VILIM NIČE

Prilog načinima izvođenja ploha 3. reda

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
ZAGREB 1953

VILKO NIČE

PRILOG NAČINIMA IZVOĐENJA PLOHA 3. REDA

Uvod. Opće plohe 3. reda izvedive su na više raznih načina. Glavni postupci, kako se do njih dolazi jesu: poznata četiri postupka *J. Steinera*, onda postupak *J. Majcena* pomoću pridruženih pravaca neke kongruencije i dirnih ravnina plohe 2. reda, a najpoznatiji je postupak *H. Grassmanna* s tri kolinearna svežnja ravnina. Ostali postupci, kao na pr. *R. Sturma* i *Augusta*, već su indirektno sadržani u gore spomenutim. *H. Grassmann* kaže, da je opća ploha 3. reda proizvod triju kolinearnih svežnjeva ravnina, ako ti kolinearni svežnjevi nisu koncentrični, perspektivni, ili po dva od njih nemaju kao proizvod istu linearnu kongruenciju zraka. Kod našeg izvođenja općih ploha 3. reda u ovoj radnji ne ćemo uzeti tri svežnja ravnina kao *H. Grassmann,* nego samo jedan, ali ćemo uzeti još dvije linearne kongruencije zraka, za koje možemo pretpostaviti, da su nastale kao proizvod prvog svežnja ravnina s nekim drugim i trećim kolinearnim takvim svežnjem, koji s prvim imaju po jednu zajedničku zraku. Taj naš način mogao bi se prema tome smatrati jednim specijalnim slučajem *Grassmannova* načina. Međutim, *H. Grassmann* istražuje takve plohe, tek pošto ih preslika najprije u neku ravninu[1], a mi ćemo razmatranja tih ploha u našem postupku vršiti direktno u prostoru. Neke osobine takvih ploha dobiju se ovim putem jednostavnije i preglednije nego kod *H. Grassmanna*. Naročita je prednost ovdje u tome, što se svi pravci i njihova sjecišta mogu predočiti grafički pomoću jedne skrižaljke, koja nam onda zgodno služi za dalja istraživanja na takvim plohama, naročito s obzirom na njihove singularitete i broj i vrstu njihovih imaginarnih pravaca.

1. Pravci a, b neka su ravnalice linearne hiperboličke kongruencije (ab) zraka, a pravci c, d druge takve kongruencije (cd). U svakoj ravnini prostora nalazi se po jedna zraka svake te kongruencije, a sjecište tih zraka neka bude pridruženo toj ravnini. Na taj je način svakoj točki prostora jednoznačno pridružena jedna ravnina i obrnuto, osim nekih singularnih mjesta. Na taj smo način zapravo dobili neke vrste ništični prostor, ali ta jednoznačna pridruženost nije korelativna.

2. Uzmimo po volji u prostoru neki pravac p. Svezak ravnina tog pravca siječe pravce b, d u perspektivnim nizovima. Postavimo li sada pravcem a i nastalim nizom točaka na pravcu b svezak ravnina, tad je taj svezak ravnina projektivan sa spomenutim sveskom ravnina pravca p. Isto tako će i svezak ravnina pravca c i niza na pravcu d biti projektivan sa sveskom pravca p. Znademo, da je proizvod takvih triju projektivnih svezaka ravnina prostorna krivulja 3. reda[1], dakle će svim ravninama pravca p na opisani način pridružene točke ležati na nekoj prostornoj krivulji 3. reda.

Siječemo li ravninama pravca a pravce b, p, tad te ravnine sijeku ta dva pravca u dva projektivna niza, a spojnice pridruženih točaka su one zrake kongruencije (ab), koje sijeku pravac p. Postavimo li sada nizom točaka pravca p i pravcem d svezak ravnina, tad te ravnine sijeku pravac c u nizu točka, koji je također projektivan s nizom na pravcu p, a prema tome su projektivni i nizovi na pravcima b, c. Zrake kongruencija (ab) i (cd), koje prolaze točkama pravca p, leže prema tome u ravninama koje su određene pridruženim točkama u projektivnim nizovima pravaca a, d i p, dakle ravnine parova takvih pravaca čine neku kubnu omotaljku[2] (njem. Ebenengewinde), koja je dualna tvorevina prostornoj kubnoj krivulji. Vidimo dakle, da ravnine pridružene točkama nekog pravca omataju neku kubnu omotaljku ravnina.

3. Uzmimo sada, da pravac p siječe jednu ravnalicu, recimo pravac a u točki A. Zrake kongruencije (ab) u ravninama ovakvog pravca p čine pramen pravaca u ravnini Ab. Vrh tome pramenu je točka A, a zrake kongruencije (cd) u ravninama tog pravca p čine poznat sistem izvodnica neke plohe 2. reda. Presječna čunjosječnica te plohe s ravninom Ab bit će prema tome niz točaka pridružen ravninama pravca p, a ona siječe ravnalicu a. Točka A bit će također na toj čunjosječnici, jer je i pravac p izvodnica spomenute plohe 2. reda, samo što pripada drugom sistemu.

Uzmimo ponovo taj pravac p, pa istražimo, što omataju ravnine pridružene njegovim točkama? Točkama pravca p i pravcima b, d postavimo sveske ravnina. Svezak pravca b siječe pravac a u nizu, koji je perspektivan s nizom na pravcu p, odnosno ravninu ap u pramenu pravaca, dok pravac c siječe svezak pravca d u nizu, koji je projektivan s nizom na pravcu p. Pramen pravaca u ravnini ap projektivan je prema tome s nizom c, dakle, ravnine, koje spajaju njihove pridružene elemente, omataju stožac 2. reda. Vidimo dakle, da ravnine pridružene točkama ovakvog pravca p omataju stožac 2. reda.

4. Ako pravac p siječe obje ravnalice kongruencije (ab) ili (cd), t. j. ako je on jedna zraka te kongruencije, tada je ravninama tog pravca pridružen niz točaka tog istog pravca i obratno. Taj niz

[1] *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, Abt. I., str. 128.
[2] *Th. Reye*, Cit. pod 1), str. 128.

točaka i svezak ravnina su među sobom i projektivno pridruženi, jer je pravac p izvodnica drugog sistema plohe 2. reda, koju sačinjavaju zrake kongruencije (cd), odnosno (ab), koje se nalaze u ravninama pravca p, tako da su točke pridružene ovim ravninama zapravo njihova dirališta na toj plohi.

5. Ako pravac p siječe jednu ravnalicu jedne kongruencije, recimo u kongruenciji (ab) neka ravnalicu a siječe u točki A, i obje ravnalice u drugoj kongruenciji, dakle ravnalice c, d, tad je svakoj ravnini tog pravca pridruženo sjecište A, jer se u njoj sijeku zrake obiju kongruencija, koje leže u tim ravninama. Svakoj točki ovakvog pravca pridružena je ravnina pa, jer zrake obiju kongruencija, koje prolaze tim točkama, leže u toj ravnini.

6. Odaberimo međutim pravac p tako, da siječe jednu ravnalicu prve kongruencije i jednu ravnalicu druge kongruencije. Recimo, pravac a neka siječe u točki A, a pravac c u točki C. Zrake kongruencije (ab) u ravninama ovakvog pravca p čine pramen pravaca u ravnini Ab s vrhom u A, a isto tako i zrake kongruencije (cd) čine pramen pravaca u ravnini Cd s vrhom u C. Točke pridružene ravninama pravca p ležat će prema tome na presječnici ravnina Ab i Cd, dakle na jednoj transverzali pravaca b, d.

Ravnine pridružene točkama ovakvog pravca p čine opet svezak, čija os je spojnica probodišta pravca b s ravninom pa i probodišta pravca d s ravninom pc.

7. Ravnalice a, b, c, d naših kongruencija imaju dvije zajedničke transverzale. Nazovimo ih u i v. Uzmimo da naš pravac p siječe transverzalu u. Znamo, da je ravnalicama a, b i pravcem p, kao i ravnalicama c, d i tim pravcem, dana neka pravčasta ploha 2. reda. Niz točaka prodorne krivulje tih dviju ploha (osim pravaca p) pridružen je ravninama pravca p. Ta se krivulja raspada u pravac p i prostornu krivulju 3. reda. Budući da u našem slučaju te dvije plohe 2. reda imaju osim pravca p i pravac u zajednički, to će točke pridružene ravninama takvog pravca p ležati na nekoj čunjosječnici, koja mora sjeći pravac p i pravac u, jer su oni degenerirani dio prostorne krivulje 4. reda.

8. Ako pravac p siječe pravac u u zajedničkoj točki s jednom od četiriju ravnalica, tad točke pridružene ravninama tog pravca leže na nekom pravcu u ravnini druge ravnalice iste kongruencije i pravca u. Kada pravac p siječe ravnalicu bilo gdje, znademo (toč. 3.), da točke pridružene njegovim ravninama leže na jednoj čunjosječnici, za koju se može vrlo jednostavno pokazati, da može nastati i kao proizvod dvaju projektivnih pramenova u ravnini sjecišta pravca p i druge ravnalice kongruencije. Međutim u našem slučaju ta dva pramena postaju perspektivna, jer im je pravac u zajednička zraka, pa kao proizvod tih pramenova izlazi, kao što znademo, pravac.

9. Ako pravac p u prostoru odaberemo tako, da siječe obje transverzale u i v, tad malo prije spomenute obje plohe 2. reda imaju zajedničke pravce p, u i v, a prema tome kao četvrti elemenat njihove prodorne krivulje 4. reda ostaje još jedan pravac. Ravninama ovakvog pravca p pridružene točke leže dakle na jednom pravcu, koji mora sjeći i pravac u i pravac v, jer se točka pridružena ravnini pu, odnosno pv, nalazi na pravcu u, odnosno na pravcu v.

10. Uzmimo sada sve ravnine neke po volji u prostoru odabrane točke S i potražimo geometrijsko mjesto točaka, koje su pridružene tim ravninama na sprijeda u toč. 1. opisani način, uz zadane linearne hiperboličke kongruencije (ab) i (cd). Vrtimo li neprekinuto neku ravninu oko točke S, tad će neprekinuto u prostoru putovati i toj ravnini pridružena točka. Dakle se točke pridružene svim tim ravninama točke S moraju nalaziti na nekoj neprekinutoj plohi, koju nazovimo Δ.

Odaberimo po volji neki pravac p, pa istražimo, koliko zajedničkih točaka ima taj pravac s plohom Δ. Ravnine pridružene točkama pravca p čine neku kubnu omotaljku (toč. 2.), a svakom točkom prostora, dakle i točkom S, prolaze tri od tih ravnina. Odatle direktno izlazi, da pravac p ima s plohom Δ tri točke zajedničke, dakle to je ploha trećeg reda.

Spomenuli smo već u uvodu, da se ovaj način izvođenja općih ploha 3. reda može smatrati specijalnim slučajem poznatog H. *Grassmann*ovog izvođenja takvih ploha pomoću triju kolinearnih svežnjeva ravnina[3]. Ako su naime neke točke S, S_1 i S_2 vrhovi triju kolinearnih svežnjeva ravnina, a svežnjevi vrhova S, S_1 određuju jednu linearnu kongruenciju i svežnjevi vrhova S, S_2 drugu takvu kongruenciju, kojima su spojnice SS_1, SS_2 zajedničke zrake tih kolinearnih svežnjeva[4], tada će proizvod takvih triju kolinearnih svežnjeva biti ista ploha, kao i proizvod tih linearnih kongruencija i svežnja ravnina točke S.

