovdje kao kod ploha III. i V. vrste, pa se odmah može vidjeti, da nam naša poznata razmatranja krivulja r^{∞} i s^{∞} u neizmjernosti ne će dati nikakvo smanjenje broja izoliranih kružnih točaka. Zadamo li plohe IX. i XI. vrste trostrukom ravnalicom i s dvije čunjosječnice[13], tad mogućnost i broj izoliranih kružnih točaka ovisi o obliku i međusobnom položaju tih čunjosječnica. Postavimo li naime izoliranom kružnom točkom i tim čunjosječnicama stošce, onda će ravnine usporedne s ravninom izotropnih izvodnica izolirane kružne točke sjeći oba ta stošca u kružnicama.

Kongruencija zraka torze ravnina parova izvodnica odnosno čunjosječnica kod ploha IX. vrste može imati jednu ili tri zrake u neizmjernosti, t. j. mogu na toj plohi postojati parovi paralelnih ravnina čunjosječnica. Ako se u jednoj nalazi kružnica, u drugoj se mora nalaziti izolirana kružna točka.

Kod ploha XI. vrste nalazi se u trostrukoj ravnalici torzalan pravac, a njime prolazi dakle i torzalna ravnina τ. Ravnine parova izvodnica omataju stožac ili valjak 2. reda. Ovakvu plohu možemo dakle zadati stošcem ili valjkom 2. reda, jednom čunjosječnicom c, koje ravnina taj stožac ili valjak tangira i nekim pravcem d, koji tu čunjosječnicu siječe, a stožac, odnosno valjak tangira. Izvodnice plohe bit će spojnice probodišta tangencijalnih ravnina tog stošca ili valjka s pravcem d i čunjosječnicom c. Pravac d bit će trostruka ravnalica plohe, a tangencijalna ravnina stošca ili valjka, koja ide tim pravcem, bit će torzalna ravnina. Označimo vrh stošca s V. Po volji odabrana tangencijalna ravnina stošca neka siječe pravac d u točki D, a čunjosječnicu c u točkama A_1 i A_2. Pravci $i_1 = A_1 D$, $i_2 = A_2 D$ bit će izvodnice plohe, a torzalnu ravninu trostruke ravnalice siječe ta ravnina u pravcu $n = DV$. Pomoću harmonijskog dvoomjera $(i_1\, i_2\, n\, m) = -1$ odredimo pravac m. Pravci m svih tangencijalnih ravnina stošca nalazit će se u nekoj ravnini ω, jer oni sijeku pravac d i polaru pola V s obzirom na čunjosječnicu c, a ta polara siječe i pravac d, jer u toj točki tangira čunjosječnica c torzalnu ravninu duž pravca d. Pravci m i n su konjugirane zrake involutornog pramena para izvodnica i_1, i_2. Izolirane kružne točke dat će nam prema tome samo one ravnine parova izvodnica, koje ravnine τ i ω sijeku pod pravim kutom. Hoće li te točke biti izolirane kružne ili ne, znademo odrediti. Ravnina ω dade se odrediti uz pomoć navedenog harmonijskog dvoomjera.

Ako mjesto stošca imamo valjak, a možemo ravnine τ i ω presjeći u pravom kutu, tad uvijek postoje dvije takve ravnine, koje su paralelne. Ako je u jednoj kružni presjek, u drugoj je izolirana kružna točka.

j) Pravčaste plohe 4. reda X. i XII. vrste

Kod ploha X. vrste postoji mogućnost izoliranih kružnih točaka samo na trostrukoj ravnalici, dok na plohama XII. vrste nema uopće izoliranih kružnih točaka, jer na njima ne postoje točke, kojima bi prolazio par imaginarnih izvodnica.

[13] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 258. i 265.

II.

Poznata je činjenica, da se svaka pravčasta ploha 3. reda, osim *Cayley*eve plohe, nalazi u jednoj linearnoj hiperboličkoj kongruenciji, kojoj se ravnalice podudaraju s jednostrukom i dvostrukom ravnalicom tih ploha. *Ceyley*eva ploha sadržana je u paraboličkoj linearnoj kongruenciji. U linearnoj hiperboličkoj kongruenciji nalaze se i pravčaste plohe 4. reda I., VII. i X. vrste, dok se ostale vrste pravčastih ploha tog reda nalaze bilo u linearnoj paraboličkoj kongruenciji, bilo u kongruencijama 1. reda drugog ili trećeg razreda. Neke se vrste ne nalaze u jednoj samoj od tih kongruencija, nego tek u samo jednom linearnom singularnom kompleksu, t. j. kompleksu svih pravaca, koji sijeku neki pravac. Istražit ćemo sada najprije, koliko ploha pojedinih vrsta ima u linearnim kongruencijama uopće i onakvih s izoliranim kružnim točkama napose, a iza toga to isto u linearnom singularnom kompleksu.

1) Hiperbolička linearna kongruencija

a) Pravčaste plohe. 3. reda

Neka su dva po volji u prostoru odabrana pravca a, b ravnalice neke linearne hiperboličke kongruencije. Ovi pravci neka budu jednostruka (a) i dvostruka (b) ravnalica svih pravčastih ploha 3. reda u toj kongruenciji. Svaka ovakva ploha određena je ovim pravcima i još jednom čunjosječnicom kao ravnalicama, ako ta čunjosječnica siječe jedan (b) od tih pravaca. U svakoj ravnini prostora ima ∞^5 čunjosječnica, dakle ih u prostoru ima svih ∞^8. Takvih čunjosječnica, koje sijeku jedan (b) između odabranih pravaca, ima ∞^7. Svakom ovom čunjosječnicom i pravcima a, b, od kojih ju jedan (b) siječe, određena je jedna pravčasta ploha 3. reda. Kako se međutim na svakoj takvoj plohi već nalazi ∞^2 čunjosječnica, koje se se ubrajaju u onih ∞^7, vidimo da u linearnoj hiperboličkoj kongruenciji ima ∞^5 pravčastih ploha 3. reda.

Neka je pravac b dvostruka ravnalica tih naših ploha. Svaka ravnina ravnalice a siječe svih ovih ∞^5 pravčastih ploha 3. reda u pramenu realnih i imaginarnih pravaca, kojemu je vrh u sjecištu pravca b s tom ravninom, a ti se pravci nalaze u parovima kao izvodnice na tim plohama. Takvih parova u tom pramenu ima ∞^2, dakle svakim takvim parom prolazi ∞^3 pravčastih ploha 3. reda u našoj kongruenciji. Namjesto bilo kakvog para možemo odabrati par izotropnih pravaca, pa odatle dobivamo, da je svaka točka bilo koje ravnalice neke linearne hiperboličke kongruencije izolirana kružna točka za ∞^3 pravčastih ploha 3. reda u toj kongruenciji. Kako na ravnalicama linearne hiperboličke kongruencije ima ∞^1 točaka, to odatle odmah proizlazi:

U nekoj linearnoj hiperboličkoj kongruenciji nalazi se ∞^4 takvih pravčastih ploha 3. reda, koje imaju izolirane kružne točke.

Znademo, da su projekcije ravninskih krivulja neke pravčaste plohe 3. reda iz njene izolirane kružne točke, na ravnine paralelne s ravninom izotropnih izvodnica te izolirane kružne točke, cirkularne krivulje. Dakle sve čunjosječnice plohe projiciraju se na taj način u kružnice.