Uzmimo točkom S bilo koji pravac p, koji siječe ravnalicu a recimo u točki A. Znamo, da se točke pridružene ravninama tog pravca nalaze na nekoj čunjosječnici, koja leži u ravnini Ab, a možemo je uzeti kao presjek te ravnine s hiperboloidom pravaca p, c, d (toč. 3.), dakle prolazi i točkom A. Ta čunjosječnica leži u jednoj ravnini pravca b, a to vrijedi za svaku točku A bilo gdje na ravnalici a. Uzmemo li sve pravce p_i točke S, koji sijeku ravnalicu a, kao osi svezaka ravnina, onda ti svesci sadržavaju sve ravnine točke S. Svakom takvom pravcu p_i pripada jedna spomenuta čunjosječnica u ravnini bA_i, a sve te čunjosječnice čine, kao što smo malo prije zaključili, opću plohu 3. reda, koju ravnine pravca b sijeku u čunjosječnicama. Prema tome se dakle pravac b nalazi čitav na

[3] *H. Grassmann*, Crelle Journal, 1855., sv. 49., str. 62.
[4] *Th. Reye*, Cit. pod 1), sv. II., str. 125.

plohi Δ. Isto tako nalaze se na plohi Δ i pravci a, c i d. Zrake s_1, s_2 kongruencija $(ab), (cd)$, koje prolaze točkom S, nalaze se također na plohi Δ, jer su točkama tih zraka pridružene njihove ravnine (toč. 4.). Na plohi Δ pronašli smo prema tome dosad ovih 6 pravaca: a, b, c, d, s_1 i s_2.

Zraku kongruencije (cd) u ravnini Sa označimo s m. Spojimo li bilo koju točku A_n ravnalice a s točkom S, tad točke pridružene svim ravninama pravca SA_n leže na nekoj čunjosječnici, koja prolazi točkom A_n i leži u ravnini pravca b (toč. 4.). Ta čunjosječnica siječe međutim i zraku m, jer se na njoj nalazi točka pridružena onoj ravnini pravca SA_n, koja prolazi ravnalicom a. Putujemo li točkom A_n po ravnalici a, tad sve čunjosječnice pridružene svescima ravnina pravaca SA_n sijeku zraku m, dakle se prema tome i pravac m nalazi na našoj plohi Δ. Posve analogno nalazit će se na plohi Δ zraka n kongruencije (cd), koja se nalazi u ravnini Sb, kao i zrake m_1, n_1 kongruencije (ab), koje se nalaze u ravninama Sc i Sd.

Budući da je ploha Δ trećeg reda, to se u ravninama $s_1 a$, $s_1 b$, $s_2 c$ i $s_2 d$ mora nalaziti i treći pravac, a to su upravo dobiveni pravci m, n, m_1 i n_1. Ta četiri pravca s gore spomenutim daju nam već deset pravaca plohe Δ. Iz naših razmatranja se vidi, da pravac a siječe pravce s_1, m, m_1, n_1, pravac b pravce s_1, n, m_1, n_1, pravac c pravce s_2, m, n, m_1, i pravac d pravce s_2, m, n, n_1, a pravac s_1 siječe osim toga pravce s_2, m, n, dok pravac s_2 siječe pravce m_1, n_1. Vidimo dakle, da se navedenih 10 pravaca plohe Δ siječe u 21 točki.

Budući da pravci m, n sijeku ravnalice c, d, kao i pravci m_1, n_1 ravnalice a, b, a ploha Δ je trećeg reda, to bi se u ravninama mc, md, nd, nc, $m_1 a$, $m_1 b$, $n_1 a$ i $n_1 b$ moralo nalaziti daljnjih osam pravaca te plohe. Svaka ravnina prostora siječe sve pravce naše plohe Δ, koliko ne prolazi nekim čitavim pravcem, a sva se ta sjecišta nalaze na presječnoj krivulji 3. reda. Uzmimo sada ravninu pravaca m, c. Sjecište pravca b s tom ravninom ne nalazi se ni na pravcu m, ni na pravcu c, dakle se mora nalaziti na trećem pravcu plohe Δ u toj ravnini. Odatle direktno izlazi, da taj treći pravac u ravnini pravaca m, c mora biti transverzala pravaca b, c. Znamo iz toč. 6., da ravnine pridružene točkama takve transverzale prolaze nekom transverzalom pravaca a, d. Budući da sve ravnine u našem slučaju prolaze točkom S, to ravnine pridružene točkama mogu prolaziti samo onom transverzalom pravaca a, d, koja prolazi točkom S. Točkom S može prolaziti samo jedna transverzala pravaca a, d, dakle postoji i samo jedna transverzala samih pravaca b, c, koja se nalazi na plohi Δ, a ta, kao što smo vidjeli, leži upravo u ravnini pravaca m, c. Analogno će u ravnini pravaca m, d ležati onaj pravac plohe Δ, koji je na isti način pridružen transverzali pravaca a, c, koja opet prolazi točkom S. Isto tako možemo dobiti treći pravac u ravninama pravaca n, c i n, d, a ovi će biti pridruženi transverzalama pravaca b, d i b, c, koje prolaze točkom S.

U ravnini točke S i pravca d nalazi se pravac n_1 plohe Δ, kao zraka kongruencije (ab), a u ravnini pravaca n_1, b nalazi se i treći pravac plohe Δ, koji je prema onome, što smo malo prije rekli, transverzala pravaca b, c, i to ona transverzala, koja je pridružena transverzali pravaca d, a što prolazi točkom S. Taj smo pravac međutim već imali, jer on leži u ravnini pravaca m, c. Posve analogno dobili bi i u ravninama pravaca $n_1 a$, $m_1 a$ i $m_1 b$ već poznati treći pravac, tako da se u sprijeda spomenutim ravninama pravaca mc, md, nc, nd, $m_1 a$, $m_1 b$, $n_1 a$ i $n_1 b$ ne nalazi zapravo daljih osam pravaca, nego samo četiri, jer su pravci u ravninama $mc = n_1 b$, $md \equiv m_1 b$, $nc \equiv n_1 a$ i $nd = m_1 a$ isti. S onima dosada poznatim pravcima, daju nam ovi sada 14 pravaca naše plohe.

Pravac u ravnini mc siječe osim pravaca m, c i pravce b, n_1, a posve analogno i ostala četiri pravca nose na sebi svaki po četiri sjecišta. Budući da pravac u ravnini nd ne siječe ni pravac c, ni pravac m, to on mora sjeći pravac u ravnini mc. Imali bi dakle dalja četiri sjecišta, ako to isto prenesemo i na ostala tri pravca, ali u istinu su samo dva, jer smo svako od njih brojili dva puta. Dosadanjih 14 pravaca naše plohe Δ sijeku se prema tome u 39 njenih točaka.

Zajedničke realne transverzalne u, v ravnalica a, b, c, d nalaze se također kao pravci na plohi Δ, jer točke pridružene ravninama spojnica točke S s bilo kojom točkom pravca u, odnosno v, leže na nekoj čunjosječnici, koja uvijek siječe pravac u, dnosno v (toč. 7.).

Spojmo točku S sa sjecištima pravaca u, v s ravnalicama a, b, c, d. Točke pridružene ravninama svake te spojnice leže na nekom pravcu (toč. 8.). Točke pridružene ravninama spojnice točke S sa sjecištem pravaca a, u leže na pravcu, koji leži u ravnini pravaca b, u. Analogno leži po jedan takav pravac plohe Δ i u ravninama ua, uc, ud, va, vb, vc i vd, tako da smo time dobili daljih osam njenih pravaca. S pravcima u, v i s onih četranest spomenutih daju nam ovi sada prema tome 24 pravca naše plohe Δ.

Pravci u, v sijeku ravnalice a, b, c, d, jer su oni zajedničke transverzale tih četiriju pravaca. Ravnina pravaca a, u siječe plohu Δ u tim pravcima i u još jednom trećem pravcu, a sve pravce plohe Δ u točkama, koje moraju ležati na ta tri pravca. Onaj treći pravac u spomenutoj ravnini au sjeći će prema tome sve one pravce plohe Δ, koji ne sijeku pravce a, u. Taj će treći pravac prema tome osim pravaca a, u sjeći još i pravce s_2, n, pravce u ravninama bv, cv, dv i pravce u ravninama mc i md, jer pravac a siječe pravce v, m, a pravac u pravce b, c, d. Taj treći pravac u ravnini pravaca a, u siječe prema tome devet daljih pravaca plohe Δ, a analogno čini to i preostalih sedam gore spomenutih pravaca u ravninama bu, cu, du, av, bv, cv i dv. Svih novih sjecišta, zajedno s onih osam na pravcima u, v, bilo bi prema tome 80. Budući da, međutim, u našem brojenju dolaze sjecišta pravca u ravnini au s pravcima u ravninama bv, cv i dv dva puta, a isto tako i onih u ravninama bu, cu i du, to treba taj broj smanjiti za 12. Vidimo dakle, da se 24 dosad otkrivena pravca na plohi Δ sijeku u 107 točaka.

Znamo, da se zrake s_1, s_2 kongruencije (ab) i (cd), koje prolaze točkom S, nalaze također na plohi Δ (toč. 4.). U ravnini tih dvaju pravaca mora se nalaziti i treći pravac plohe Δ, jer je ona trećeg reda. Potražimo taj pravac! Točkom S prolazi jedna transverzala pravaca u, v, koju nazovimo i. Točke pridružene ravninama te transverzale leže opet na jednom pravcu, nazovimo ga l, a koji je također transverzala pravaca u, v (toč. 9.). Točka pridružena ravnini pravca i i pravca s_1, odnosno s_2, mora biti na pravcu l (toč. 9.) i na pravcu s_1, odnosno s_2, dakle pravac l plohe Δ siječe pravce s_1, s_2 ove plohe. Tim smo u ravnini pravaca s_1, s_2 našli taj treći pravac, dakle i dvadeset peti pravac plohe Δ.

Analogno prema ranijim razmatranjima, sjeći će pravac l svi oni pravci plohe Δ, koji ne sijeku pravce s_1, s_2. Osim pravaca s_1, s_2, u i v sjeći će pravac l i pravce u ravninama mc, nc, md i nd, jer oni ne sijeku pravce s_1, s_2. Otkrićem pravca l na plohi Δ porastao je broj sjecišta pravaca te plohe na 115.

Budući da se pravci u, v i njihova transverzala l nalaze na plohi Δ, to se u ravninama lu i lv mora nalaziti još po jedan pravac te plohe, jer je ona trećeg reda. Točke pridružene ravninama svake spojnice točke S s točkama pravca u leže na čunjosječnicama (toč. 7.). Ako mi takvu spojnicu neprekinuto vrtimo oko točke S, onda i njoj pridružene čunjosječnice neprekinuto putuju po plohi Δ, a to je moguće samo onda, ako sve te čunjosječnice prolaze jednim pravcem, jer je ploha Δ trećeg reda s konačnim brojem pravaca. Prema tome imamo na plohi Δ još dva pravca, kojima prolaze čunjosječnice pridružene svescima ravnina, kojih su osi zrake u pramenovima Su i Sv. Nazovimo te pravce r_1, r_2. U pramenu zraka Su postoje četiri takve zrake, kojima se pridružene čunjosječnice raspadaju u pravac u i još jedan pravac (toč. 8.). To su spojnice točke S sa sjecištima pravca u s ravnalicama a, b, c, d. Pravci pridruženi tim spojnicama leže u ravninama au, bu, cu i du (toč. 8.). Ta četiri pravca moraju prema tome također sjeći pravac r_1 dakle je pravac r_1 njihova druga realna zajednička transverzala. Prva takva transverzala je pravac u. Budući da transverzala i pravaca u, v, koja prolazi točkom S, pripada spojnicama te točke s točkama pravca u, to i pravac l mora sjeći pravac r_1. Vidimo dakle, da se pravac r_1 nalazi u jednoj ravnini pravca l, a u toj ravnini tih dvaju pravaca mora se nalaziti i neki treći pravac plohe Δ. Pravci plohe Δ u ravninama au, bu, cu i du ne smiju sjeći ni pravac l, ni onaj treći pravac. Ta četiri pravca ne sijeku pravac l zato, jer se svaki od ta četiri i onaj treći u ravnini lr_1 nalazi u drugoj ravnini pravca r_1. Pravci u ravninama ua, ub,

uc, ud ne sijeku pravac v, dok ga pravac l siječe. Odatle izlazi, da se pravac r_1 može nalaziti samo u ravnini pravaca l, v. Posve analogno nalazi se pravac r_2 u ravnini pravaca l, u. Pravci r_1, r_2 daju nam dakle s dosad poznatim svih 27 mogućih pravaca plohe Δ.

Vidjeli smo, da pravac r_1 siječe pravce u ravninama au, bu, cu, du i pravce l, v, u kojih se ravnini nalazi. Budući da međutim pravci l, v ne sijeku pravce m, n, m_1, n_1, to ih mora sjeći pravac r_1, jer se nalazi u ravnini lv. Analognih 10 sjecišta ima i pravac r_2. Na taj smo način dobili poznatih 135 sjecišta pravaca na općoj plohi 3. reda, ako joj je realno svih 27 mogućih pravaca.

Vidjeli smo, da pravci plohe Δ u ravninama ua, ub, uc i ud sijeku pravac r_1 te plohe, a on se nalazi u ravnini pravaca l, v. Postavimo li sada pravcem r_1 i pravcem u ravnini ua novu ravninu, tada u toj ravnini mora biti još jedan pravac naše plohe. Analogno vrijedi i za pravce u ravninama ub, uc i ud. Kakvi su to pravci, i gdje smo ih već do sada morali sresti? Točke pridružene ravninama spojnice točke S sa sjecištem pravaca a, u leže na pravcu u ravnini bu. U ravnini pravca a i točke S nalazi se pravac m naše plohe. Budući da ravnina točke S i pravca a pripada u svezak ravnina spojnice točke S sa sjecištem pravaca a, u, to pravac plohe Δ u ravnini pravaca b, u siječe pravac m. Pravac m međutim ne može sjeći pravce u, v, jer su pravci m, u, v izvodnice drugog sistema izvodnica pravčaste plohe 2. reda, koja je određena pravcima a, c, d. Taj pravac m ne može sjeći niti pravac l, jer pravcem m i transverzalom i ne možemo položiti ravninu, budući da su to mimosmjerni pravci. Kako međutim pravci v, l, r_1 čine jedan ravninski presjek plohe Δ, to pravac m mora sjeći jedan od tih pravaca. Jer on ne siječe pravce v i l, mora dakle sjeći pravac r_1. U ravnini pravca r_1 i pravca u ravnini pravaca b, u nalazi se dakle kao treći pravac plohe Δ pravac m. Posvema analogno nalaze se pravci n, m_1, n_1 u ravninama pravca r_1, koje idu pravcima u ravninama au, du i cu, a isto to vrijedi s obzirom na pravce m, n, m_1, n_1 i za ravnine pravca r_2 i pravce plohe Δ u ravninama av, bv, cv i dv.

Pravce u ravninama pravaca au, bu, cu, du, av, bv, cv, dv, mc, nc, md i nd označimo jednostavno ovako: $/au/$, $/bu/$, $/cu/$, $/du/$, $/av/$, $/bv/$, i t. d. Na temelju dosadanjih naših razmatranja može se vrlo jednostavno sastaviti skrižaljka naših 27 pravaca plohe Δ, na kojoj se točno vidi koji se pravac s kojim siječe, kao i poznata činjenica, da svaki pravac siječe deset ostalih. Na priloženoj skrižaljci (vidi sliku), čije smo uspravne i vodoravne pruge označili imenima pravaca po istom redu, označuju crna polja 135 sjecišta pravaca, a može se lako naći i svih 45 *Cayley*evih trostrana u ravninama trostrukog dodira[5]. Crna polja, koja leže simetrično prema nacrtanoj dijagonali, označuju naravno uvijek isto sjecište.

[5] *Th. Reye*, Cit. pod 1), sv. III., str. 90.

	a	b	c	d	s_1	s_2	u	v	m	n	m_1	n_1	|au|	|bu|	|cu|	|du|	|av|	|bv|	|cv|	|dv|	l	r_1	r_2	|mc|	|nc|	|md|	|nd|
a					●		●	●	●		●	●	●				●								●		●
b					●		●	●		●	●	●		●				●						●		●	
c						●	●	●	●	●	●				●				●					●	●		
d						●	●	●	●	●		●				●				●						●	●
s_1	●	●				●			●	●					●	●			●	●	●						
s_2			●	●	●						●	●	●	●			●	●			●						
u	●	●	●	●									●	●	●	●					●		●				
v	●	●	●	●													●	●	●	●	●	●					
m	●		●	●	●									●				●				●	●	●		●	
n		●	●	●	●								●				●					●	●		●		●
m_1	●	●	●			●										●				●		●	●			●	●
n_1	●	●		●		●									●				●			●	●	●	●		
|au|	●					●	●			●								●	●	●		●		●		●	
|bu|		●				●	●		●								●		●	●		●			●		●
|cu|			●		●		●					●					●	●		●		●				●	●
|du|				●	●		●				●						●	●	●			●		●	●		
|av|	●					●		●		●				●	●	●							●	●		●	
|bv|		●				●		●	●				●		●	●							●		●		●
|cv|			●		●			●				●	●	●		●							●			●	●
|dv|				●	●			●			●		●	●	●								●	●	●		
l					●	●	●	●														●	●	●	●	●	●
r_1								●	●	●	●	●	●	●	●	●					●						
r_2							●		●	●	●	●					●	●	●	●	●						
|mc|		●	●						●			●	●			●	●			●	●						●
|nc|	●		●							●		●		●		●		●		●	●					●	
|md|		●		●					●		●		●		●		●		●		●				●		
|nd|	●			●						●	●			●	●			●	●		●			●			

Dalje bi se mogla izvršiti i ostala poznata razmatranja na ovakvim plohama u vezi s njihovim pravcima te sjecištima istih, kao na pr. o njihovim dvošestacima (Doppelsechs)[6] te *Steiner*ovim triedrima i t. d. Vrlo jednostavno možemo otkriti na našim plohama i poznati sistem od ∞^2 prostornih krivulja 3. reda[7]. Ravninama svakog pravca točke *S* pridružene su točke takve jedne krivulje. Odatle se odmah može uočiti poznata činjenica, da se dvije ovakve krivulje sijeku uvijek samo u jednoj točki, kao i to, da dvije točke na takvoj plohi spaja samo jedna takva krivulja. Projektivnost nizova točaka na dvije ovakve krivulje postaje ovdje evidentna, jer

[6] *Th. Reye*, Cit. pod 1), sv. III., str. 90. i 91.
[7] *Th. Reye*, Cit. pod 1), sv. III., str. 77.

je očito da četirima harmonijskim ravninama nekog pravca odgovaraju na pridruženoj krivulji četiri harmonijske točke.

11. U našim dosadanjim razmatranjima uzeli smo u obzir takve dvije hiperboličke kongruencije, čije ravnalice a, b i c, d imaju dvije realne zajedničke transverzale u, v. Pretpostavimo međutim, da su obje te transverzale imaginarne. Osim pravaca u, v na plohi Δ postat će na njoj imaginarni i ovi pravci: $/au/$, $/bu/$, $/cu/$, $/du/$, $/av/$, $/bv/$, $/cv/$ i $/dv/$, a isto tako i pravci r_1, r_2, jer u trostranima $lr_1 v$, $lr_2 u$ pravac l ostaje realan. Vidimo dakle, ako su transverzale ravnalica obiju hiperboličkih kongruencija imaginarne, da u takvom slučaju dobivamo poznatu vrstu općih ploha 3. reda s 15 realnih pravaca. Iz naše sprijeda izvedene skrižaljke može se vrlo lako pročitati poznata činjenica, da svaki realan pravac siječe 6 realnih i 4 imaginarna pravca ovakve plohe. Budući da su pravci u, v imaginarni pravci druge vrste, to su ravnine spomenutih dvaju imaginarnih parova pravaca imaginarne, jer su određene jednim realnim i jednim imaginarnim pravcem druge vrste (na pr. a i u). Odatle izlazi, da su svi imaginarni pravci takve plohe imaginarni pravci druge vrste. To drugim riječima znači, da se nijednim realnim pravcem ne može položiti nijedna realna tangencijalna ravnina, koja bi plohu dirala u jednoj realnoj točki, a da je nebi i sjekla u dva realna pravca, što je poznata osobina takvih ploha.

12. Pretpostavimo sada, da je naša prva kongruencija eliptička, dok druga neka ostane hiperbolička s realnim pravcima c, d. Zajedničke zrake u, v obiju kongruencija neka budu imaginarne. Te su zrake imaginarni pravci druge vrste, jer ne leže u jednoj realnoj ravnini. Vratimo li se malo na naša razmatranja u toč. 10. i bacimo li pogled na skrižaljku, imajući na umu spomenutu činjenicu, lako ćemo vidjeti, da će osim pravaca c, d, s_1, s_2, l, m_1 i n_1 svi ostali biti imaginarni. Dobili smo dakle poznatu vrstu općih ploha 3. reda sa 7 realnih pravaca. Kod takvih ploha je poznata činjenica, da samo jednim realnim pravcem prolazi 5 realnih tangencijalnih ravnina, od kojih se u 3 ravnine nalaze po dva realna pravca, a u ostale dvije po dva konjugirano imaginarna[8]. U našoj skrižaljci lako se može vidjeti, da je takav pravac naš pravac s_2, a realne parove nalazimo u ove tri njegove ravnine: cm_3, dn_1, $s_1 l$. Imaginarni konjugirani parovi pravaca u preostale dvije ravnine jesu $/au/ /bv/$ i $/bu/ /av/$, kao što se to vidi iz naše skrižaljke. Ti su posljednji pravci imaginarni pravci prve vrste, jer u trostranima, koje čine ti pravci s po dva nekonjugirana pravca između pravaca a, b, u i v, uvijek su posljednja dva imaginarna druge vrste, dakle treći mora biti imaginaran prve vrste[9]. Naime, pravci su a, b, u i v imaginarni pravci

[8] *Cremona*, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, str. 216.

[9] *R. Sturm*, Synthet. Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867, str. 270.

druge vrste, a po dva od njih (ne konjugirana) dolaze u svakom spomenutom imaginarnom trostranu (vidi skrižaljku). Parovi $/au/bv/$ i $/bu//av/$ su konjugirani zato, jer su zapravo degenerirana čunjosječnica u dva imaginarna pravca (toč. 7).

Kad bi pravci u, v bili realni, ostali bi realni i pravci $/cu/$, $/du/$, $/cv/, /dv/$ te r_1 i r_2, tako da bi opet imali opću plohu 3. reda s 15 realnih pravaca.