Uzmimo na ravnalici b neku točku S i u nekoj paralelnoj ravnini s ravninom ravnalice a i točke S jednu kružnicu c, koja neka siječe ravnalicu b. U toj ravnini ima ∞^2 kružnica, koje sijeku ravnalicu b, a svaka je ta kružnica projekcija iz točke S jedne čunjosječnice sa svake od ∞^3 pravčastih ploha 3. reda u našoj kongruenciji, kojima je S izolirana kružna točka. Kako se svaka čunjosječnica neke pravčaste plohe 3. reda može uzeti kao ravnalica uz njenu linearnu jednostruku i dvostruku ravnalicu, vidimo, da na stošcu vrha S i baze c svaka čunjosječnica pripada drugoj plohi unutar onih ∞^3 spomenutih, kojima je S izolirana kružna točka. Vidimo dakle i ovdje, da ima upravo toliko tih ploha, koliko i čunjosječnica na tom stošcu, t. j. ∞^3. Odatle proizlazi ovaj stavak:

Postavimo li kod linearne hiperboličke kongruencije ravnalica a, b neki stožac 2. reda tako, da mu vrh bude na jednoj ravnalici i ta ravnalica da mu bude izvodnica, a u ravnini tog vrha i druge ravnalice da mu se nalazi par izotropnih izvodnica, onda se svaka čunjosječnica tog stošca može uzeti, uz pravce a, b kao ravnalica neke pravčaste plohe 3. reda, kojoj je taj vrh S izolirana kružna točka.

b) Pravčaste plohe 4. reda I. vrste

Ima ploha ovakve vrste, koje se nalaze u eliptičkoj linearnoj kongruenciji. No kako takve nemaju realnih dvostrukih točaka, ne mogu one imati ni izoliranih kružnih točaka. Izolirane kružne točke mogu biti samo na onim ovakvim plohama, koje imaju realne dvostruke ravnalice. Pravčasta ploha 4. reda I. vrste s realnim dvostrukim ravnalicama određena je s dva mimosmjerna pravca i jednom ravninskom krivuljom 3. reda roda prvoga kao ravnalicama, ako ti pravci tu krivulju sijeku[14]. Naša linearna hiperbolična kongruencija neka je određena tim dvostrukim ravnalicama a, b plohe kao svojim ravnalicama. U svakoj ravnini prostora ima ∞^9 krivulja 3. reda, ali

[14] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 249.

takvih, koje sijeku pravce a, b ima ∞^7 u svakoj ravnini. Svih ravninskih krivulja 3. reda, koje sijeku pravce a, b ima prema tome u prostoru ∞^{10}. Svaka ta krivulja, zajedno s pravcima a, b određuje po jednu našu pravčastu plohu 4. reda. Kako međutim na svakoj pravčastoj plohi 4. reda ima ∞^2 ravninskih krivulja 3. reda, ima u linearnoj hiperboličkoj kongruenciji ∞^8 pravčastih ploha 4. reda I. vrste. Svaka ravnina položena kojom od ravnalica a, b siječe sve te plohe u pramenu realnih i imaginarnih pravaca, koji se u parovima nalaze na tim plohama. Analogno kao malo prije zaključujemo, da svakim tim parom prolazi ∞^6 takvih ploha, dakle i parom izotropnih pravaca. Svakom točkom ravnalica a, b prolazi jedan par izotropnih pravaca, koji su zajedničke izvodnice takvih ∞^6 ploha, dakle dobivamo i ovakav stavak:

Svaka realna točka svake od ravnalica neke hiperboličke linearne kongruencije je izolirana kružna točka ∞^6 pravčastih ploha 4. reda I. vrste u toj kongruenciji, dok svih takvih ploha u toj kongruenciji, koje na sebi imaju izolirane kružne točke, ima ∞^7.

Analogno kao kod ploha 3. reda možemo i ovdje odabrati na ravnalici a ili b jednu točku S kao vrh stošca 3. reda roda prvoga, kojemu je baza cirkularna krivulja koja siječe onu ravnalicu (recimo b), na kojoj je vrh, a ravnina joj je paralelna s ravninom vrha S i one druge ravnalice (a). Budući da svaka ravninska krivulja 3. reda ovakvih ploha siječe obadvije dvostruke ravnalice, možemo na spomenutom stošcu uzeti samo ∞^2 onih ravninskih krivulja kao ravnalice, koje sijeku i ravnalicu a (ravnalica b se nalazi na tom stošcu), a kojima će biti određena po jedna pravčasta ploha 4. reda I. vrste u našoj kongruenciji s točkom S kao izoliranom kružnom točkom. Kao ravnalice 3. reda bit će naime svi oni ravninski presjeci spomenutog stošca, koji prolaze jedinim njegovim realnim probodištem s pravcem a. Dakle presjeci tog stošca sa snopom ravnina, kojemu je vrh u tom probodištu. Dobivamo dakle i ovaj stavak:

Odaberemo li na jednoj ravnalici (recimo b) linearne hiperboličke kongruencije po volji točku S kao vrh, a u nekoj paralelnoj ravnini s ravninom točke S i druge ravnalice (a) cirkularnu krivulju 3. reda roda prvoga kao bazu stošca, koji prolazi ravnalicom b, tad svi ravninski presjeci ovog stošca, koji prolaze njegovim realnim sjecištem s ravnalicom a (njih ∞^2), određuju s pravcima, a, b kao ravnalicama, pravčaste plohe 4. reda I. vrste, kojima je točka S zajednička izolirana kružna točka.

c) *Pravčaste plohe 4. reda VII. vrste*

Znade se, da svi pravci, koji sijeku dva mimosmjerna pravca a, b i neku čunjosječnicu, koja te pravce ne siječe, čine izvodnice neke pravčaste plohe 4. reda VII. vrste[15]. Svaka takva ploha nalazi se prema tome u linearnoj hiperboličkoj kongruenciji ravnalica a, b.

Poznato je, da svih čunjosječnica u prostoru, pa i onih koji ne sijeku pravce a, b ima ∞^8. Svaka ta čunjosječnica određuje s ravnalicama a, b po jednu pravčastu plohu 4. reda VII. vrste, a na svakoj od njih ima ∞^1 čunjosječnica. U linearnoj hiperboličkoj kongruenciji ravnalica a, b nalazi se prema tome ∞^7 pravčastih ploha 4. reda VII. vrste. Budući da, analogno kao i malo prije, svakom realnom točkom ravnalica prolazi i jedan izotropan par izvodnica, koji je zajednički za ∞^5 takvih ploha u kongruenciji ravnalica a, b, ima u ovoj kongruenciji ∞^6 naših ploha, na kojima postoje izolirane kružne točke. Dobivamo dakle stavak:

U linearnoj hiperboličkoj kongruenciji ima ∞^6 pravčastih ploha 4. reda VII. vrste, na kojima postoje izolirane kružne točke.

Evidentno je, da je svaka realna točka ravnalica te kongruencije izolirana kružna točka za ∞^5 ovakvih njenih ploha.

Uzmemo li i ovdje na jednoj ravnalici po volji točku S kao vrh, a neku kružnicu u ravnini paralelnoj s ravninom točke S i druge ravnalice kao bazu stošca, onda nam svaka čunjosječnica tog stošca daje s pravcima a,b kao ravnalicama pravčastu plohu 4. reda VII. vrste, kojoj je točka S izolirana kružna. Dakle uz jedan određen stožac vrha S ima ∞^3 takvih ploha, kojima je S izolirana kružna točka, jer toliko ima čunjosječnica na stošcu 2. reda. U ravnini izabrane kružnice ima ∞^3 kružnica, a za svaku ovu kružnicu vrijedi isto. Imali bismo prema tome ∞^6 ravnalica 2. reda za te plohe, odnosno i toliko ploha. Kako se međutim na svakoj toj plohi nalazi ∞^1 čunjosječnica, dobivamo, da tih ploha ima samo ∞^5, a to smo već i sprijeda utvrdili. Vidimo dakle, da za takve plohe vrijedi ovaj stavak:

Postavimo li bilo kojom točkom jedne ravnalice linearne hiperboličke kongruencije, kao vrhom, bilo koji stožac 2. reda tako, da mu se u ravnini tog zajedničkog vrha i druge ravnalice te kongruencije nalazi par izotropnih izvodnica, onda svaka čunjosječnica na svakom tom stošcu može biti ravnalica 2. reda neke pravčaste plohe 4. reda VII. vrste, kojoj su ravnalice te kongruencije također dvostruke ravnalice, a zajednički vrh tih stožaca izolirana kružna točka.