13. Obje linearne kongruencije neka budu sada eliptične. Budući da su ovdje ravnalice a, b, c i d imaginarni pravci, i to druge vrste, to će na dobivenoj plohi Δ nastaloj iz tih kongruencija biti imaginarni u prvom redu pravci $/au/$, $/bu/$, $/cu/$, $/du/$, $/av/$, $/bv/$, $/cv/$ i $/dv/$, a isto tako i pravci m, n, m_1 i n_1, kao i pravci $/mc/$, $/nc/$, $/md/$ i $/nd/$. Pravci s_1, s_2 i l su u svakom slučaju realni, dok pravci u, v, r_1 i r_2 mogu biti ili realni ili imaginarni. Ako odaberemo naše kongruencije tako, da ta posljednja četiri pravca budu realna, a oni će svi biti realni uvijek, kad su realni samo pravci u, v, onda dobivamo ponovo već spomenutu plohu 3. reda sa 7 realnih pravaca.

Ako su pravci u,v imaginarni, bit će takvi i pravci r_1, r_2, jer u trostranima $lr_1 v$ i $lr_2 u$, uz realan pravac l i još jedan imaginaran pravac, mora i onaj treći biti imaginaran. U takvom slučaju dobivamo opću plohu 3. reda s tri realna pravca, u našem slučaju trostran realnih pravaca l, s_1 i s_2. Budući da su pravci u, v konjugirano imaginarni pravci druge vrste, a isto su takvi i pravci r_1, r_2, to su naši pravci, i to onih prvih osam, imaginarni pravci prve vrste. Svaki od njih nalazi se naime u jednom trostranu, u kojemu su preostala dva nekonjugirano imaginarni druge vrste. Pravci m, n i m_1, n_1 su imaginarni pravci druge vrste, jer se nalaze u trostranima, u kojima su preostale stranice jedan realan pravac i jedan imaginaran druge vrste, dakle je čitav trostran u imaginarnoj ravnini. Pravci $/mc/$, $/nc/$, $/md/$ i $/nd/$ su imaginarni prve vrste, jer su sastavni dio trostrana, u kojima su preostale dvije stranice imaginarni pravci druge vrste. Sve ovdje spomenute trostrane možemo naći na našoj skrižaljci, a na njoj se lakoćom može pročitati i to, da realan pravac s_1 naše plohe sijeku ovi imaginarni parovi pravaca: (a, m), (b, n), (cu, dv) i (du, cv). Isto tako realan pravac s_2 sijeku parovi: (c, m_1), (d, n_1), (au, bv) i (bu, av), a realan pravac l pravci: (u, r_2), (v, r_1), (mc, nd) i (nc, md). Vidjeli smo malo prije, da su pravci prvih dvaju parova kod sva ta tri realna pravca imaginarni pravci druge vrste, t. j. ravnina im je imaginarna, dok su pravci drugih dvaju parova imaginarni pravci prve vrste, koje možemo prema toč. 7. smatrati degeneriranom čunjosječnicom, dakle im je ravnina realna. Svakim realnim pravcem naše dobivene plohe Δ 3. reda s tri realna pravca možemo prema tome položiti dvije imaginarne i dvije realne tangencijalne ravnine, dakle je to jednodijelna takva opća ploha 3. reda. Po *F. Kleinu*, odnosno *Schläfliu*, to je opća ploha 3. reda bez singulariteta četvrte vrste. Već je *Sturm* dokazao[10], da se *H. Grassmann*ovim postupkom ne može doći do dvodijelne opće plohe 3. reda bez singulariteta s tri realna pravca. Jer se naš postupak može smatrati specijalnim slučajem *Grassmann*ova postupka, to se prema tome i ovdje pokazuje ispravnost Sturmova dokaza, jer nam jedino ta varijanta, s obzirom na realnost odnosno imaginarnost pravaca a, b, c, d, u i v, daje opću plohu 3. reda bez singulariteta s tri realna pravca.

14. U našim daljim razmatranjima uzmimo opet da su obje linearne kongruencije hiperboličke, ali ravnalica a prve kongruencije neka siječe ravnalicu c druge kongruencije u točki P_{13}. Povučemo li točkom P_{13} neki pravac q, tad ravnine pridružene točkama tog pravca, osim točki P_{13}, čine svezak ravnina, kojeg os spaja probodište ravnalice b s ravninom pravaca q, a i probodište ravnalice d s ravninom pravaca q, c. Svakom točkom prostora, dakle i točkom S, prolazi samo jedna ravnina tog sveska, a prema tome ima pravac q s plohom Δ samo jednu točku zajedničku izvan točke P_{13}. Odatle direktno izlazi, da je P_{13} dvostruka točka naše plohe Δ, jer je ona trećeg reda. Osim pravaca a, c prolaze točkom P_{13} još i pravci m, m_1, u i $/nc/$, što se vrlo jednostavno može razabrati već iz naših dosadanjih razmatranja u toč. 10., jer je pravac m transverzala pravaca a, b u ravnini Sc i pravac u transverzala pravaca a, b, c, d. Dakle sva tri pravca moraju prolaziti sjecištem P_{13} pravaca a, c. Budući da se u ravnini ac nalazi pravac v, koji spaja probodišta pravaca b, d s tom ravninom, a pravac $/nc/$ siječe i pravac a i pravac c, to se pravac $/nc/$ ne može nalaziti u ravnini ac, nego on mora prolaziti sjecištem P_{13}. Znamo, da pravac $/du/$ leži u ravnini $du \equiv dP_{13}$, a u toj se ravnini nalazi i pravac m, kao i to, da pravac $/bu/$ leži u ravnini $bu \equiv bP_{13}$, a u toj se ravnini nalazi i pravac m_1. Dakle je $m \equiv /du/$, $m_1 \equiv /bu/$, a odatle direktno izlazi i $n \equiv /md/$, kao i $n \equiv /bm_1/$. Već od prije međutim znamo, da je $/md/ \equiv /m_1 b/$. Jer pravac v leži u ravnini pravaca a, c, to odatle vidimo da izlazi i $c \equiv /av/$ i $a \equiv /cv/$. Vidimo dakle, da je $/bu/ \equiv m_1$, $/du/ \equiv m$, $/av/ \equiv c$, $/cv/ \equiv a$, $/md/ \equiv u$. Jer je r_2 druga transverzala pravaca $/av/$, $/bv/$, $/cv/$ i $/dv/$, dakle transverzala pravaca $/bv/$, $/dv/$, koja prolazi točkom P_{13}, a isto to je i pravac $/nc/$, to vrijedi i $r_2 \equiv nc/$. To nam dokazuje poznatu činjenicu, da se kod ovakve plohe svaki njen pravac, koji prolazi jednom dvostrukom točkom, mora računati dvostruko[11]. Pomoću naše skrižaljke lako se može naći preostalih 15 pravaca u ravninama parova pravaca točke P_{13}. Treba samo kod svakog takvog para potražiti onaj pravac, koji siječe ova oba, a ne prolazi točkom P_{13}. U tom slučaju su transverzale u, v ravnalica a, b, c, d realni pravci, a prema tome su i svih 15 pravaca, koji ne prolaze dvostrukom točkom, realni. Ploha s jednom dvostrukom točkom ima četiri

[10] *R. Sturm,* Cit. pod 9), str. 317.

[11] *F. Klein,* Über die Flächen dritter Ordnung, § 8., Math. Annal. sv. 6. (1873.)

vrste, a ova se naša ubraja u prvu takvu vrstu, t. j. za nju se može uzeti, kao da je nastala iz opće plohe 3. reda s četiri dvostruke točke razdvajanjem triju dvostrukih točaka u smislu jednoplošnog hiperboloida[12].

15. U toč. 14. uzeli smo ravnalice a, c tako, da se sijeku u točki P_{13}. Uzmimo sada to isto, samo neka se još osim toga sijeku i ravnalice b, d u točki P_{24}. Spojnica točaka P_{13}, P_{24} bit će naš pravac u, dok je pravac v presječnica ravnina parova pravaca a, c i b, d, koji se sijeku. Točkom P_{13} prolaze, kao i u prošloj točki, osim pravaca a, c, u još i pravci m, m_1, a isto tako točkom P_{24} prolaze osim pravaca b, d, u još i pravci n, n_1. Posvema analogno kao u toč 14. može se i ovdje dokazati, da su točke P_{13}, P_{24} dvostruke točke nastale plohe Δ, dakle se pravci, koji prolaze točkama P_{13}, P_{24} moraju brojiti dvostruko. Analognim razmatranjem kao u toč. 10. i 14. može se i ovdje vrlo jednostavno dokazati, da osim $m_1 \equiv /bu/$, $m \equiv /du/$, $c \equiv /dv/$ i $a \equiv /cv/$ vrijedi također i $n_1 \equiv /au/$, $n \equiv /cu/$, $d \equiv /bv/$ i $b \equiv /dv/$. Jer se ravnalice a, c i b, d sijeku u točkama P_{13} i P_{24}, a pravci $/md/$ i $/nc/$ su transverzale pravaca b, d i a, c koje prolaze tim točkama, izlazi da je $/md/ \equiv u \equiv /nc/$. No mi znamo, da je pravac r_2 druga transverzala pravaca $/av/$, $/bv/$, $/cv/$ i $/dv/$, a odatle direktno izlazi, da se i on poklapa s pravcem u. Vidimo dakle, da se pravci $u \equiv /md/$ i $r_2 \equiv /nc/$ iz točke 14. poklapaju. Kako se međutim pravci u, r_2, kao i $/md/$, $/nc/$, sijeku, to taj četveroznačni pravac postaje torzalan pravac naše plohe Δ, a ravnina pravaca l, u njegova torzalna ravnina. Odatle nadalje vidimo, da su pravci a, b, c, d, m, n, m_1, n_1 uistinu dvoznačni, dok je pravac u četveroznačan, jer je $u \equiv /md/ \equiv /nc/ \equiv r_2$.

Očito je, da svaki pravac jedne dvostruke točke mora sjeći jedan pravac druge dvostruke točke, jer je ploha Δ trećeg reda. Osim toga po jedan par pravaca svake dvostruke točke siječe jedan pravac izvan dvostrukih točaka. Takovih pravaca ima $\binom{4}{2} = 6$, a kako se vidi iz naše skrižaljke, bit će pravci s_1, s_2, r_1 v, $/nd/$ i $/mc/$. Sedmi pravac l leži s pravcem u u poznatoj torzalnoj ravnini.

Kako su u ovakvom slučaju pravci u, v realni, to su i svi ostali navedeni pravci realni, dakle smo dobili prvu vrstu po *F. Kleinu* ovakvih ploha s dvije dvostruke točke. U svemu postoje tri takve vrste[13].

16. Postavimo sada ravnalice naših kongruencija (ab), (cd) u prostoru tako, da ravnalica a prve kongruencije siječe obje ravnalice druge kongruencije, i to u točkama P_{13}, P_{14}. Znademo prema dosadanjim razmatranjima, da će naša ploha u takvom slučaju imati u točkama P_{13} P_{14} dvostruke točke. Osim pravca a prolazit će točkom P_{13} pravci c, u, m_1 i $/nc/$, a točkom P_{14} pravci d, v, n_1 i $/nd/$. Na

[12] *F. Klein*, Cit. pod 11), § 2.
[13] *F. Klein*, Cit. pod 11), § 2.

temelju naših poznatih razmatranja može se i ovdje jednostavno dokazati ova identičnost pravaca: $u \equiv /md/$, $v \equiv /mc/$, $d \equiv /au/$, $c \equiv /av/$, $m_1 \equiv /bu/$, $n_1 \equiv /bv/$, $/nc/ \equiv r_2$ i $/nd/ \equiv r_1$, t. j. pravci dvostrukih točaka su u istinu dvoznačni. Za pravac a može se analogno dokazati da vrijedi $a \equiv /cv/ \equiv /du/ \equiv m$, dakle je on četveroznačan. Između svih tih pravaca, koji se poklapaju, sijeku se pravci a, m, dakle pravac a postaje torzalan. Iz naše skrižaljke može se nadalje pročitati, da svaki pravac jedne dvostruke točke siječe jedan pravac druge dvostruke točke, a po jedan par pravaca svake dvostruke točke siječe pravce s_2, l, b, n, $/cu/$ i $/dv/$. Time smo iscrpli 26 pravaca, a dvadeset i sedmi pravac s_1 nalazi se s pravcem a u torzalnoj ravnini. Vidimo dakle, da je ova, u toč. 16. dobivena ploha Δ jednaka onoj iz toč. 15.

17. Pretpostavimo sada, da postoje oba malo prije spomenuta slučaja kod naših kongruencija (ab), (cd), t. j. ravnalica a siječe ravnalice c, d u točkama P_{13}, P_{14}, a osim toga ravnalice b, d neka se sijeku u točki P_{24}. Na temelju onoga što do sada znamo, bit će te tri točke dvostruke točke dobivene plohe Δ. Na temelju razmatranja u toč. 15. i 16. odmah se može zaključiti, da svakom tom točkom prolaze po dva četveroznačna i dva dvoznačna pravca. I to točkom P_{13} prolaze dvoznačni pravci $c \equiv /av/$, $m_1 \equiv /bu/$, točkom P_{14} dvoznačni pravci $v \equiv /mc/$, $/nd/ \equiv r_1$ i točkom P_{24} dvoznačni pravci $b \equiv /dv/$, $n \equiv /cu/$. Četveroznačni pravci $d \equiv n_1 \equiv /bv/ \equiv$ $\equiv /au/$, $a \equiv m \equiv /du/ \equiv /cv/$ i $u \equiv /nc/ \equiv /md/ \equiv r_2$ su spojnice dvostrukih točaka, a jer se pravci d, n_1, zatim a, m i $/nc/$, $/md/$ sijeku u dvostrukim točkama P_{13}, P_{14} i P_{24}, bit će ti pravci i torzalni pravci naše plohe Δ. Preostali pravci s_1, s_2 i l ne prolaze ni jednom dvostrukom točkom, ali u ravnini svakog para dvoznačnih pravaca, koji se sijeku u dvostrukim točkama, nalazi se po jedan od tih pravaca. To se lako može pročitati u našoj skrižaljci. Osim toga se u našoj skrižaljci može vidjeti, da četveroznačni torzalan pravac a siječe pravac s_1, nadalje pravac d siječe pravac s_2, a pravac u siječe pravac l. Vidimo dakle, da su parovima pravaca as_1, ds_2 i ul, koji se sijeku, određene torzalne ravnine duž pravaca a, d i l.

Prema *F. Klein*ovom razvijanju oblika općih ploha 3. reda iz plohe 3. reda s četiri dvostruke točke, postoje dvije vrste ploha 3. reda s tri dvostruke točke. Naša dobivena ploha ima sve na njoj moguće pravce realne, dakle se ubraja u prvu vrstu[14].

18. Ravnalice naših kongruencija (ab), (cd) neka se sijeku konačno u četiri točke tako, da svaka ravnalica jedne kongruencije siječe obje ravnalice druge kongruencije. Nastale točke P_{13}, P_{14}, P_{23} i P_{24} bit će opet dvostruke točke naše plohe Δ. Dvostruke točke P_{13}, P_{14} i P_{24} uglavnom već poznajemo iz prošlih odsjeka, pa ćemo promotriti samo točku P_{23}. Analognim razmatranjem kao sprijeda, kao i pomoću naše skrižaljke, lako se zamjećuje, da tom točkom pro-

[14] *F. Klein*, Cit. pod 11), § 2.

laze pravci b, c, n, m_1, v i r_1. Parovi pravaca $r_1 v$, cm_1 i bn prolaze međutim već i točkama P_{13}, P_{14} i P_{24}, dakle se ti pravci poklapaju. Pravci tih parova međutim se i sijeku, dakle spojnice točke P_{23} s ostale tri dvostruke točke daju nova tri torzalna pravca. Vidimo dakle, da su se tri para dvoznačnih pravaca plohe Δ iz prošlog odsjeka, koji prolaze točkama P_{13}, P_{14} i P_{24}, stegnula u nova tri četveroznačna pravca, koji su i torzalni, a prolaze četvrtom dvostrukom točkom P_{23}. Naših šest četveroznačnih pravaca daju nam 24 pravca plohe Δ, a čine bridove nekog tetraedra. Preostala tri pravca s_1, s_2, l sijeku po dva četveroznačna, odnosno torzalna pravca, dakle svakim od njih prolaze po dvije torzalne ravnine. Znademo, da pravac s_1 siječe ravnalice a, b, pravac s_2 siječe ravnalice d, c i pravac l siječe pravce u, v. Vidimo dakle, da pravci s_1, s_2, l sijeku nasuprotne bridove tetraedra P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, a time su određena i sva tri para torzalnih ravnina. Ako su točke P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24} vrhovi pravilnog tetraedra, a ravnina pravaca s_1, s_2, l usporedna s jednom pobočkom tog tetraedra, imat ćemo poznatu pravilnu plohu 3. reda s četiri dvostruke točke, koja je služila *Feliksu Kleinu* kod njegovih razmatranja općih ploha 3. reda, a koju smo u više navrata spomenuli u ovoj radnji.

19. Naše plohe Δ dobivamo tako, da uzmemo dvije linearne kongruencije s ravnalicama a, b i c, d i sve ravnine neke točke S. Geometrijsko mjesto sjecišta zraka tih kongruencija, koje leže u ravninama te točke, jest ova naša ploha. S osobitim obzirom na toč. 18. možemo na temelju toga izreći ovu jednostavnu definiciju opće plohe 3. reda, koja je zadana s četiri dvostruke i jednom jednostrukom običnom točkom:

Zadamo li po volji u prostoru neki vitoperi četverokut a, b, c, d *i neku točku* S, *pa svakom ravninom te točke presiječemo stranice toga četverokuta, tada se spojnice tih sjecišta na mimosmjernim stranicama tog četverokuta sijeku u točkama opće plohe 3. reda s četiri dvostruke točke u vrhovima toga četverokuta. Stranice i dijagonale tog četverokuta su četveroznačni pravci te plohe. Transverzale parova mimosmjernih stranica* a, b *i* c, d, *koje prolaze točkom* S, *kao i transverzala dijagonala tog vitoperog četverokuta, koja leži u ravnini prvih dviju transverzala, jednoznačni su pravci te plohe.*

20. Pustimo li sada, da se kod hiperboličkih kongruencija (ab), (cd) ravnalice a, b i c, d poklope, t. j. obje kongruencije postaju parabolične, tad će osim pravaca a, b i c, d i ovi pravci pasti skupa: mn, $m_1 n_1$ $/au/ /bu/$, $/cu/ /du/$, $/av/ /bv/$ i $/cv/ /dv/$. Ove posljednje nazovimo ukratko $/abu/$, $/cdu/$, $/abv/$ i $/cdv/$. Jer transverzale parova pravaca ac, ad, bc i bd, koje prolaze točkom S, padaju u jedan pravac, to i pravci $/mc/$, $/nc/$, $/md/$ i $/nd/$ padaju u jedan pravac (isporedi toč. 10.), koji nazovimo $/mncd/$. Nastala ploha Δ imat će prema tome jedan četveroznačan, osam dvoznačnih i sedam jednoznačnih pravaca. Budući da se pravci parova $/mc/$ $/nd/$ i $/nc/$ $/md/$ sijeku, to će

taj četveroznačni pravac biti torzalan, a na njemu moraju biti dvije dvostruke točke. Na temelju naših razmatranja i pomoću naše skrižaljke lako se vidi, da četveroznačan pravac $/mncd/$ siječe pravac $/ab/$ u istoj točki kao i pravci $/abu/$, $/abv/$ i $/mn/$, a pravac $/cd/$ u istoj točki kao i pravac $/cdu/$, $/cdv/$ i $/m_1 n_1/$. To su dakle sjecišta dvostruke točke naše plohe Δ, a dobijamo ih kao sjecišta pravca $/ab/$, odnosno $/cd/$, sa zrakom parabolične kongruencije (cd), odnosno (ab), koja se nalazi u ravnini točke S i ravnalice kongruencije (cd), odnosno (ab). Vidimo prema svemu, da je ovakva ploha potpuno jednaka već promatranoj plohi s dvije dvostruke točke u toč. 15. i 16. Na našoj skrižaljci lako se može pročitati, koji se pravci i kako sijeku, kao što se odmah vidi, i koji od njih leži u torzalnoj ravnini.

Pretpostavimo, da su zajedničke zrake u, v paraboličnih kongruencija (ab), (cd) imaginarne. Radi toga bit će imaginarni i pravci $/au/$, $/bu/$, $/cu/$, $/du/$, $/av/$, $/bv/$, $/cv/$ i $/dv/$, odnosno dvoznačni pravci $/abu/$, $/abv/$, $/cdu/$ i $/cdv/$. Uz pravce u, v bit će imaginarni i pravci r_1, r_2, jer se oni nalaze u ravninama pravaca $/mn/$, $/abu/$, koji se sijeku, odnosno $/m_1 n_1/$, $/cdv/$, kao što se to uostalom vidi iz skrižaljke, gdje su pravci $/abu/$, $/cdv/$ imaginarni, a pravci $/mn/$ i $/m_1 n_1/$ realni. Dakle treći pravac u svakoj toj ravnini mora biti imaginaran. Vidimo prema tome, da smo u ovakvom slučaju dobili drugu vrstu ploha 3. reda s dvije dvostruke točke po *Kleinu*[15].

21. Ostavimo sada kongruenciju (ab) hiperboličkom, a kongruencija (cd) neka bude opet parabolička. Analognim postupkom kao do sada došli bismo ovdje do plohe Δ 3. reda s jednom dvostrukom točkom. Osim pravaca c, d past će skupa i pravci $/cu/$ $/du/$, $/cv/$ $/dv/$, $m_1 n_1$, $/mc/$ $/md/$ i $/nc/$ $/nd/$. Svi ti pravci prolaze jednom točkom, koja će biti dvostruka za dobivenu plohu. Preostalih 15 pravaca lako se može pronaći pomoću naše skrižaljke.

Uzmemo li, da su zajedničke zrake u, v obih kongruencija realne, tada ovakvu našu plohu ubrajamo po *Kleinu* u prvu vrstu ploha 3. reda s jednom dvostrukom točkom.

Uzmimo sada, da su pravci u, v imaginarni. U takvom slučaju postaju imaginarnima i pravci $/cu/$, $/du/$, $/cv/$, $/dv/$, dok dvoznačni pravci $m_1 n_1$, $/mc/$ $/md/$ i $/nc/$ $/nd/$ uz pravac $/cd/$ ostaju realni. Pomoću naše skrižaljke lako se može odrediti uz pravce a, b daljih pet realnih pravaca, dok su ostali imaginarni. Na taj smo način dobili plohu 3. reda s jednom dvostrukom točkom druge vrste po *Kleinu*.