[15] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 261.

Odaberemo li sada na takvom stošcu jednu kružnicu, a ravnalicu, koja ne prolazi vrhom tog stošca položimo u onu ravninu para izotropnih izvodnica tog stošca, koja nije paralelna s ravninom odabrane kružnice, ali tako, da ta ravnalica bude paralelna s tom ravninom kružnice, onda smo na taj način u našoj linearnoj hiperboličkoj kongruenciji odredili pravčastu plohu 4. reda VII. vrste s dvije izolirane kružne točke. Jedna se takva točka nalazi, kao što već znamo, u vrhu odabranog stošca, dok se druga nalazi u sjecištu prve ravnalice (one na stošcu) s onom ravninom druge ravnalice, koja je paralelna sa zadanom kružnicom.

Imamo li u prostoru jednu točku i jedan pravac, onda je ta točka vrh za ∞^2 stožaca 2. reda, kojima će tim pravcem prolaziti jedan par izotropnih izvodnica i ravnina jednog kružnog presjeka. Ako je taj pravac jedna ravnalica, a druga opet prolazi vrhom tog stošca, onda će svaka kružnica na tim stošcima, paralelna s ravninom spomenutog kružnog presjeka (njih ∞^3), biti kvadratna ravnalica neke pravčaste plohe 4. reda VII. vrste u kongruenciji tih linearnih ravnalica, koje imaju dvije izolirane kružne točke na istoj ravnalici. Kako ovo vrijedi za svaku točku svake ravnalice linearne hiperboličke kongruencije, dobivamo i ovo:

U linearnoj hiperboličkoj kongruenciji ima ∞^4 pravčastih ploha 4. reda VII. vrste, koje na jednoj svojoj ravnalici imaju po dvije izolirane kružne točke.

d) Pravčaste plohe 4. reda X. vrste

U linearnoj hiperboličkoj kongruenciji nalaze se i plohe ove vrste. Ovakvu pravčastu plohu čine one zrake te kongruencije, koje sijeku jednu ravninsku krivulju 4. reda s trostrukom točkom, ako ona siječe jednu ravnalicu te kongruencije, dok joj druga prolazi trostrukom točkom[16]. Izaberimo sada jednu ovakvu ravninsku krivulju 4. reda, ali cirkularnu. Njenu ravninu postavimo paralelno s jednom ravnalicom naše kongruencije (recimo *a*) ali tako, da je ta ravnalica *a* siječe u jednoj njenoj neizmjerno dalekoj točki, dok joj druga ravnalica (*b*) prolazi trostrukom točkom. Ovom krivuljom određena pravčasta ploha 4. reda X. vrste u našoj kongruenciji imat će izoliranu kružnu točku na ravnalici *b*, kojoj će izotropne izvodnice ležati u ravnini ravnalice *a*, paralelnoj s ravninom te cirkularne krivulje 4. reda.

Budući da u svakoj ravnini prostora ima ∞^7 krivulja 4. reda s običnom trostrukom točkom, koje sijeku jednu ravnalicu naše kongruencije, a druga im prolazi trostrukom točkom, ima u našoj linearnoj hiperboličkoj kongruenciji ∞^7 pravčastih ploha 4. reda X.

[16] *Müller-Krames,* Cit. pod 2), str. 266.

vrste. Cirkularnih krivulja 4. reda s trostrukom točkom, isto tako postavljenih, ima u svakoj ravnini ∞^5, dakle svaka točka ravnalica a, b je izolirana kružna za isto toliko ploha ove vrste u našoj kongruenciji. Odatle izlazi i ovaj stavak:

U linearnoj hiperboličkoj kongruenciji nalazi se ∞^6 pravčastih ploha 4. reda X. vrste, koje imaju izolirane kružne točke.

2) Parabolička linearna kongruencija

U paraboličkoj linearnoj kongruenciji nalaze se *Cayley*eve pravčaste plohe 3. reda. Budući da na takvim plohama nema imaginarnih parova izvodnica, nema na njima ni izoliranih kružnih točaka, pa tako one ne ulaze u naša razmatranja.

Kod pračastih ploha 4. reda nalaze se u toj kongruenciji plohe II. iVIII. vrste, pa ćemo razmotriti, koliko ima u njoj tih ploha uopće, a ploha s izoliranim kružnim točkama napose.

a) Pravčaste plohe 4. reda II. vrste

Pustimo li kod pravčastih ploha 4. reda I. vrste da dvostruke ravnalice a, b padnu neizmjerno blizu, onda linearna hiperbolička kongruencija prelazi u linearnu paraboličku kongruenciju, a ploha I. vrste prelazi u plohu II. vrste. Ovakvu plohu 4. reda čine prema tome sve one zrake paraboličke linearne kongruencije kao njene izvodnice, koje sijeku ravninsku krivulju 3. reda roda prvoga, ako ona siječe ravnalicu te kongruencije, a tangenta te krivulje u tom sjecištu je zraka te kongruencije[17]. U svakoj ravnini prostora ima opet ∞^7 krivulja 3. reda, koje sijeku ravnalicu neke paraboličke kongruencije, a tangenta im je u tom sjecištu zraka te kongruencije, jer ih je jednom tangentom i diralištem upravo toliko određeno. Svih ravnina ima ∞^3, a na svakoj plohi te kongruencije ima ∞^2 ravninskih krivulja 3. reda, dakle isto kao kod ploha I. vrste ima i ovdje u linearnoj paraboličkoj kongruenciji ∞^8 pravčastih ploha 4. reda II. vrste.

Svakom realnom točkom ravnalice paraboličke kongruencije prolazi opet jedan izotropan par zajedničkih izvodnica za ∞^6 takvih ploha u toj kongruenciji. Dakle je i ovdje svaka točka ravnalica izolirana kružna točka za ∞^6 pravčastih ploha 4. reda II. vrste u našoj parboličkoj kongruenciji, a svih ploha s izoliranim kružnim točkama u ovakvoj kongruenciji ima ∞^7.

Izaberemo li kod ovakve kongruencije opet po volji točku S na njenoj ravnalici, tad je njoj projektivno pridružena jedna ravnina

[17] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 250.

te ravnalice, u kojoj se nalaze sve zrake te kongruencije, koje prolaze točkom S. U ravnini, koja je bilo gdje paralelna s tom ravninom točke S, postavimo jednu cirkularnu krivulju 3. reda roda prvoga tako, da ona prolazi neizmjerno dalekim probodištem ravnalice s tom ravninom. Točka S neka je opet vrh, a opisana krivulja neka je baza stošca 3. reda. Ravnalica kongruencije je izvodnica tog stošca, a tangencijalnoj ravnini stošca duž te ravnalice neka je na toj ravnalici pridružena recimo točka P. Postavimo li bilo kojom zrakom naše paraboličke kongruencije, koja prolazi točkom P, bilo koju ravninu i tom ravninom siječemo naš stožac, tad će svaki taj presjek biti ravnalicu 3. reda za neku pravčastu plohu 4. reda II. vrste, kojoj je ravnalica kongruencije dvostruka ravnalica, a izabrana točka S izolirana kružna točka. To je ovako zato, što svaka ova presječna krivulja stošca dira u točki P jednu zraku kongruencije, kao što to zahtijeva definicija ovakvih ploha. Na taj smo način dobili ∞^2 naših ploha, kojima je točka S zajednička izolirana kružna točka. U ravnini baze našeg stošca možemo uzeti svih ∞^5 cirkularnih krivulja 3. reda roda prvoga kao baze stošca za vrh S, kojima će točka P ostati ista, odnosno za sve točke P na ravnalici kongruencije bit će u ravnini baze ∞^6 spomenutih cirkularnih baza, odnosno toliko će biti stožaca 3. reda sa zajedničkim vrhom S. Na svakom stošcu ima, kao što smo vidjeli, ∞^2 ravninskih ravnalica 3. reda roda prvoga, dakle svih takvih krivulja ima ∞^8. Kako se međutim na svakoj našoj plohi nalazi već ∞^2 od tih krivulja, dobivamo opet poznati broj ∞^6 pravčastih ploha 4. reda II. vrste u našoj kongruenciji, kojima je točka S izolirana kružna. Naša razmatranja daju nam međutim i ovaj stavak:

Izaberemo li na ravnalici neke linearne paraboličke kongruencije po volji točku S kao vrh stošca, kojemu je baza bilo koja cirkularna krivulja 3. reda roda prvoga u bilo kojoj paralelnoj ravnini s ravninom pramena zraka kongruencije u točki S, a koja je krivulja u tim ravninama postavljena tako, da asimptotska ravnina kongruencije siječe uvijek ravninu te krivulje u njenoj asimptoti, onda na svakom takvom stošcu postoji ∞^2 presječnih krivulja, koje su ravnalice pravčastih ploha 4. reda II. vrste u našoj kongruenciji, za koje sve plohe je točka S zajednička izolirana kružna točka.

b) Pravčaste plohe 4. reda VIII. vrste

Zadamo li uz paraboličku kongruenciju i neku čunjosječnicu, koja ne siječe ravnalicu te kongruencije, onda sve zrake te kongruencije, koje sijeku tu čunjosječnicu, čine izvodnice neke pravčaste plohe 4. reda VIII. vrste[18]. Znademo, da u svakoj ravnini prostora ima ∞^5 čunjosječnica. Na svakoj našoj plohi ima ih ∞^1, dakle svih ∞^8 čunjosječnica složeno je na ∞^7 pravčastih ploha 4. reda VIII. vrste u našoj linearnoj paraboličkoj kongruenciji. Sve te plohe sijeku opet svaku ravninu ravnalice u pramenu zraka te kongruencije, koje se u parovima nalaze na tim plohama. Svakim takvim parom prolazi prema tome ∞^5 tih ploha, jer svih tih parova ima, kao što znademo, ∞^2. Isto naravski vrijedi i za izotropan par zraka, pa prema tome dobivamo i ovaj stavak:

Svaka točka ravnalice neke linearne paraboličke kongruencije je izolirana kružna točka za ∞^5 pravčastih ploha 4. reda VIII. vrste u ovoj kongruenciji. Svih takvih ploha s izoliranim kružnim točkama ima prema tome u takvoj kongruenciji ∞^6.

Uzmimo na ravnalici naše kongruencije opet po volji točku S kao vrh stošca, kojemu se kružna baza nalazi u jednoj ravnini paralelnoj s ravninom pramena zraka kongruencije u točki S. Svaki ravninski presjek tog stošca bit će ravnalica neke pravčaste plohe 4. reda VIII. vrste, koja će s navedenim stošcem imati zajednički par izotropnih izvodnica. Dakle za sve tako nastale plohe u našoj kongruenciji bit će točka S izolirana kružna. Svih kružnica u ravnini baze ima ∞^3, dakle isto toliko ima i stožaca za vrh S, odnosno onih ravninskih presjeka. Kako se međutim ∞^1 od tih presjeka nalazi na jednoj našoj plohi, dobivamo tako opet ∞^5 takvih ploha, kojima je točka S izolirana kružna. Iz naših razmatranja proizlazi međutim i ovaj stavak:

Odaberemo li na ravnalici neke linearne paraboličke kongruencije, po volji točku S kao vrh onih stožaca 2. reda, koji u ravnini pramena zraka kongruencije, koje prolaze točkom S, imaju par izotropnih izvodnica, onda se svaki presjek ovih stožaca može uzeti kao ravnalica jedne pravčaste plohe 4. reda VIII. vrste u toj kongruenciji koja će uvijek imati točku S kao izoliranu kružnu točku.

3) Kongruencija prvog reda trećeg razreda bisekanata kubne čunjosječnice

U ovakvoj kongruenciji nalaze se, kao što je poznato, pravčaste plohe 4. reda III. i IV. vrste. Zadamo li neku kubnu čunjosječnicu i jednu običnu čunjosječnicu, koja kubnu dva puta siječe, onda sve bisekante te kubne čunjosječnice, koje ovu običnu čunjosječnicu

[18] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 262.

sijeku, čine pravčastu plohu 4. reda III. vrste Ako uzmemo one bisekante ovakve kubne čunjosječnice, koje sijeku jedan pravac, a taj ne siječe kubnu čunjosječnicu, onda takve bisekante čine pravčastu plohu 4. reda IV. vrste.

a) *Pravčaste plohe 4. reda III. vrste*

U svakoj ravnini prostora nalazi se ∞^3 čunjosječnica, koje dva puta sijeku neku kubnu čunjosječnicu, dakle svih takvih čunjosječnica u prostoru ima ∞^6. Kako se po ∞^1 tih čunjosječnica nalazi uvijek na jednoj pravčastoj plohi 4. reda III. vrste, ima u kongruenciji bisekanata te kubne čunjosječnice ∞^5 takvih ploha. Sve izvodnice ovih ∞^5 ploha, koje prolaze jednom točkom S kubne ravnalice (zajednička dvostruka ravnalica tih ploha), čine stožac 2. reda. Na svakoj plohi nalaze se po dvije od tih izvodnica, a svih takvih parova ima ∞^2. Dakle svakim tim parom prolazi ∞^3 ovakvih ploha, a prema tome i parom izotropnih zraka te kongruencije u točki S. Kako na kubnoj ravnalici ima ∞^1 točaka S, dobivamo i ovaj stavak:

S v a k a t o č k a n e k e k u b n e č u n j o s j e č n i c e j e i z o l i r a n a k r u ž n a t o č k a z a ∞^3 p r a v č a s t i h p l o h a 4. r e d a III. v r s t e, k o j e s e n a l a z e u k o n g r u e n c i j i b i s e k a n a t a t e k r i v u l j e. U t o j k o n g r u e n c i j i i m a p r e m a t o m e ∞^4 t a k v i h p l o h a 4. r e d a III. v r s t e, k o j e i m a j u n a s e b i i z o l i r a n e k r u ž n e t o č k e.