22. Pretpostavimo nadalje, da je kongruencija (ab) eliptička, dok kongruencija (cd) neka ostane parabolička. Ako su pravci u, v realni, dobili bi time istu plohu s dvije dvostruke točke druge vrste po *Kleinu*, kao i malo prije. Uzmimo međutim, da su zajedničke zrake u, v kongruencija (cd) i (ab) imaginarne. Zbog imaginarnih pravaca a, b bit će imaginarni dvoznačni pravci $/mc/$ $/md/$, $/nc/$ $/nd/$, a zbog

[15] *F. Klein*, Cit. pod 11), § 2. i § 8.

imaginarnih pravaca u, v bit će imaginarni i dvoznačni pravci $/cu/$ $/du/$, $/cv/$ $/dv/$. Dvostrukom točkom prolazit će prema tome samo dva dvoznačna pravca, dok se pomoću naše skrižaljke lako može pokazati, da će osim ta dva dvoznačna $(cd/, /m_1 n_1/)$ i jednoznačnih pravaca s_1, s_2, l svi ostali bili imaginarni. Ta je ploha prema tome 3. reda s jednom dvostrukom točkom treće vrste po *Kleinu*.

23. Zajedničke zrake u, v naših kongruencija (ab), (cd) mogu biti ne samo realne ili imaginarne, nego one se mogu i poklopiti. Ako su te kongruencije obje hiperboličke, ili obje eliptičke, ili jedna hiperbolička, a druga eliptička, a zrake u, v poklapaju se, tada će nastala ploha Δ imati opet jednu dvostruku točku, kojom će prolaziti šest dvoznačnih pravaca. Od tih će biti ili svih šest realni, ili dva realna i četiri imaginarna, ili četiri realna i dva imaginarna. Na taj bismo način opet dobili prve tri vrste općih ploha 3. reda s jednom dvostrukom točkom. Sve se to može s malo truda pročitati na našoj skrižaljci, kao i to, gdje se nalaze ostali realni ili imaginarni pravci.

Ako su kongruencije (ab), (cd) jedna ili obje paraboličke, a zrake u, v poklapaju se, tad će nastala ploha Δ imati dvije, odnosno tri dvostruke točke. Ako imamo takovu plohu s dvije dvostruke točke, tada broj imaginarnih dvoznačnih pravaca ovisi o tome, da li je jedna od tih kongruencija eliptička ili hiperbolička, a prema tome i dobivamo plohu s dvije dvostruke točke druge ili prve vrste po *Kleinu*. Koji su pak pravci imaginarni, lako se može pročitati na našoj skrižaljci, jer u svakoj ravnini triju pravaca naše plohe sigurno su dva imaginarna, ako za jednoga znademo pozitivno da je imaginaran.

24.. U dosadanjim našim razmatranjima uzeli smo u obzir sve moguće varijante ploha Δ, koje mogu nastati, ako se uzmu kongruencije $(ab), (cd)$ hiperboličke,, paraboličke ili eliptičke, a pravci u, v da budu realni ili imaginarni. U tih 12 slučajeva, kao i u sva četiri slučaja, kada se neke ravnalice kongruencija (ab), (cd) sijeku, dobili smo samo neke plohe 3. reda. Kod općih ploha 3. reda bez singulariteta dobili smo sve vrste osim dvodijelne plohe s tri realna pravca. Kod ploha s dvostrukim točkama manjka nam u svakoj vrsti po jedna, i to ona vrsta, kod koje su svi dvoznačni pravci dvostrukih točaka imaginarni. Stvaranjem varijanata, kod kojih se pravci u, v poklapaju, dobili bismo iste plohe. Dakle kod ploha s tri dvostruke točke manjka nam druga vrsta. kod onih s dvije dvostruke točke treća vrsta, a kod onih s jednom dvostrukom točkom četvrta vrsta. Vidimo dakle, da su to uvijek one plohe, kod kojih se po Kleinu dvostruke točke primarne plohe raspadaju samo u smislu dvoplošnog hiperboloida. Ta činjenica je i posve razumljiva, jer plohe Δ s dvostrukim točkama dobili smo ili tako, da su se realne ravnalice kongruencija među sobom sjekle, ili da su od realnih parova pravaca ab, cd i uv ta dva pala skupa. U svakom takvom slučaju dobili smo odmah barem dva realna dvoznačna pravca nastale dvostruke točke, a već time ne ubraja se takva ploha u gore spomenute vrste.

25. U našim dosadanjim razmatranjima varirali smo samo vrste linearnih kongruencija i međusobni položaj njihovih realnih ravnalica tako, da se one međusobom sijeku. Zadamo li međutim obje linearne kongruencije, postoji mogućnost odabiranja točke S tako, da ona bude u nekom specijalnom položaju prema tim kongruencijama. Točku S možemo odabrati, 1) na ravnalici jedne kongruencije, 2) u ravnini dviju ravnalica iz različitih kongruencija, koje se sijeku i 3) na jednoj od zajedničkih zraka u, v obiju linearnih kongruencija, ako su te zrake realne.

Iz definicije ploha Δ očito izlazi, da pod 1) ploha Δ prelazi u ravninu. Neka se recimo ravnalice a, c kongruencija (ab), (cd) sijeku u točki P_{13}, a točka S neka se nalazi u ravnini ac. Jedan pravac točke S u ravnini ac neka siječe pravac a u točki A_1, a pravac c u točki C_1. Svaka ravnina spojnica $A_1 C_1$ siječe ravninu bA_1 u jednom, a ravninu dC_1 u drugom pravcu. Sjecište tih pravaca je točka naše plohe Δ. Točke pridružene ravninama sveska spojnice $A_1 C_1$ na plohi Δ ležat će prema tome na presječnici ravnina bA_1, dC_1. Vrtimo li spojnicu $A_1 C_1$ oko S u ravnini ac, dobit ćemo na pravcima a, c perspektivne nizove A_n, C_n, koji će nam s pravcima b, d kao osima dati projektivne sveske ravnina bA_n, dC_n, a proizvod kojih je naša ploha Δ. Vidimo dakle, da pod 2) ploha Δ prelazi u pravčastu plohu 2. reda, koja prolazi sjecištem P_{13} i točkom S. Ako se sijeku i ravnalice b, d kongruencija $(ab), (cd)$ u točki P_{24}, onda ta pravčasta ploha 2. reda prelazi u stožac 2. reda, kojemu je vrh sjecište P_{24}. Sijeku li se i ravnalice a, d u točki P_{14}, to ploha Δ ostaje stožac 2. reda, a tek ako se sijeku i ravnalice b, c u točki P_{23}, onda ploha Δ prelazi u ravninu, jer spomenuti svesci ravnina ravnalica b, d postaju u tom slučaju perspektivni. Sve to naravski vrijedi u slučaju, kada točka S leži u ravnini ac.

Neka su zajedničke zrake u, v kongruencija $(ab), (cd)$ realne i na jednoj od njih, recimo u, odaberimo našu točku S. Postavimo li točkom S po volji neki pravac p, onda točke pridružene ravninama tog pravca na plohi Δ leže na jednoj čunjosječnici te plohe, koja siječe pravce p, u (toč. 7.). Svaki pravac točke S siječe na taj način njemu pridruženu čunjosječnicu samo u jednoj točki, jer s njom leži na jednoj plohi 2. reda. Na taj način točka S mora biti dvostruka točka plohe Δ, ako je ona 3. reda. Ploha Δ jest 3. reda, jer joj se njeni pravci $a, b, c, d,$ a prema tome i u i v, ne nalaze na jednoj pravčastoj plohi 2. reda. Iz definicije plohe Δ i specijalnog položaja točke S odmah izlazi, da je $u \equiv s_1 \equiv s_2 \equiv m \equiv n \equiv m_1 \equiv n_1 \equiv r_2$, t. j. pravac u je osmeroznačan pravac, u koji su se povukla četiri dvoznačna pravca te plohe. Osim toga podudaraju se i pravci $/cu/ \equiv /mc/ \equiv /nc/$, kao i $/du/ \equiv /md/ \equiv /nd/$. Nadalje se iz naše tabele vidi, da svi postojeći pravci ovakve plohe Δ, osim pravca v, sijeku pravac $u \equiv s_1 \equiv s_2 \equiv \ldots\ldots$

Odaberimo točkom S neki pravac p tako, da on siječe pravac v. Na temelju razmatranja u toč. 9. znamo, da ravninama tog pravca pridružene točke na plohi Δ leže na jednom pravcu te plohe, koji siječe pravce u i v. Uzmemo li sve pravce p točke S, koji sijeku pravac v, kao osi svezaka ravnina, onda se svaka ravnina točke S nalazi u ovakvom jednom svesku. Odatle direktno izlazi, da je ploha Δ pravčasta ploha 3. reda, kojoj su pravci u i v ravnalice.

Točkom S povučeni pravac p neka siječe pravac b u točki B. Točke pridružene ravninama tog pravca ležat će opet na jednoj čunjosječnici k plohe Δ (toč. 7.), koja mora sjeći pravac u, jer se na tom pravcu nalazi točka S. Ta se čunjosječnica k međutim nalazi u ravnini aB, jer sve zrake kongruencije (ab), koje sijeku pravac p, čine pramen zraka vrha B u toj ravnini. Budući da ta čunjosječnica mora sjeći pravac u, morat će ona prolaziti sjecištem pravaca a, u. To vrijedi za svaki pravac p u ravnini Sa, a posve analogno vrijedi i za pravce b, c, d. Znademo, da je naša pravčasta ploha Δ 3. reda određena pravcima u, v i čunjosječnicom k kao ravnalicama, a čunjosječnica k siječe pravac u. Prema tome je pravac u dvostruki, a pravac v jednostruki pravac pravčaste plohe Δ 3. reda.

Padnu li pravci u, v linearnih kongruencija $(ab), (cd)$ skupa u jedan pravac, pa točku S odaberemo na takvom pravcu, tad je očito, da će tako nastala ploha Δ biti *Cayley*eva pravčasta ploha 3. reda.

26. Sve tangente neke vitopere pravčaste plohe u točkama jedne izvodnice čine paraboličku kongruenciju. Uzmimo jedan par izvodnica i_1, i_2 neke pravčaste plohe 3. ili 4. reda, koje se sijeku, i po volji neku točku S. U svakoj ravnini te točke nalazi se po jedna zraka parabolične kongruencije svake te izvodnice kao ravnalice, a sjecišta takvih parova zraka leže, kao što znademo, na jednoj općoj plohi 3. reda, kojoj je sjecište izvodnica i_1, i_2 dvostruka točka.

Mjesto bilo kakove plohe 3. ili 4. reda odaberimo recimo *Plücker*ov konoid, a izvodnice i_1, i_2 neka budu njegove neizmjerno daleke izotropne izvodnice. U radnji »O *Plücker*ovu i nekim drugim konoidima 3. i 4. reda« pokazali smo ovo: Ako *Plücker*ov konoid siječemo ravninama jednog sveska, i te presjeke projiciramo u smjeru dvostrukog pravca na direkcionu ravninu, onda se četverostruki fokusi cirkularnih projekcija tih presjeka nalaze na jednoj kružnici, a tima četverostrukim fokusima odgovarajuće točke na pripadnim ravninama leže na jednoj prostornoj kubnoj kružnici.