Sve zrake naše kongruencije prvog reda trećeg razreda, koje prolaze jednom točkom S njene kubne ravnalice, čine stožac 2. reda. Odaberimo u prostoru jednu ravninu kružnog presjeka ovog stošca i u njoj jednu kružnicu c, koja taj stožac realno siječe. Stožac vrha S i kružnice c sjeći će izvan vrha S dva puta realno kubnu ravnalicu, recimo u točkama M, N. Svaki ravninski presjek stošca (Sc), koji prolazi točkama M, N određivat će s kubnom ravnalicom jednu plohu 4. reda III. vrste, kojoj će točka S biti izolirana kružna, jer će zajednički par izotropnih izvodnica obaju spomenutih stožaca ležati i na svakoj toj plohi. Svih kružnica c ima u spomenutoj ravnini ∞^3, a svaka od njih daje ∞^1 ploha. Svih presječnih čunjosječnica na ∞^3 stožaca kroz ∞^3 pridruženih parova točaka M, N ima ∞^4, ali na svakoj dobivenoj plohi nalazi se ∞^1 od tih presječnih čunjosječnica. Dakle imamo opet ∞^3 naših ploha, kojima je točka S izolirana kružna. Iz naših razmatranja proizlazi prema tome za takve plohe ovaj stavak:

S v a k a t o č k a S n e k e k u b n e č u n j o s j e č n i c e b i t ć e i z o l i r a n a k r u ž n a t o č k a z a s v e o n e p r a v č a s t e p l o h e 4. r e d a III. v r s t e u k o n g r u e n c i j i b i s e k a n a t a t e k u b n e č u n j o s j e č n i c e, k o j e s u o d r e đ e n e s v i m r a v n i n s k i m p r e s j e c i m a, k r o z b i l o k o j i p a r t o č a k a t e k u b n e r a v n a l i c e, s v i h o n i h s t o ž a c a 2. r e d a v r h a

S, koji prolaze tim parovima točaka, a imaju na sebi izotropan par bisekanata te kongruencije u točki S.

b) Pravčaste plohe 4. reda IV. vrste

Svakom točkom kubne ravnalice neke kongruencije 1. reda trećeg razreda prolaze dva para izotropnih zraka te kongruencije, jer sve zrake te kongruencije, koje prolaze jednom točkom, čine stožac 2. reda. Svi ti parovi nalaze se u ∞^1 realnih ravnina, a u svakoj toj ravnini ima ∞^2 pravaca, od kojih se svaki može uzeti kao ravnalica pravčastih ploha 4. reda IV. vrste u našoj kongruenciji. Svaki ovakav par izotropnih zraka ležat će prema tome na ∞^2 takvih ploha, t. j. sve će one imati istu izoliranu kružnu točku. Kako nam svaki od ∞^4 pravaca prostora daje jednu ovakvu pravčastu plohu 4. reda IV. vrste u našoj kongruenciji, vrijedi za njih ovaj stavak:

U kongruenciji bisekanata kubne čunjosječnice ima ∞^4 pravčastih ploha 4. reda IV. vrste, među kojima ima ∞^3 s izoliranim kružnim točkama. Svaka točka ravnalice je izolirana kružna točka za ∞^2 takvih ploha.

Iz naših razmatranja o plohama 4. reda ove vrste proizlazi još i ova činjenica:

Neka pravčasta ploha 4. reda IV. vrste imat će izoliranu kružnu točku samo onda, ako linearna ravnalica te plohe leži u ravnini jednog izotropnog para zraka kongruencije bisekanata dvostruke kubne ravnalice te plohe.

Ako se linearna ravnalica nalazi u ravninama dvaju takvih parova izotropnih zraka, onda su oba sjecišta tih parova na kubnoj ravnalici izolirane kružne točke. Budući da tih parova izotropnih zraka kongruencije ima ∞^1, a ravnina svakog od njih siječe sve ostale, proizlazi odatle odmah i ovaj stavak:

U kongruenciji bisekanata neke kubne čunjosječnice ima ∞^2 pravčastih ploha 4. reda IV. vrste, koje na sebi imaju dvije izolirane kružne točke.

4) Kongruencije prvog reda drugog razreda

Raspadne li se kubna čunjosječnica u pravac i običnu čunjosječnicu, onda sve bisekante ovakve raspadnute krivulje (osim onih u ravnini čunjosječnice) čine kongruenciju 1. reda drugog razreda. U ovakvoj kongruenciji nalaze se pravčaste plohe 4. reda V. i VI. vrste.

a) Pravčaste plohe 4. reda V. vrste

Pravčaste plohe 4. reda ovakve vrste daju nam one zrake kongruencije 1. reda drugog razreda (ravnalica joj se sastoji od pravca l i čunjosječnice k s jednom zajedničkom točkom), koje sijeku jednu čunjosječnicu, koja dva puta siječe kvadratni dio k ravnalice lk. U prostoru ima ∞^6 čunjosječnica, koje dva puta sijeku čunjosječnicu k, a po ∞^1 od tih čunjosječnica nalazi se na svakoj plohi određenoj s takvom jednom čunjosječnicom. U ovakvoj kongruenciji postoji prema tome, analogno kao kod III. vrste, ∞^5 pravčastih ploha 4. reda V. vrste. Svakom točkom linearnog dijela l ravnalice prolazi ∞^1 zraka naše kongruencije, koje čine stožac 2. reda, a svakom točkom kvadratnog dijela k ravnalice prolazi pramen tih zraka. Svakom točkom bilo od k, bilo od l, prolazi dakle ∞^2 parova tih zraka, i zato svakim parom, a prema tome i izotropnim, prolazi ∞^3 pravčastih ploha 4. reda V. vrste u našoj kongruenciji. A kako svakom točkom linearnog i kvadratnog dijela ravnalice prolazi jedan, odnosno dva para izotropnih zraka naše kongruencije, to i u ovom slučaju dobivamo analogan stavak onome kod ploha III. vrste:

Između ∞^5 pravčastih ploha 4. reda V. vrste u kongruenciji 1. reda drugog razreda ima ih ∞^4 s izoliranim kružnim točkama, a svaka točka ravnalice izolirano je kružna za ∞^3 tih ploha.

Uzmimo i ovdje bilo koju točku S linearnog dijela l ravnalice kao vrh bilo kojeg između ∞^3 stožaca 2. reda, koji imaju zajedničke izotropne izvodnice sa stošcem (Sk). Svaki taj stožac probijmo kvadratnim dijelom k ravnalice u dvije moguće realne točke M, N. Svi presjeci svakog tog stošca s pramenom ravnina pripadnog para točaka M, N bit će one čunjosječnice, koje s ravnalicom lk daju po jednu plohu 4. reda V. vrste u našoj kongruenciji, kojima će točka S uvijek biti izolirano kružna.

Ako točku S uzmemo negdje na kvadratnom dijelu k ravnalice, dobit ćemo analogno tada, kad uzmemo one stošce 2. reda vrha S, koji u ravnini Sl imaju zajednički par izotropnih izvodnica.

b) Pravčaste plohe 4. reda VI. vrste

Budući da je linearni dio l ravnalice lk kod ovih ploha uvijek torzalan pravac, ne mogu plohe 4. reda VI. vrste unutar naše kongruencije imati izoliranih kružnih točaka na pravcu l.

Plohe ove vrste čine sve one zrake naše kongruencije, koje sijeku takvu jednu kubnu čunjosječnicu, koja jednom siječe linearni i kvadratni dio ravnalice lk[19]. Svaka ravnina prostora siječe plohu 4. reda u krivulji 4. reda. Ovakva je krivulja općeno određena s 14 točaka, t. j. u svakoj ravnini ima takvih krivulja ∞^{14}. Ako na njoj

[19] *Müller-Krames*, Cit. pod 2), str. 263.

ima dvostrukih točaka, onda takve imaju vrijednost kao tri obične točke, prema poznatoj vrijednosti $\frac{1}{2} n(n+1)$ za n-struke točke.

Odaberimo na kvadratnom dijelu k ravnalice po volji točku S i bilo gdje postavimo ravninu ϱ usporedno s ravninom točke S i pravca l kao linearnog dijela ravnalice, te njom presijecimo ravnalicu lk. Postavimo li u toj ravnini jednu cirkularnu krivulju 4. reda, kojoj su sva tri sjecišta s ravnalicom lk dvostruke točke, onda sve zrake naše kongruencije, koje sijeku tu krivulju, čine neku pravčastu plohu 4. reda, kojoj je točka S izolirana kružna točka, jer njene spojnice s apsolutnim točkama te krivulje leže na toj pravčastoj plohi. Jedna dvostruka točka (na pravcu l) nalazi se u neizmjernosti. Uzmemo li ovu cirkularnu krivulju tako, da jedna njena asimptota leži u ravnini pravca l, koja dira čunjosječnicu k, onda će nastala pravčasta ploha 4. reda biti VI. vrste. Ona će biti VI. vrste zato, što u tom slučaju pravac l postaje torzalan pravac 2. reda na toj plohi. Ovakvih cirkularnih krivulja 4. reda (14—2) u ravnini ϱ, koje imaju spomenute tri dvostruke točke (14—2—9) i kojima jedna asimptota leži u opisanoj ravnini (14—2—9—1 = 2) ima ∞^2, dakle je točka S izolirana kružna točka za ∞^2 pravčastih ploha 4. reda VI. vrste u našoj kongruenciji. Jer točaka S ima ∞^1 izlazi:

U kongruenciji 1. reda drugog razreda ima ∞^3 pravčastih ploha 4. reda VI. vrste, na kojima postoje izolirane kružne točke.

5) Linearni singularni kompleks

Budući da se nijedna od pravčastih ploha 4. reda IX., XI. i XII. vrste ne nalazi samo u jednoj kongruenciji 1. reda, nego u njih neizmjerno mnogo, razmotrit ćemo takve vrste jednu po jednu u jednom linearnom singularnom kompleksu, u kojem se one nalaze, jer svaka od njih ima jednu linearnu ravnalicu. Plohe XII. vrste nemaju na dvostrukoj ravnalici izoliranih dvostrukih točaka, dakle ne mogu imati ni izoliranih kružnih točaka, a prema tome ispadaju iz naših razmatranja.

a) Pravčaste plohe 4. reda IX. vrste

Zadamo li neki pravac l i dvije čunjosječnice tako, da one sijeku taj pravac, ali se ne sijeku međusobno, onda svi pravci koji te tri linije sijeku čine neku pravčastu plohu 4. reda IX. vrste[20]. Pravac l neka je ravnalica singularnog linearnog kompleksa. Svih čunjosječnica u prostoru, koje sijeku pravac l, ima ∞^7. Parova tih čunjosječnica ima ∞^{14}, dakle toliko bi čini se moralo biti i pravčastih ploha 4. reda IX. vrste u našem kompleksu ravnalice l. Međutim svakom čunjosječnicom, koja siječe pravac l, već prolazi ∞^7 naših

[20] *Mülller-Krames*, Cit. pod 2), str. 258.

ploha, jer svaku tu čunjosječnicu možemo pridružiti kao par svakoj drugoj takvoj čunjosječnici, koji par zajedno s ravnalicom daje jednu plohu. Dakle izlazi, da u jednom linearnom singularnom kompleksu ima ∞^7 pravčastih ploha 4. reda IX. vrste.

Svakom točkom trostrukog pravca ovakve plohe prolaze tri njene izvodnice. Svakom točkom ravnalice l našeg kompleksa prolazi ∞^2 njegovih zraka, koje možemo složiti u ∞^6 skupina po tri zrake. Svaka ploha ove vrste u našem kompleksu ima na sebi po jednu ovu skupinu, a točaka na ravnalici l ima ∞^1, dakle uistinu ima ∞^7 tih ploha u našem kompleksu. Svakom točkom ravnalice l prolazi ∞^2 ravnina, a u svakoj toj ravnini nalazi se ∞^2 parova zraka tog kompleksa, između kojih je i jedan izotropan. Svakom takvom točkom prolazi dakle ∞^2 parova izotropnih zraka našeg kompleksa, a svakim tim parom prolazi ∞^2 naših ploha. Kako točaka na ravnalici ima ∞^1, dobivamo i ovaj stavak:

U linearnom singularnom kompleksu nekog pravca l kao ravnalice ima ∞^5 pravčastih ploha 4. reda IX. vrste, kojima je ta ravnalica trostruk pravac, a koje imaju izolirane kružne točke.

b) *Pravčaste plohe 4. reda XI. vrste*

Kazali smo kod ploha IX. vrste, da svakom točkom trostrukog pravca prolaze tri izvodnice. Padne li jedna od tih triju izvodnica u taj trostruki pravac, onda on postaje torzalan, a ploha se pretvara u pravčastu plohu 4. reda XI. vrste. Ako postavimo dvije čunjosječnice, koje se ne sijeku, tako, da one sijeku ravnalicu l, a njihove tangente u tim sjecištima leže s pravcem l u jednoj ravnini, onda svi pravci, koji sijeku te tri linije čine pravčastu plohu 4. reda XI. vrste. Svakom točkom ravnalice prolazi po jedan par izvodnica i jedna torzalna ravnina. Takvih parova pravaca ima ∞^4, a torzalnih ravnina postavljenih pravcem l ima ∞^1, t. j. koliko i točaka na tom pravcu. Dakle vidimo, da pravčastih ploha 4. reda XI. vrste ima u linearnom singularnom kompleksu ∞^6.

Parova izotropnih zraka našeg kompleksa, koje prolaze jednom točkom S ravnalice l, ima opet ∞^2. Pridružimo li svakom paru po jednu torzalnu ravninu pravca l, tad vidimo, da je točka S izolirana kružna za ∞^3 pravčastih ploha 4. reda XI. vrste u našem kompleksu. Kako ovo vrijedi za svaku točku S ravnalice l, dobivamo još i ovaj stavak:

U linearnom singularnom kompleksu nekog pravca l kao ravnalice ima ∞^4 pravčastih ploha 4. reda XI. vrste, koje na sebi imaju izolirane kružne točke.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 26. IX. 1950.

EXTRAIT DE »RAD« DE L'ACADÉMIE YOUGOSLAVE,
TOME 292, pp. 193-222

V. NIČE

POINTS CIRCULAIRES ISOLÉS DES SURFACES RÉGLÉES DE 3^e ET 4^e ORDRE*

On appelle homothétiques toutes les coniques qui contiennent les mêmes deux points réels ou imaginaires à l'infini. Toutes les coniques des surfaces réglées de 3^e et 4^e ordre, projetées d'un point O de la ligne double sur un plan parallèle à la paire de génératrices du point O, deviennent des coniques homothétiques. En effet, toutes ces coniques projetées contiennent les mêmes deux points à l'infini.

On donne la réponse à la question suivante: Y a-t-il des points sur les lignes doubles des surfaces de 3^e et 4^e ordre, tels que toutes les coniques de ces surfaces, projetées de ces points sur les plans parallèles à leurs paires de génératrices, deviennent des cercles? Ou bien: Y a-t-il des points sur les lignes doubles des surfaces de 3^e et 4^e ordre où se coupe une paire de génératrices minimales? Nous appelons ces points »circulaires«.

Comme un tel point circulaire est toujours l'intersection d'une paire de génératrices isotropes, il se trouve nécessairement sur une partie isolée d'une ligne multiple. Par cette raison, et aussi pour distinguer ces points des autres points circulaires, dont il existe en général 18 resp. 24 sur de telles surfaces (*R. Sturm*), nous les appellerons points circulaires isolés.

La courbe à l'infini d'une surface réglée de 3^e ordre est coupée en trois paires de points par la conique absolue. Il s'en suit que la surface ne peut contenir que trois cercles. Une paire de génératrices minimales avec un point réel circulaire est donnée si le point T_∞ à l'infini de la droite directrice simple de la surface se trouve sur la droite de jonction d'une des paires des points susdites. Le point T_∞ ne peut se trouver que sur deux droites de jonction des trois paires des points, car les polaires du point T_∞ par rapport à la courbe à l'infini de la surface réglée et à la conique absolue se coupent en

* Le titre original de ce travail: *Izolirane kružne točke na pravčastim plohama 3. i 4. reda.*

deux points. On en déduit que sur une surface réglée de 3^e ordre ne peuvent se trouver plus de deux points circulaires isolés.

Comme la courbe à l'infini du conoïde de 3^e ordre dégénère en la droite directrice simple et deux génératrices, il ne peut se trouver qu'un point circulaire isolé sur un conoïde de 3^e ordre.