Uzmemo li sada neku točku S, pa *Plücker*ov konoid siječemo svim ravninama te točke i sve te presjeke analogno projiciramo u jednu direkcionu ravninu, tad će četverostruki fokusi svih dobivenih cirkularnih krivulja prekriti čitavu ravninu projekcija. Odgovarajuće točke tima četverostrukim fokusima u pripadnim ravninama ležat će međutim na nekoj općoj plohi 3. reda, što izlazi iz naših gore spomenutih razlaganja, ako ih prenesemo sa realnih izvodnica i_1, i_2 na izotropne izvodnice tog konoida. Neizmjerno daleka točka dvostrukog pravca tog konoida je dvostruka točka te plohe, a na njoj se nalaze i izotropne neizmjerno daleke izvodnice tog konoida.

Kao što vidimo, o *Plückerovu* konoidu možemo eto i ovdje donijeti još jednu njegovu osobinu ovako formuliranu:

Siječemo li Plückerov konoid ravninama neke točke S *i sve te presjeke projiciramo u smjeru njegova dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, tad svaka tako dobivena cirkularna krivulja ima svoj četverostruki fokus. Točke u ravninama točke* S*, koje odgovaraju tim četverostrukim fokusima u pripadnim ravninama, leže na općoj plohi 3. reda, koja prolazi tom točkom, neizmjerno dalekim izotropnim izvodnicama toga konoida, kao i njegovim dvostrukim pravcem, dok joj je neizmjerno daleka točka tog dvostrukog pravca dvostruka točka.*

Evidentno je, da analogno vrijedi za bilo koju pravčastu plohu 3. ili 4. reda, kao i za bilo koji par njihovih izvodnica, koje se sijeku ili ne sijeku.

Odaberimo dvije realne izvodnice i_1, i_2 neke pravčaste plohe 3. reda, koje se sijeku. Jednostruka i dvostruka ravnalica te plohe su zajedničke zrake paraboličkih kongruencija tangenata te plohe duž tih izvodnica. To su dakle naši poznati pravci v, u. Odabiremo točku S na jednostrukoj ravnalici v. Pridružena ploha Δ bit će sigurno pravčasta ploha ili 3., ili 2., ili 1. reda. Svaka ravnina točke S pripada u jedan svezak ravnina, kojemu se os nalazi u ravnini izvodnica i_1, i_2. Pridružene točke ravninama takvog sveska nalaze se na presječnici tangencijalnih ravnina naše zadane pravčaste plohe 3. reda u sjecištima izvodnica i_1, i_2 s osi tog sveska. Budući da pravci točke S u ravnini izvodnica i_1, i_2 sijeku te izvodnice u dva perspektivna niza, to će geometrijsko mjesto točaka pridruženih ravninama točke S činiti stožac Δ 2. reda, koji dobivamo kao proizvod projektivnih svezaka ravnina izvodnica i_1, i_2. Jer je međutim ravnina $i_1 i_2$ u tim svescima sama sebi pridružena, to su ti svesci perspektivni, dakle se taj stožac 2. reda pretvara u ravninu Δ. Ta ravnina prolazi dvostrukom ravnalicom u, jer njom prolaze plohe Δ za bilo koju točku S. Ako je točka S bilo gdje u ravnini $i_1 i_2$, ostaje naravski taj stožac 2. reda neraspadnut te prolazi, kao što znademo, izvodnicama i_1, i_2 i dvostrukom ravnalicom u.

Neka je sada točka S na dvostrukoj ravnalici u. Svaka ravnina točke S pripada u jedan svezak ravnina, kojemu os siječe jednostruku ravnalicu v. Točke pridružene ravninama takvog sveska leže na pravcu, jer os tog sveska siječe pravce u, v. Budući da ravnine takvog sveska prolaze i jednom točkom ravnalice v, to se u ravnini tog pravca i ravnalice u ne nalazi ni jedan drugi pravac. Geometrijsko mjesto svih pravaca, na kojima leže pridružene točke ravninama svih svezaka, kojima osi sijeku ravnalicu v, čine prema tome stožac 2. reda, jer ga svaka ravnina ravnalice u siječe u još samo jednom pravcu. Taj stožac, kao ploha Δ, prolazi opet pravcima i_1, i_2, u.

Prenesemo li sve to opet na *Plückerov* konoid, uzevši njegove neizmjerno daleke izotropne izvodnice kao izvodnice i_1, i_2, tad malo prije spomenuti stavak o *Plückerovu* konoidu možemo nadopuniti još i ovim:

Odaberemo li točku S *u malo prije spomenutom stavku o Plückerovu konoidu na njegovoj dvostrukoj ravnalici ili u neizmjerno dalekoj ravnini izvan jednostruke ravnalice, onda se one točke u ravninama točke* S, *koje se u smjeru dvostruke ravnalice projiciraju na jednu direkcionu ravninu u četverostruki fokus takve projekcije presjeka tog konoida s tom ravninom, nalaze na jednom uspravnom kružnom valjku, koji prolazi dvostrukom ravnalicom konoida. Ako je točka* S *na neizmjerno dalekoj jednostrukoj ravnalici, t. j. sve ravnine su usporedne s jednom izvodnicom konoida, prelazi taj stožac u ravninu, koja prolazi dvostrukom ravnalicom.*

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 18. IX. 1951.

EXTRAIT DE »RAD« DE L'ACADÉMIE YOUGOSLAVE,
TOME 292, pp. 171-191

V. NIČE

CONTRIBUTION AUX MÉTHODES DE GÉNÉRATION DES SURFACES DU 3e ORDRE*

La méthode la plus connue de génération des surfaces générales du 3e ordre est la méthode de *H. Grassmann* utilisant trois gerbes collinéaires de plans. On sait que les plans correspondants de deux gerbes collinéaires se coupent dans les droites d'une congruence linéaire, si la droite des deux centres correspond à soi-même. Si l'on se sert, selon la méthode de *Grassmann*, de trois gerbes collinéaires de plans (S), (S_1), (S_2) telles que les droites SS_1, SS_2 des gerbes collinéaires (S) (S_1), (S) (S_2) correspondent à soi-même, les gerbes collinéaires (S) (S_1), (S) (S_2) donnent deux congruences linéaires. Dans ce travail nous avons choisi deux congruences linéaires et la gerbe de plans d'un point S pour engendrer les surfaces du 3e ordre. Cette méthode nous permet d'exécuter toutes les considérations dans l'espace sans avoir recours à une représentation dans le plan, comme le fait *H. Grassmann*, et la méthode embrasse aussi les surfaces réglées du 3e ordre.

Tout plan de l'espace contient une droite de chacune des deux congruences. Le point d'intersection de ces deux droites soit conjugué à ce plan. Nous obtenons ainsi une espéce d'espace de zéro (Nullraum), mais cette correspondance univoque n'est pas corrélative. Aux plans d'une droite correspondent les points d'une conique cubique, et les plans correspondant aux points d'une droite forment une famille cubique de plans (Ebenengewinde). Cette conique cubique et cette famille de plans s'obtiennent facilement comme produit de trois faisceaux homographiques de plans, respectivement de trois divisions homographiques. Si la droite considérée coupe une directrice d'une des deux congruences ou une directrice de chaque congruence ou bien une transversale ou toutes les deux des quatre directrices de ces congruences, la conique cubique se réduit à une conique, respectivement à une droite et la famille cubique de plans à un cône de la 2e classe, respectivement à un plan.

* Le titre original de ce travail: *Prilog načinima izvođenja ploha 3. reda.*

Les points correspondant à tous les plans d'un point S forment une surface générale Δ du 3e ordre, car parmi les plans correspondant aux points d'une droite quelconque dans l'espace il y en a toujours trois qui passent par le point S, donc cette droite a trois points en commun avec la surface Δ.

Soient données la gerbe de plans du point S et les congruences linéaires hyperboliques (ab), (cd) dont les droites a, b et c, d sont les directrices. La surface obtenue Δ du 3e ordre contient les directrices a, b, c, d des congruences données, leurs transversales communes u, v et les droites s_1, s_2 des congruences (ab), (cd) passant par le point S, car par chaque point de ces droites passe une transversale des droites a, b et une transversale des droites c, d, de sorte que leur plan passe par le point S. Nous obtenons donc les premières 8 droites de notre surface générale Δ du 3e ordre.

Les directrices c, d étant coupées par les plans Sa ou Sb, les droites de jonction m, n des points d'intersection se trouvent aussi sur la surface, car ces droites sont coupées par toutes les coniques dont les points correspondent aux plans des faisceaux ayant comme supports les droites joignant le point S aux points de la droite a respectivement b. On peut conclure, par analogie, que la surface contient de même les droites m_1, n_1 contenues dans les plans Sc et Sd et coupant les droites a et b. Il est évident que la droite m est coupée par les droites a, c, d, s_1, la droite n par b, c, d, s_1, la droite m_1 par a, b, c, s_2 et la droite n_1 par a, b, d, s_2.

Les points correspondant aux plans des lignes de jonction du point S et des points des directrices a, b, c, d, ou de leurs transversales u, v, se trouvent, comme on a déjà dit, sur des coniques. Si l'on joint le point S aux points d'intersection des directrices a, b, c, d et de leurs transversales u, v, les points correspondant aux plans de ces lignes de jonction se trouveront sur des droites auxquelles se réduisent ces coniques. En effet, B_u étant le point d'intersection des droites b, u les points correspondant aux plans de la ligne de jonction SB_u s'obtiennent comme section du plan aB_u et de la surface du 2e ordre des droites c, d, SB_u. La droite u est une partie de cette section, donc il en reste encore une droite qui doit couper les droites u et a, car toutes les deux se trouvent dans le plan de la section. De cette manière nous avons obtenu encore huit droites de la surface Δ et nous désignerons chacune en indiquant les deux autres droites du plan dans lequel elle se trouve. Ce sont donc les droites (au), (bu), (cu), (du), (av), (bv), (cv), (dv).

Le lieu des points correspondant aux plans de la transversale des droites a, c qui passe par le point S est une droite coupant les droites b, d. Nous appellerons cette droite (md), car elle coupe la droite m qui se trouve dans le plan Sa. Les transversales analogues des droites ad, bc et bd donnent les droites (mc), (nc) et (nd). Nous avons ainsi trouvé jusqu'à maintenant 24 droites de notre surface Δ

du 3ᵉ ordre. Comme le plan des droites a, u et (au) coupe toutes les droites de la surface $\varDelta$, la droite (au) sera coupée par toutes les droites qui ne coupent pas les droites a et u. Parmi les droites trouvées ce sont s_2, n, (bv), (cv) et (dv) et la droite coupe aussi les droites (mc), (md). On trouve le résultat analogue pour les autres 7 droites des 8 droites susmentionnées. Mais la droite (mc) coupe la droite (nd) et la droite (nc) coupe (md), donc les 24 droites trouvées jusqu'à maintenant se coupent en 107 points de la surface.