La paire de génératrices d'un point sur la droite double peut être considérée comme paire de rayons doubles d'une involution de rayons.

La discussion des points circulaires isolés de ce point de vue donne la proposition suivante:

Les points circulaires isolés sont possibles sur les surfaces réglées de 3^e ordre à points cuspidaux si la distance de la droite double du point central de l'involution sur la droite directrice simple est moindre que la distance de ce point central des points doubles de cette involution.

Ceci n'est qu'une condition nécessaire, et non pas suffisante pour l'existence des points circulaires isolés sur les surfaces réglées de 3^e ordre. Une condition nécessaire et suffisante est donnée par la proposition suivante:

Afin qu'il existe un ou deux points circulaires isolés sur une surface réglée de 3^e ordre, il faut et il suffit que le faisceau de plans de la génératrice parallèle à la directrice simple contienne un ou deux plans coupant la surface en cercle.

Par des considérations semblables on obtient la proposition suivante concernant les conoïdes de 3^e ordre:

Pour que le point circulaire isolé existe sur un conoïde de 3^e ordre, il faut et il suffit que les lignes torsales réelles du conoïde soient orthogonales.

On déduit aussi aisément:

S'il y a un point circulaire isolé O_1 sur un conoïde de 3^e ordre, le conoïde harmoniquement associé contient aussi un point circulaire O_2. Les points cuspidaux communs K_1, K_2 et les points O_1, O_2 donnent le rapport harmonique $(K_1K_2O_1O_2) = -1$.

L'application de ce résultat au conoïde de *Plücker* donne:

Toutes les coniques du conoïde associé harmoniquement au conoïde de *Plücker*, projetées du centre du conoïde de *Plücker* sur un plan directeur quelconque, deviennent des cercles.

On a montré dans ce travail comment on peut former une surface réglée de 3^e ordre contenant un ou deux points circulaires isolés.

Comme on a toujours une paire de génératrices isotropes qui passent par un point circulaire isolé, il sera le plus simple de former une surface réglée du 3^e ordre à un point circulaire isolé comme il suit: Choisissons sur un cône du 2^e ordre une génératrice d comme directrice double et une conique c comme directrice quadratique simple d'une telle surface réglée. Sa directrice linéaire simple soit dans le plan d'une paire de génératrices isotropes de ce cône. Le sommet de ce cône sera le point circulaire isolé de la surface réglée du 3e ordre ainsi formée.

Si la directrice simple l se trouve à l'infini, la surface est un conoïde et si nous remplaçons le cône par un cylindre le point circulaire isolé est aussi à l'infini.

Si la directrice simple l est parallèle au plan de l'autre paire de génératrices isotropes du cône et si la directrice quadratique c est un cercle qui est aussi parallèle à ce même plan, la surface aura un deuxième point circulaire isolé. Ce point se trouve à l'intersection de la directrice double d avec celui des plans des sections circulaires du cône qui passe par la directrice simple l, mais ne passe pas par le sommet du cône.

La courbe r_∞ à l'infini de la surface réglée de 4e ordre est coupée par la conique absolue en quatre paires de points. Soit s_∞ la courbe à l'infini de la torse des plans des coniques de ces surfaces réglées. Si toutes les droites de jonction de ces paires de points à l'infini, ou quelques-unes d'entre elles, touchent la courbe s_∞, chacune de ces droites donne un cercle ou un point circulaire isolé.

Sur certaines surfaces réglées de 4e ordre il peut y avoir deux coniques ou paires de génératrices dont les plans sont parallèles. Dans ce cas la conique d'un plan et la paire de génératrices de l'autre ont les points à l'infini communs. Il s'ensuit:

Le nombre total de cercles et de points circulaires isolés sur les surfaces réglées de 4e ordre peut surpasser quatre, tandis que le nombre des points circulaires isolés et le nombre des cercles ne surpassent jamais quatre.

À cause de la dégénération de la courbe s_∞ auprès des surfaces réglées de 4e ordre on peut énoncer pour ces surfaces ceci: Sur une ligne double des surfaces de 4e ordre et de Ie espèce il ne peut exister plus de trois points circulaires isolés. On constate que sur les surfaces de IIe espèce il ne peut y avoir plus de deux points circulaires isolés.

De plus, on trouve pour les surfaces de IIIe espèce:

S'il existe sur une surface réglée de 4e ordre et de IIIe espèce deux paires de génératrices, dont les plans sont parallèles et que l'un d'eux contienne un cercle de la surface réglée, l'autre contient toujours un point circulaire isolé.

Sur les surfaces réglées de 4e ordre et de IIIe et IVe espèce le nombre de points circulaires isolés ne peut surpasser quatre. Il n'y a des cercles que sur les surfaces de IIIe espèce.

Par la discussion des courbes r_∞ et s_∞ auprès des surfaces réglées de 4e ordre et de Ve espèce on voit que la conique double de ces surfaces ne peut contenir plus de trois points circulaires isolés. Si les plans des coniques de cette surface enveloppent un cylindre, le nombre des points circulaires isolés sur la droite double de la surface sera égal au nombre des cercles.

Sur les surfaces de VI^e espèce il n'y a pas de coniques et, par conséquent, non plus de cercles. La possibilité et le nombre de points circulaires isolés, dependent encore des circonstances connues et de la forme des courbes r_∞ et s_∞ (un point).

On a pu obtenir quelques restrictions pour le nombre de points circulaires isolés des surfaces réglées de 4^e ordre et VII^e espèce. Des discussions à l'infini montrent que ces surfaces ne peuvent contenir plus de trois cercles. Les paires de rayons conjugués orthogonaux de l'involution circulaire conduisent à l'aide de nos considérations à la proposition suivante:

Sur une seule droite double des surfaces réglées de 4^e ordre et VII^e espèce il ne peut y avoir plus de deux points circulaires isolés.

De plus, on a constaté: Si la génératrice double de la surface est parallèle à l'une de ses droites doubles, le nombre de points circulaires isolés sur la seconde droite double est égal au nombre de cercles sur la surface. Les plans des cercles et les plans des génératrices minimales des points circulaires isolés sont parallèles.

On énonce pour les conoïdes de 4^e ordre et de VII^e espèce ceci:

Sur les conoïdes de 4^e ordre et VII^e espèce le nombre de cercles et le nombre de points circulaires isolés ne peuvent surpasser deux.

Si le point circulaire isolé d'un conoïde oblique du 3^e ou 4^e ordre se trouve à l'infini, il va sans dire que la paire de génératrices à l'infini n'est pas isotrope.

On a été amené à quelques surfaces de cette espèce qui ont un point C sur une de leurs droites doubles, jouissant de la propriété suivante: Toutes les coniques de ces surfaces sont projetées du point C sur tous les plans parallèles aux génératrices du point C en un faisceau de coniques concentriques homothétiques. Si le point C est un point circulaire isolé, on obtient un faisceau de cercles concentriques. Le point C peut se trouver à l'infini. Ce cas se présente pour le conoïde de toutes les normales d'un cylindre circulaire aux points d'une section plane.

Si le point C se trouve sur la droite double d_1, les deux lignes torsales des points cuspidaux de la droite double d_1 ont un point P de la droite double d_2 commun. Les points cuspidaux K_1, K_2 de la droite double d_1 et les points P, C forment le rapport harmonique $(K_1\, K_2 P\ C) = -1$.

Sur les surfaces des 4^e ordre et VIII^e espèce il ne peut y avoir que deux points circulaires isolés, parce que la courbe r_∞ à l'infini de cette surface possède un point autotangentiel. On a discuté les possibilités de construction des points circulaires isolés d'une manière semblable comme pour les surfaces de VII^e espèce.

Comme les surfaces réglées de 4^e ordre et IX^e et XI^e espèce ont les mêmes torses comme celles de III^e et V^e espèce, il se présente une certaine analogie. Si ces surfaces contiennent deux coniques à plans parallèles et s'il y a un cercle de la surface dans l'un de ces plans, l'autre contient toujours un point circulaire isolé.

Les surfaces de XI^e espèce admettent des constructions semblables à celles trouvées pour les surfaces de VIII^e espèce.

Les surfaces réglées de 4^e ordre et X^e et XII^e espèce ne contiennent pas de conique et, par conséquent, pas de cercles. Les points circulaires isolés ne sont possibles que sur les surfaces de X^e espèce.

Comme toutes les surfaces réglées du 3^e ordre et la plupart de celles du 4^e ordre se trouvent dans une congruence du I^{er} ordre, on détermine dans la suite de ce travail la quantité de celles de ces surfaces dans la congruence qui possèdent des points circulaires isolés. Dans la congruence linéaire hyperbolique se trouvent des surfaces réglées du 3^e ordre et des surfaces réglées du 4^e ordre de la I^{re}, VII^e et X^e espèce (*Sturm*). Il y a dans cette congruence ∞^4 de surfaces réglées du 3^e ordre ayant des points circulaires isolés, ∞^7 de telles surfaces du 4^e ordre de la I^{re} espèce et ∞^6 de la VII^e et X^e espèce. Dans la congruence linéaire parabolique se trouvent les surfaces de *Cayley* du 3^e ordre (n'ayant pas de points circulaires) et des surfaces réglées du 4^e ordre de la II^e et VIII^e espèce. Il y a dans cette congruence ∞^7 de telles surfaces de la II^e espèce ayant des points circulaires isolés et ∞^3 de telles surfaces de la IV^e espèce. avec des points circulaires isolés. Dans la congruence des bissecantes de la conique cubique (du I^{er} ordre et de la 3^e classe) se trouvent des surfaces réglées du 4^e ordre de la III^e et IV^e espèces. Il y a dans cette congruence ∞^4 de surfaces de la III^e espèce ayant des points circulaires isolés et ∞^3 de telles surfaces de la IV^e espèce. Les surfaces réglées du 4^e ordre de la V^e et VI^e espèce se trouvent dans une congruence du I^{er} ordre de la 2^e classe. Il y a dans cette congruence ∞^4 de surfaces de la V^e espèce ayant des points circulaires isolés et ∞^3 de telles surfaces de la VI^e espèce. Les surfaces réglées du 4^e ordre de la IX^e, XI^e et XII^e espèce ne se trouvent dans aucune de ces congruences, mais elles se trouvent dans un complexe linéaire singulier. Sur les surfaces réglées du 4^e ordre de la XII^e espèce il n'y a pas de points circulaires isolés. Dans le complexe linéaire singulier il y a ∞^5 de surfaces réglées du 4^e ordre de la IX^e espèce ayant des points circulaires isolés et ∞^4 de telles surfaces de la XI^e espèce.

En considérant les surfaces réglées du 4^e ordre dans une congruence du I^{er} ordre on obtient facilement des théorèmes qui nous indiquent le moyen de former des surfaces réglées du 4^e ordre ayant des points circulaires isolés. Ces considérations sont liées aux paires de droites isotropes dans une telle congruence. Voici quelques théorèmes:

a) Si une directrice d'une congruence linéaire hyperbolique passe par le sommet d'un cône du 2^e ordre, tandis que l'autre directrice se trouve dans le plan d'une paire de génératrices isotropes de ce cône, chaque conique sur ce cône est la directrice quadratique simple d'une surface réglée du 4e ordre de la VIIe espèce dans cette congruence. Le sommet du cône est le point circulaire isolé de la surface.

Si la directrice dans le plan d'une paire de génératrices isotropes du cône est parallèle au plan de l'autre paire et la directrice quadratique est un cercle du cône parallèle au plan de cette seconde paire de génératrices isotropes, on obtient une surface réglée du 4e ordre de la VIIe espèce à deux points circulaires isolés sur cette même directrice.

En partant de ce résultat on obtient aussi le théorème suivant:

b) Dans une congruence linéaire hyperbolique il y a ∞^4 de surfaces réglées du 4e ordre de la VIIe espèce ayant deux points circulaires isolés sur une directrice.

Pour les autres espèces de surfaces on a obtenu les théorèmes suivants:

c) Remplaçons le cône du 2e ordre du théorème a) par un cône du 3e ordre du genre premier, de sorte que la première directrice de la congruence soit une génératrice du cône et que dans le plan du sommet et de la seconde directrice se trouve une paire de génératrices isotropes de ce cône. Toute section plane de ce cône passant par son point d'intersection réel avec l'autre directrice de la congruence sera la directrice d'une surface du 4e ordre de la Ire espèce dans cette congruence, dont le point circulaire isolé est le sommet du cône.

d) Remplaçons maintenant le cône du théorème a) par un cône du 4e ordre à une génératrice triple, de sorte que la première directrice de la congruence soit une génératrice simple du cône tandis que la seconde directrice du cône coupe la génératrice triple. Si le plan du sommet du cône et de la seconde directrice de la congruence contient une paire de génératrices isotropes du cône, toute section plane du cône passant par le point d'intersection de la génératrice triple et de la seconde directrice de la congruence est la directrice d'une surface réglée du 4e ordre de la Xe espèce dans la congruence linéaire hyperbolique et le sommet du cône en est le point circulaire isolé.

Des théorèmes analogues sont en vigueur dans une congruence linéaire parabolique pour les surfaces réglées du 4e ordre de la IIe et VIIIe espèce, ces espèces pouvant être considérées comme des cas spéciaux de surfaces réglées du 4e ordre de la Ire et VIIe espèce lorsque leurs directrices doubles se confondent.

Dans la congruence du 1er ordre de la 3e classe des bissécantes d'une conique cubique se trouvent des surfaces réglées du 4e ordre de la IIIe et IVe espèce. Pour ces surfaces on a obtenu les théorèmes suivants:

e) Un point S d'une conique cubique est un point circulaire isolé pour toutes les surfaces réglées du 4e ordre de la IIIe espèce dans la congruence des bissécantes de cette courbe, dont les directrices du 2e ordre se trouvent sur un cône du 2e ordre au sommet S, passant par la paire de droites isotropes de la congruence. Les plans de ces directrices passent par deux points réels communs de la conique cubique et du cône, le point S étant exclus.

f) Toutes les surfaces réglées du 4e ordre de la IVe espèce dans la congruence des bissécantes d'une conique cubique, dont la directrice linéaire se trouve dans le plan d'une paire isotrope de ces bissécantes, auront le point d'intersection d'une telle paire comme point circulaire isolé commun. De cette manière nous avons obtenu la condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un point circulaire isolé sur de telles surfaces.

Si la directrice linéaire se trouve dans deux plans de paires de bissécantes isotropes, la surface aura évidemment deux points circulaires isolés.

En considérant la congruence du 1er ordre de la 2e classe comme cas dégénéré de la congruence du 1er ordre de la 3e classe, on obtient, par une voie analogue, un théorème analogue au théorème d) pour les surfaces réglées du 4e ordre de la Ve espèce se trouvant dans une telle congruence. Les surfaces du 4e ordre de la VIe espèce dans une telle congruence ne peuvent avoir un point circulaire isolé que sur la partie quadratique de la directrice de la congruence. A l'aide d'un cône du 4e ordre dont le sommet est sur la partie quadratique de la directrice, et d'une paire de génératrices isotropes du cône coupant la partie linéaire de la directrice, on obtient un théorème analogue pour toutes les surfaces réglées du 4e ordre de la VIe espèce dans cette congruence, dont le point circulaire isolé est le sommet du cône.