Aux plans du point S passant par la droite qui coupe les droites u, v correspondent les points d'une nouvelle droite l de la surface $\varDelta$. Cette droite est contenue dans le plan des droites s_1, s_2, car chacune des droites s_1, s_2 se trouve dans un plan de la droite passant par S. Cette droite l coupe les transversales u, v et aussi toutes les droites de la surface $\varDelta$ qui ne coupent pas les droites s_1, s_2. Dans le plan

	a	b	c	d	s_1	s_2	u	v	m	n	m_1	n_1	(au)	(bu)	(cu)	(du)	(av)	(bv)	(cv)	(dv)	l	r_1	r_2	(mc)	(nc)	(md)	(nd)
a					●		●	●	●		●	●	●				●								●		●
b					●		●	●		●	●	●		●				●						●		●	
c						●	●	●	●	●	●				●				●					●	●		
d						●	●	●	●	●		●				●				●						●	●
s_1	●	●				●			●	●					●	●			●	●	●						
s_2			●	●	●						●	●	●	●			●	●			●						
u	●	●	●	●									●	●	●	●					●		●				
v	●	●	●	●													●	●	●	●	●	●					
m	●		●	●	●									●				●				●	●	●		●	
n		●	●	●	●								●				●					●	●		●		●
m_1	●	●	●			●										●				●		●	●			●	●
n_1	●	●		●		●									●				●			●	●	●	●		
(au)	●					●	●			●								●	●	●		●		●		●	
(bu)		●				●	●		●								●		●	●		●			●		●
(cu)			●		●		●					●					●	●		●		●				●	●
(du)				●	●		●				●						●	●	●			●		●	●		
(av)	●					●		●		●				●	●	●							●	●		●	
(bv)		●				●		●	●				●		●	●							●		●		●
(cv)			●		●			●				●	●	●		●							●			●	●
(dv)				●	●			●			●		●	●	●								●	●	●		
l					●	●	●	●														●	●	●	●	●	●
r_1								●	●	●	●	●	●	●	●	●					●						
r_2							●		●	●	●	●					●	●	●	●	●						
(mc)		●	●						●			●	●			●	●			●	●						●
(nc)	●		●							●		●		●		●		●		●	●					●	
(md)		●		●					●		●		●		●		●		●		●				●		
(nd)	●			●						●	●			●	●			●	●		●			●			

des droites lu, lv il doit y avoir deux autres droites r_1, r_2 de notre surface. Ces droites sont aussi des transversales des droites m, n, m_1, n_1, car ces quatre droites ne coupent ni la droite l, ni la droite u, ni la droite v. Elles coupent donc la troisième droite dans ces deux plans. La droite r_1 coupe, de plus, les droites (au), (bu), (cu), (du) et la droite r_2 coupe les droites (av), (bv), (cv) et (dv). Ainsi nous avons trouvé toutes les 27 droites de la surface générale Δ du 3e ordre et leurs 135 points d'intersection.

Jusqu'ici nous avons supposé toutes les quatre directrices a, b, c, d et les transversales u, v réelles et distinctes. Si l'on suppose les congruences (ab), (cd) de sorte qu'une ou toutes les deux soient elliptiques et que les transversales u, v de leurs directrices soient réelles ou imaginaires, on obtiendra les autres espèces de surfaces générales du 3e ordre sans singularités avec *15*, *7* ou *3* droites réelles. Au cas de trois droites réelles on n'obtient que la surface du 3e ordre à une nappe, de même que par la méthode de *H. Grassmann*, car les droites a, b, c, d, u et v comme droites quadrivalentes de la surface générale du 3e ordre à 4 points doubles deviennent des droites imaginaires de la deuxième espèce lorsqu'on décompose la surface d'après *F. Klein* en quatre points doubles.

En trouvant successivement les 27 droites de la surface Δ on n'avait pas de difficultés de voir quelles droites se coupaient mutuellement. Ces résultats sont représentés dans un schéma qui facilite la discussion des surfaces générales du 3e ordre. En sachant lesquelles des paires de droites ab, cd, uv sont imaginaires (de 2e espèce), on trouve facilement à l'aide du schéma les autres droites de la surface qui sont imaginaires de la 1re ou de la 2e espèce et ainsi on détermine aisément l'espèce de la surface.

Les congruences hyperboliques (ab), (cd) étant choisies de sorte que la directrice a de la première congruence coupe la directrice c de la deuxième congruence, la surface Δ aura ce point d'intersection comme point double et ses six droites bivalentes passent par ce point, c. à. d. en outre des droites a, c, les droites u, m_1, m et (nc) passent par ce point et on a $a \equiv (cv)$, $c \equiv (av)$, $m \equiv (du)$, $m_1 \equiv (bu)$, $u \equiv (md)$ et $(nc) \equiv r_2$. Si, en outre des directrices a, c, les directrices b, d, se coupent aussi, la surface aura deux points doubles joints par une droite quadrivalente et par chacun de ces points doubles passent quatre droites bivalentes. Si la directrice a de la première congruence coupe toutes les deux directrices c, d de la deuxième congruence, tandis que la directrice b de la première congruence ne coupe qu'une des directrices (disons c) de la deuxième congruence, la surface Δ obtenue aura trois points doubles. Ces points sont joints par trois droites quadrivalentes et par chacun d'eux passent encore deux droites bivalentes, ce qui se trouve facilement à l'aide du schéma. Comme toutes les droites sur les trois surfaces ainsi obtenues sont réelles, nous n'obtenons que la surface de la première espèce d'après *F. Klein* parmi les surfaces à un, deux ou trois points doubles.

Si chaque directrice de la première congruence coupe toutes les deux directrices de la deuxième, nous obtenons la surface générale connue du 3[e] ordre à 4 points doubles joints par 6 droites quadrivalentes, possédant, en outre, les trois droites univalentes l, s_1, s_2. Comme les directrices a, b, c, d des congruences linéaires hyperboliques (ab), (cd) sont, dans ce cas, les côtés d'un quadrilatère non situé dans un plan, dont les diagonales sont les droites communes des deux congruences, nous pouvons, pour cette dernière espèce de surfaces générales du 3[e] ordre, énoncer la définition suivante.

Soit donné dans l'espace un quadrilatère abcd *gauche et un point* S. *Dans chaque plan de ce point on joint les points appartenant à deux côtés opposés du quadrilatère. Les points où se rencontrent les deux lignes de jonction dans chaque plan se trouvent sur une surface générale du 3[e] ordre à quatre points doubles. Les sommets du quadrilatère sont les points doubles de la surface et les côtés et les diagonales sont leur droites torsales et quadrivalentes. Les transversales des côtés opposés et des diagonales de ce quadrilatère passant par le point* S *sont des droites ordinaires de la surface.*

En supposant que les paires de directrices ab, cd ou de transversales uv se confondent, c. à. d. que les congruences deviennent paraboliques, nous obtenons de nouveau des surfaces Δ à points doubles. Chaque coïncidence d'une telle paire de droites donne sur la surface Δ un point double, car celle-ci se trouve toujours sur une droite bivalente. Lorsque les transversales sont confondues et les congruences (ab), (cd) sont hyperboliques, on obtient une surface Δ à un point double de la 1[re] espèce. Si une de ces congruences est elliptique, la surface sera analogue mais de la 2[e] espèce, et si toutes les deux congruences sont elliptiques, on obtient une surface Δ à un point double de la 3[e] espèce.

Les deux congruences étant supposées paraboliques et les droites u, v réelles et distinctes, on aura une surface Δ à deux points doubles de la 1[re] espèce. Si les droites u, v sont imaginaires, la surface sera analogue mais de la 2[e] espèce. Dans le cas où les droites u, v sont confondues, la surface aura trois points doubles et appartiendra à la 1[re] espèce de telles surfaces.

En discutant les autres possibilités on obtiendrait les mêmes surfaces. On voit donc que notre méthode ne fournit pas les surfaces du 3[e] ordre à points doubles où il n'y a pas de paires de droites réelles bivalentes passant par ces points.

On sait que d'après *F. Klein* on peut obtenir toutes les espèces de surfaces générales du 3[e] ordre, avec ou sans singularités, en partant d'une surface du 3[e] ordre à quatre points doubles et en décomposant chaque point double en forme d'hyperboloïde à une ou à deux nappes. Notre méthode ne fournit pas les surfaces du 3[e] ordre qu'on obtiendrait en décomposant les points doubles seulement en forme d'hyperboloïdes à deux nappes. Les points doubles de nos surfaces Δ se sont présentés quand les directrices des congruences se rencontraient ou bien lorsque les droites réelles des paires ab, cd et uv étaient confondues. Dans tous ces cas il y a déjà deux droites réelles bivalentes qui passent par le point double obtenu et les surfaces que nous venons de mentionner ne se présentent pas.

R. Sturm a démontré qu'on ne pouvait pas obtenir les surfaces générales du 3^e ordre à deux nappes par la méthode de *Grassmann*, ce qui est confirmé par nos considérations.

En discutant les diverses variantes possibles nous avons laissé libre le point S. En lui donnant une position spéciale relativement aux directrices a, b, c, d ou au droites u, v, nous obtenons des surfaces réduites ou nouvelles. Si le point S se trouve sur une directrice, la surface Δ sera un plan. Lorsque deux directrices de congruences différentes, disons a, c, se rencontrent et le point S se trouve dans leur plan, la surface Δ devient une surface réglée du 2^e ordre, car elle est obtenue comme produit de deux faisceaux homographiques de plans. Le point S étant choisi sur la droite u, la surface Δ sera une surface réglée du 3^e ordre dont u est une directrice double et v une directrice simple. En effet, tout plan du point S se trouve dans un faisceau de plans dont le support rencontre les droites u et v, et les points correspondant aux plan d'un tel faisceau se trouvent, comme nous le savons, sur une droite rencontrant les droites u et v. Il s'ensuit que Δ est une surface réglée du 3^e ordre. Les points correspondant aux droites du point S forment une conique coupant la droite u, car cette droite passe par le point S. Donc, toutes les coniques de la surface Δ coupent la droite u et par conséquent cette droite est sa droite double. Quand les droites u, v sont confondues, il est évident que la surface Δ devient une surface réglée du 3^e ordre de *Cayley*.

Notre méthode de génération des surfaces du 3^e ordre embrasse donc aussi les surfaces réglées du 3^e ordre.

Choisissons deux génératrices d'une surface gauche qui se rencontrent, comme directrices des congruences paraboliques des tangentes de cette surface le long de ces génératrices. Coupons cette surface par tous les plans d'un point S. Les points d'intersection des paires de tangentes des courbes de sections menées par les points de ces génératrices forment une surface générale du 3^e ordre et le point d'intersection de ces génératrices est un point double de cette surface. Prenons un conoïde de *Plücker* au lieu d'une surface gauche quelconque et au lieu d'une paire quelconque de génératrices qui se rencontrent, prenons la paire infiniment éloignée de génératrices isotropes de ce conoïde. On sait que tout point correspondant à un plan du point S, projeté du point infiniment éloigné de la droite double sur un plan directeur, est le foyer quadruple de la projection de la courbe de section avec ce plan, la courbe étant projetée sur le même plan directeur. Il s'ensuit le théorème suivant concernant le conoïde de *Plücker:*

Un conoïde de Plücker étant coupé par les plans d'un point S et les sections obtenues étant projetées dans la direction de la directrice double sur un des plans directeurs, tout point de ce plan directeur sera le foyer quadruple de la projection circulaire d'une des courbes de section, la courbe étant projetée sur ce même plan directeur. Les points dans les plans du point S correspondant aux foyers quadruples des projections relatives se trouvent sur une surface du 3^e ordre qui contient les génératrices isotropes à l'infini, la directrice simple et la directrice double à distance finie de ce conoïde, tandis que le point à l'infini de la directrice double du conoïde est un point double de la surface.

Si le point S se trouve sur la directrice double de ce conoïde, ou bien dans le plan à l'infini mais non pas sur la directrice simple, la surface générale du 3e ordre devient un cylindre droit circulaire contenant la directrice double. Si le point S est sur la directrice simple qui se trouve à l'infini, c. à. d. si tous les plans de ce point sont parallèles à une génératrice du conoïde, la surface du 3e ordre devient un plan de la directrice double.